МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2},\\ x^2+9y^2-4x-18y=12.\end{cases}$$

$3t^2+9t+9$

$81-48=33$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2\geqslant \left|x^2+18x\right|^{\log_{12}13}-18x.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=8$, $BD=17$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1\leqslant x\leqslant 24$, $1\leqslant y\leqslant 24$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x+11}{4x+3}\leqslant ax+b\leqslant -8x^2-30x-17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4};-\frac{3}{4}\right)$.

$-32+60-17=$
$=11$

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB=1$, $BD=2$, $CD=3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

$4x+3\leqslant -8$

$81-72=$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1

$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha \cos 2\beta + \sin 2\beta \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ (*);

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = \sin 2\alpha \cos 4\beta + \sin 4\beta \cos 2\alpha + \sin 2\alpha =$

$= \sin 2\alpha(\underbrace{1+\cos 4\beta}_{2\cos^2 2\beta - 1}) + \cos 2\alpha \cdot \underbrace{\sin 4\beta}_{2\sin 2\beta \cos 2\beta} = \sin 2\alpha \cdot 2\cos^2 2\beta +$

$+ \cos 2\alpha \cdot 2\sin 2\beta \cos 2\beta = 2\cos 2\beta (\sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta +$

$+ \cos 2\alpha \sin 2\beta) = 2\cos 2\beta \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = -\frac{4}{5}$;

Заменяем в скобках по (*) — по усл.

$\cos 2\beta = \frac{2}{\sqrt{5}}$;

$\sin^2 2\beta = 1 - \cos^2 2\beta = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$

$\left[\begin{array}{l} \sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}, \ (1) \\ \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}. \ (2) \end{array}\right.$

1) $\cos 2\beta = \frac{2}{\sqrt{5}}$; $\sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

Подставим в условие задачи, что нами сверху преобраз:

$\begin{cases} \frac{2}{\sqrt{5}} \sin 2\alpha + \frac{1}{\sqrt{5}} \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}, \\ 2 \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = -\frac{4}{5}; \end{cases}$

$2\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1$;

$2 \cdot \frac{2\,tg\alpha}{1+tg^2\alpha} + \frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha} = -1$; — $tg\alpha$ ∃, поэтому можем так сделать

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 1 (Нумеровать только чистовики)

$4 tg\alpha + 1 - tg^2\alpha = -1(1 + tg^2\alpha);$

$4 tg\alpha + 2 = 0;$

$tg\alpha = -0,5.$

2) $\cos 2\beta = \frac{2}{\sqrt{5}}; \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}.$

Решим аналогично пункту (1):

$\frac{2}{\sqrt{5}} \sin 2\alpha - \frac{1}{\sqrt{5}} \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}};$

$2\sin 2\alpha - \cos 2\alpha = -1;$

$2 \cdot \frac{2 tg\alpha}{1 + tg^2\alpha} - \frac{1 - tg^2\alpha}{1 + tg^2\alpha} = -1;$

$4 tg\alpha + tg^2\alpha - 1 = -1 - tg^2\alpha;$

$4 tg\alpha + 2 tg^2\alpha = 0;$

$tg\alpha(2 - tg\alpha) = 0;$

$\left[\begin{array}{l} tg\alpha = 0, \\ tg\alpha = 2. \end{array}\right.$

Мы получили 3 возможных значения $tg\alpha$. По условию их всего ≥ 3, значит все они возможны и нам подходят.

Ответ: $\{-\frac{1}{2}; 0; 2\}$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N 2

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}, \\ x^2+9y^2-4x-18y=12; \end{cases} \quad \begin{cases} (x-2)-2(y-1)=\sqrt{(x-2)(y-1)}, \\ (x-2)^2+9(y-1)^2=25. \end{cases}$$

$\exists\ a=x-2,\ b=y-1.$

Тогда наша система будет иметь такой вид через a и b:

$$\begin{cases} a-2b=\sqrt{ab}, \quad (1) \\ a^2+9b^2=25; \end{cases}$$

(1): $a-2b=\sqrt{ab}$;

Если $b=0$, то $a=0$.

Если $b>0$, то:

$a-2b=\sqrt{ab};\ |:b$

$\frac{a}{b}-\sqrt{\frac{a}{b}}=2;$

$\exists \sqrt{\frac{a}{b}}=t;\ t\geq 0;$

$t^2-t-2=0;$

$(t-2)(t+1)=0;$

$$\left[\begin{array}{l} t=2, \\ t=-1 - \text{не подх., т.к. } t\geq 0 \end{array}\right.$$

$\underline{t=2.}$

Тогда при $b>0$:

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{a}{b}}=2, \quad (2) \\ a^2+9b^2=25, \quad (3) \end{cases}$$

(2): $\sqrt{\frac{a}{b}}=2;$

$$\begin{cases} a=4b, \quad (4) \\ \frac{a}{b}>0. \quad (5) \end{cases}$$

(4) в (3): $16b^2+9b^2=25;$

$b^2=1;$

По (4): $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} b=1, \\ a=4; \end{cases} \\ \begin{cases} b=-1, \\ a=-4. \end{cases} \end{array}\right.$

все подходят (5)

но II реш. не подх. $b>0$

$$\begin{cases} b=1, \\ a=4. \end{cases}$$

Итого: делаем обратную замену:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=0,\\ b=0;\end{cases}\\ \begin{cases}a=1,\\ b=1;\end{cases}\\ \begin{cases}a=-4,\\ b=-1;\end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-2=0,\\ y-1=0;\end{cases}\\ \begin{cases}x-2=4,\\ y-1=1;\end{cases}\\ \begin{cases}x-2=-4,\\ y-1=-1.\end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=2,\\ y=1;\end{cases}\\ \begin{cases}x=6,\\ y=2;\end{cases}\\ \begin{cases}x=-2,\\ y=0.\end{cases}\end{array}\right.$$

Ответ: $\{(2,1);(6,2);(-2,0)\}$.

Q_+

$f(a)+f\left(\frac{1}{a}\right)=f(1)=0$

$f(ab)=f(a)+f(b)$

$f(p)=\left[\frac{p}{4}\right]$

$f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right)$

$f\left(\frac{x}{y}\right)<0$

$f(x)=f(p_1)+f(p_k)-$

$-f(q_1)+f(q_k)$

$\left[\frac{p_1}{4}\right]+\dots+\left[\frac{p_k}{4}\right]-$

$-\left[\frac{q_1}{4}\right]-\dots\left[\frac{q_k}{4}\right]<0$

$\begin{matrix}1 & 1 & 2 & 3 & 4 & 4 & 5\\ 5, & 7, & 11, & 13, & 17, & 19, & 23\end{matrix}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Если $b<0$, то:

$a-2b=\sqrt{ab}$; $|:b$

$\frac{a}{b}-2=-\sqrt{\frac{a}{b}}$;

Пусть $\sqrt{\frac{a}{b}}=t$, $t\geq 0$;

$t^2+t-2=0$;

$(t+2)(t-1)=0$;

т.к. $t\geq 0$, то $t=1$

Тогда при $b<0$:

$\begin{cases}\sqrt{\frac{a}{b}}=1 \ (2)\\ a^2+9b^2=25 \ (3)\end{cases}$

(2): $\sqrt{\frac{a}{b}}=1$;

$\begin{cases}\frac{a}{b}\geq 0 \ (5)\\ a=b \ (4)\end{cases}$

(4) в (3): $10b^2=25$;

$\left[\begin{array}{l} b=\sqrt{\frac{5}{2}},\\ b=-\sqrt{\frac{5}{2}};\end{array}\right.$

Тогда $b=-\sqrt{\frac{5}{2}}$

По (4): $a=-\sqrt{\frac{5}{2}}$

В (5) подходит

Итого: $\left[\begin{array}{l} \begin{cases}a=0,\\ b=0;\end{cases}\\ \begin{cases}a=-\sqrt{\frac{5}{2}},\\ b=-\sqrt{\frac{5}{2}};\end{cases}\\ \begin{cases}a=4,\\ b=1;\end{cases}\end{array}\right.$

Делаем обратную замену

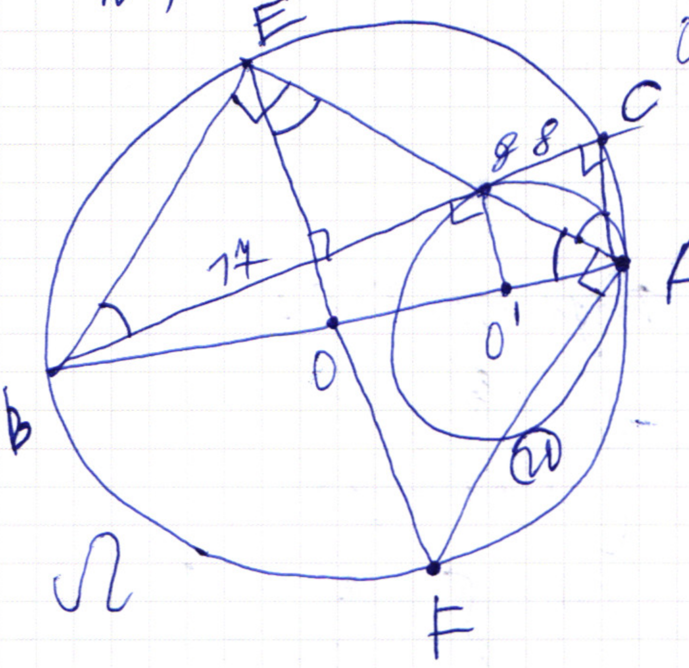
$\left[\begin{array}{l} \begin{cases}x-2=0,\\ y-1=0;\end{cases}\\ \begin{cases}x-2=-\sqrt{\frac{5}{2}},\\ y-1=-\sqrt{\frac{5}{2}}.\end{cases}\\ \begin{cases}x-2=4,\\ y-1=1;\end{cases}\end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases}x=2,\\ y=1;\end{cases}\\ \begin{cases}x=2-\sqrt{2,5},\\ y=1-\sqrt{2,5};\end{cases}\\ \begin{cases}x=6,\\ y=0.\end{cases}\end{array}\right.$

Ответ: $\{(2,1);\ (2-\sqrt{2,5}, 1-\sqrt{2,5});\ (6,0)\}$.

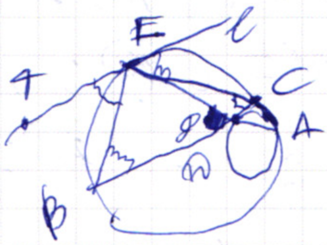
☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

№4



0) По лемме Архимеда т. E — середина дуги $\overline{BC}$, не сод. т. A. опр. Ω.

Док-во леммы: $H_A^K: \omega \to \Omega$: $D \to E$;



$BC \to$ кас. l к Ω, сод. т. E;

$l \parallel BC \Rightarrow$

$\angle EBC = \angle BET =$

$= \angle ECB \Rightarrow$

из касат.

E — ср. дуги

ЧТД

1) E — середина дуги BC Ω, тогда

$\angle BAE = \angle CAE = \angle EBC$;

$\angle BEA = 90°$, т.к. AB — диаметр $= \angle BCA$

F — ср. дуги BC, $EF \perp BC \Rightarrow$

EF — серпер к BC, значит

проходит через O и

значит EF — диаметр Ω

Тогда $EF \cap AB = O$ — центр Ω

2) $\triangle ABC$: CD — бисс $\Rightarrow \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{BD}{DC} = \dfrac{17}{8}$, $\exists\ AC = 8x \Rightarrow AB = 17x$

$\triangle ABC$ прямоуг $\Rightarrow$ по т. Пифагора

$AB^2 = AC^2 + BC^2$;

$17^2x^2 = 8^2x^2 + (17+8)^2$;

$9 \cdot 25 \cdot x^2 = 25^2$;

$x = \dfrac{5}{3}$

$AB = 17x = \dfrac{85}{3}$

$\boxed{R(\Omega) = \dfrac{85}{6}}$

радиус окр Ω

$\exists$ O' — центр $\omega \Rightarrow O'D \perp BC$

$BA - AO' = \dfrac{85}{3} - R(\omega) = BO'$;

~~$\triangle BO'D$ прям $\Rightarrow$ по т. Пифагора;~~

~~$BD^2 = O'D^2 + O'B^2$; $289 = R(\omega)^2 + (\frac{85}{3} - R(\omega))^2$~~

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$289 = 2R(\Omega)^2 + \frac{85^2}{3^2} - \frac{85\cdot 2}{3}R(\Omega);$$

$$17^2\left(1 - \frac{25}{9}\right) = 2R(\Omega)^2 - \frac{170}{3}R(\Omega);$$

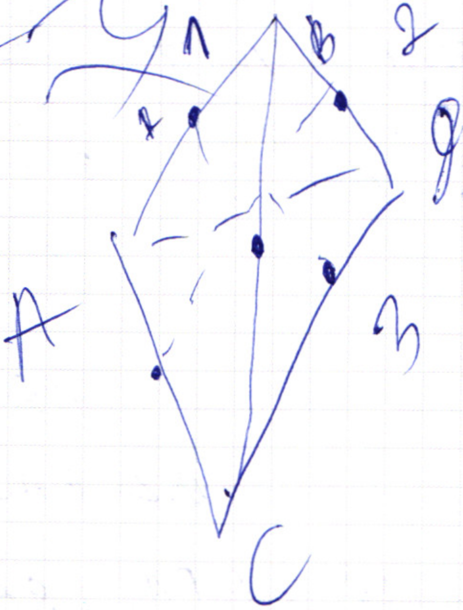
$$\overset{\shortparallel}{-\frac{16}{9}}$$

$$17^2\left(-\frac{8}{9}\right) = R(\Omega)^2 - \frac{85}{3}R(\Omega);$$

$$9R(\Omega)^2 - 255R(\Omega) + 17^2\cdot 8 = 0;$$

$$R(\Omega) = \frac{255 \pm \sqrt{255^2 - 17^2\cdot 8\cdot 9\cdot 4}}{18}$$

$$255^2 - 17^2\cdot 8\cdot 9\cdot 4 = 17^2(15^2 - 8\cdot 9\cdot 4) = 17^2 - 72\cdot 4$$



☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № (Нумеровать только чистовики)

$\Delta BO'G$ прям. $\Rightarrow$ по т. Пифагора:

$$O'B^2 = O'G^2 + BG^2;$$

$$\left(\frac{85}{3} - R(\omega)\right)^2 = R(\omega)^2 + 17^2;$$

$$\frac{85^2}{3^2} - \frac{85 \cdot 2}{3} R(\omega) = 17^2; \quad \Big| \cdot \frac{9}{17}$$

$$25 \cdot 17 - 3 \cdot 5 \cdot 2\, R(\omega) = 9 \cdot 17;$$

$$16 \cdot 17 = 3 \cdot 5 \cdot 2\, R(\omega);$$

$$R(\omega) = \frac{8 \cdot 17}{3 \cdot 5};$$

$$\boxed{R(\omega) = \frac{136}{15}.}$$

3) $OE = OA \Rightarrow \angle OEA = \angle OAE.$

$$AC = 8x = \frac{8 \cdot 5}{3} = \frac{40}{3}$$

ΔACG прям., по т. Пифагора:

$$CG^2 + AC^2 = AG^2; \qquad 8^2 + \frac{40^2}{3^2} = AG^2;$$

$$8^2\left(1 + \frac{5^2}{3^2}\right) = AG^2;$$

$$AG = \frac{8}{3} \cdot \sqrt{34};$$

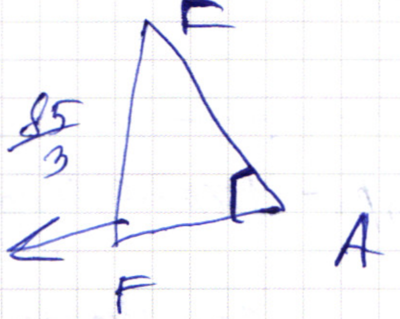
$$\cos \angle GAC = \frac{AC}{AG} = \frac{40/3}{8/3\sqrt{34}} = \frac{5}{\sqrt{34}}.$$

В ΔAEF: $\angle FEA = 90^\circ - \angle EFA = \angle GAC \Rightarrow$

$$\sin \angle EFA = \frac{5}{\sqrt{34}} \Rightarrow \angle EFA = \arcsin\left(\frac{5}{\sqrt{34}}\right).$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4) EF – диам. $\Rightarrow EF = \frac{85}{3} = 2R(\Omega)$



$EA = \sin\angle EFA \cdot EF = \frac{5}{\sqrt{34}} \cdot \frac{85}{3} = \frac{25\sqrt{17}}{3\sqrt{2}}$.

По т. Пифагора $EA^2 + AF^2 = EF^2$;

$$\frac{25^2 \cdot 17}{9 \cdot 2} + AF^2 = \frac{17^2 \cdot 25}{9};$$

$$AF^2 = \frac{17 \cdot 25}{9 \cdot 2}(17 \cdot 2 - 25)$$

$$AF^2 = \frac{17 \cdot 25 \cdot 9}{9 \cdot 2}; \quad AF = 5\sqrt{\frac{17}{2}}.$$

$$S_{\triangle AEF} = \frac{AE \cdot AF}{2} = \frac{5\sqrt{\frac{17}{2}} \cdot \frac{25\sqrt{17}}{3\sqrt{2}}}{2} =$$

$$= \frac{\frac{17}{2} \cdot \frac{5 \cdot 25}{3}}{2} = \frac{17 \cdot 125}{12} = \frac{2125}{12}.$$

$$\begin{array}{r} \times\ 125 \\ 17 \\ \hline +\ 875 \\ 125\ \ \\ \hline 2125 \end{array}$$

Ответы: $R(\Omega) = \frac{85}{6}$; $R(\omega) = \frac{136}{75}$

$\angle EFA = \arcsin\frac{5}{\sqrt{34}}$; $S_{\triangle AEF} = \frac{2125}{12}$.

N5

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$\exists\, a = b = 1$, тогда $f(1) = f(1) + f(1)$; $f(1) = 0$

$\exists\, a = \frac{1}{b}$, тогда $f(1) = f(b) + f(\frac{1}{b})$; $f(\frac{1}{b}) = -f(b)$

$b, a \in Q_+$ — множ. пол. рац. чисел

$\exists\, X = p_1 \cdots p_n$, $p_1, \dots, p_n$ — простые (возможно равные)

$\exists\, y = q_1 \cdots q_k$, $q_1, \dots, q_k$ — простые (возможно равные)

n и k могут быть и нулями

Тогда $f(\frac{x}{y}) = f\left(\frac{p_1 \cdots p_n}{q_1 \cdots q_k}\right) = f(p_1) + \dots + f(p_n) +$

$+ f(\frac{1}{q_1}) + \dots + f(\frac{1}{q_k}) = f(p_1) + \dots + f(p_n) - f(q_1) - \dots - f(q_k) =$

$= \left[\frac{p_1}{4}\right] + \dots + \left[\frac{p_n}{4}\right] - \left[\frac{q_1}{4}\right] - \dots - \left[\frac{q_k}{4}\right].$

У чисел от 1 до 24 могут быть такие простые делители: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23

$f(2) = [\frac{2}{4}] = 0$; $f(3) = [\frac{3}{4}] = 0$, поэтому вхождение 2 и 3 в x или y на $f(\frac{x}{y})$ не влияет

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5, 7, 11, 13, 17, 19, 23

$5^2 > 24$, значит кроме 2 и 3 у чисел x и y все простые делители входят в I степени

тогда ~~важно~~ по сути на $f(\frac{x}{y})$ влияет только то, ~~[illegible]~~ какое простое ≥ 5 входит в x (или никакое не входит) и ~~[illegible]~~ какое в y.

простое число	кол-во чисел от 1 до 24, дел. на него
5	$\left[\frac{24}{5}\right] = 4 = 1\cdot5, 2\cdot5, 3\cdot5, 4\cdot5$ 4
7	$\left[\frac{24}{7}\right] = 3$ 3
11	$\left[\frac{24}{11}\right] = 2$ 2
13	$\left[\frac{24}{13}\right] = 1$ 1
17	1
19	1
23	1

Кол-во чисел не кратных ни одному из простых ≥ 5: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, ~~[illegible]~~ 12, 16, 18, 24

11

Какое простое число ≥ 5 соотв. числу x или y ~~таблица~~ или наоборот

значение $f(x)$ или $f(y)$

	кол-во чисел	$\left[\frac{p}{q}\right]$ и сумм
0	11	0
5	4	1
7	3	1
11	2	2
13	1	3
17	1	4
19	1	4
23	1	5

всего 24

$f(x+y) - f(x) - f(y) = f(p) - f(q) < 0$

max простое 1x (возможно конечно, тогда 1)

аналогично для y

способов выбрать такое x	его простые дел.	простой дел. y	способов
11	0	5, …, 23	13
4	7, 5	11, …, 23	6
2	11	13, 17, 19, 23	4
1	13	17, 19, 23	3
2	17, 19	23	1

выбрать пару для x

$$11\cdot 13 + 7\cdot 6 + 2\cdot 4 + 1\cdot 3 + 2\cdot 1 =$$
$$= 143 + 42 + 8 + 3 + 2 = 185 + 13 =$$
$$= 198.$$

Ответ: 198 способов.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$(4x+3)(ax+8) = 4ax^2 + x(3a+48) + 36 = 0$

$3 + \frac{2}{4x+3}$

$\log(4x+3)(ax+8-3) \geq 2$

$5^{\log_{72}(x^2+28x)} + x^2 \geq |x^2+28x|^{\log_{72}73} - 28x$

$5^{\log_{72} t} + t \geq |t|^{\log_{72}73}$

$8x^2+30x+19$

$900-32\cdot 17 =$

$=900-510-34=$

$=356$

$\frac{-132+...}{-8}$

$5^y + 72^y \geq 73^y$

$y=2$

$\left(\frac{5}{73}\right)^y + \left(\frac{72}{73}\right)^y \geq 1$

$\frac{72x+77}{4x+3} = -8x^2-30x-19$

$\frac{-33+77}{-77+3} = \frac{-22}{-8}$

$-\frac{121}{2} + \frac{15\cdot 11}{2} - 17 = 5$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

N 3

$$5^{\log_{12} x^2+18x}+x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12} 13}-18x;$$

$$|x^2+18x|^{\log_{12}13} = 13^{\log_{12}|x^2+18x|}$$

ОДЗ: $x^2+18x>0$; → Тогда модуль можно убрать

$x(x+18)>0$;

$D(x)=(-\infty;-18)\cup(0;\infty)$

$\exists\ x^2+18x=t$; $t>0$

$$5^{\log_{12}t}+t \geq 13^{\log_{12}t};$$

$$t = 12^{\log_{12}t}$$

$\exists \log_{12}t=y$;

$$5^y+12^y \geq 13^y;$$

$$\underline{\left(\frac{5}{13}\right)^y+\left(\frac{12}{13}\right)^y} \geq 1$$

сумма 2 монотонно убывающих функций монотонно убывает

При $y=2$: $\frac{5^2}{13^2}+\frac{12^2}{13^2}=\frac{25+144}{169}=1$.

Тогда $\boxed{y\leq 2}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\log_{12} t \le 2$; обратная замена на t

$t \le 144$;

обратная замена на x

$x^2+18x \le 144$;

$x^2+18x-144 \le 0$;

$(x+24)(x-6) \le 0$;

$[-24; 6]$

$\mathcal{D}(x) = (-\infty; -18) \cup (0; \infty)$

С учётом ОДЗ получаем

~~Ответ~~ $[-24; -18) \cup (0; 6)$.

Ответ: $[-24; -18) \cup (0; 6)$.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

$$\frac{12x+11}{4x+3} = -8x^2 - 30x - 14$$

$$3 + \frac{2}{4x+3} = -8x^2 - 30x - 14$$

$$-2 = (4x+3)(8x^2+30x+20)$$

$$(4x+3)(4x^2+15x+10)+1$$

$$\cancel{48x^3 + 62x^2}$$

$$16x^3 + 72x^2 + 85x + 37 = 0$$

$16x^2+24x+9$

$4,5+13,5$

$4,5+\frac{27}{2}=$

$$t = 4x+3 \qquad 8x^2+30x+17=$$

$$3 + \frac{2}{t} = -\left(\frac{t^2}{2} + \frac{9}{2}t - 1\right)$$

$\cancel{-8+30-18+24}$

$\cancel{8+28-18-4}$

$$2 + \frac{2}{t} = -\frac{t^2+9t}{2}$$

$4(t+1) = t^3 + 9t^2$

$\cancel{4(2t+1) = t^2(t+9)}$

$\cancel{t^3+9t^2+8t+8\,4}$

$\cancel{t^3+9t^2-8t-4=0}$

$t^3+9t^2+4t+4=0$

$\cancel{-8+30+8}$

$\cancel{-8+38-8\,4}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N5

$$\frac{12x+11}{4x+3}=3+\frac{2}{4x+3} \quad (1)$$

$$-8x^2-30x-17=-(8x^2+30x+17)=-\left(\frac{(4x+3)^2}{2}+\frac{9}{2}(4x+3)-1\right) \quad (2)$$

$\rbrack\ 4x+3=t.$

докажем, что (1) и (2) перес. на $\left[-\frac{11}{4}, -\frac{3}{4}\right)$

$$3+\frac{2}{t}=-\left(\frac{t^2+9t}{2}-1\right);$$

$$2\cdot 2\frac{t+1}{t}=-(t^2+9t); \quad \boxed{t\neq 0}$$

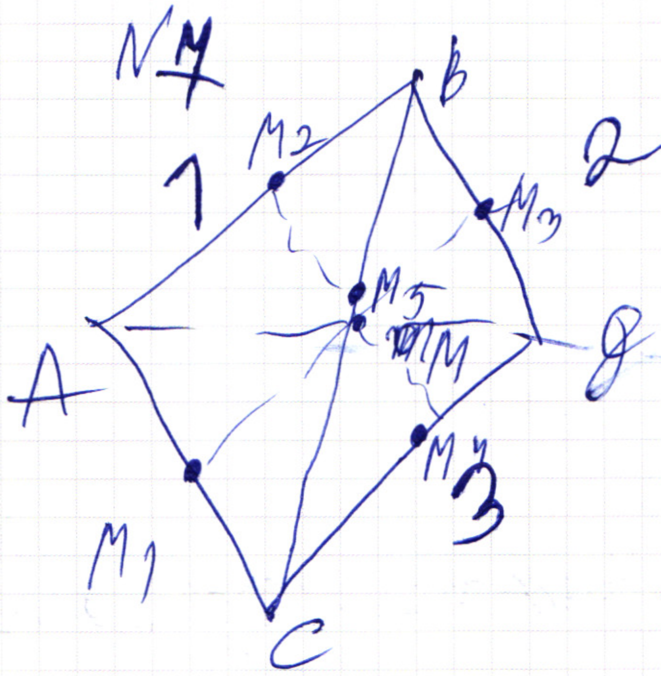
$$f(t)=t^3+9t^2+4t+4=0;$$

~~$f'(t)=3t^2+18t+4$~~

Найти пересеч не получилось, но идея в том, что $ax+b$ проходит через точку перес. графиков на $\left[-\frac{11}{4}, -\frac{3}{4}\right)$ и касается параболы и гиперболы.

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

№7



Как известно, (очев. из метода масс)

$M_1M_2M_3M_4$ — п/г

Тогда центр шара лежит на перп к плоскости $(M_1M_2M_3)$ в точке пересе $M_1M_3 \cap M_2M_4 = M$.

Тогда $M_1M_2M_3$ M_4 — прям.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1

$s\alpha = a,\ c\alpha = b$

~~sin α cos sin α = x, cos α = y~~

$s2\beta = x$

$c2\beta = y$

~~2 sin(α+β) cos(α+β)~~

$s2\alpha\, c2\beta + s2\beta\, c2\alpha = -\frac{7}{\sqrt{3}}$

$s\,2\alpha\, c4\beta + c2\alpha\, s4\beta + s2\alpha$

~~2 sin(α+2β)~~

$\frac{2}{\sqrt5} a + b\cdot\frac{1}{\sqrt5} = -\frac{7}{\sqrt5}$

$-\frac{3}{5}\cdot a + \frac{4}{5} b = -\frac{4}{5}$

$2a \pm b = -7$

$\cancel{+3a} \pm 4b \cancel{+2\sqrt5} = -4$

$2a$

$a \pm 2b = -2$

$a x + b y = -\frac{7}{\sqrt5}$

$a(2x^2-1) + b2xy + a = -\frac{4}{5}$

~~$2x^2$~~

~~$4-(2x^2-1)^2 = -4x^2 + 4x \ldots -3$~~

$2x^2 a + 2x\cdot by = -\frac{4}{5}$

$x^2\cdot a + x\cdot by + \frac{2}{5} = 0$

$x\cdot -\frac{7}{\sqrt5} + \frac{2}{5} = 0$

$x = \frac{2}{\sqrt5}$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$x+3y-2$ $\qquad x-2y=\sqrt{(y-1)(x-2)}$

$x^2+4y^2-4xy \quad =xy-x-2y+2$

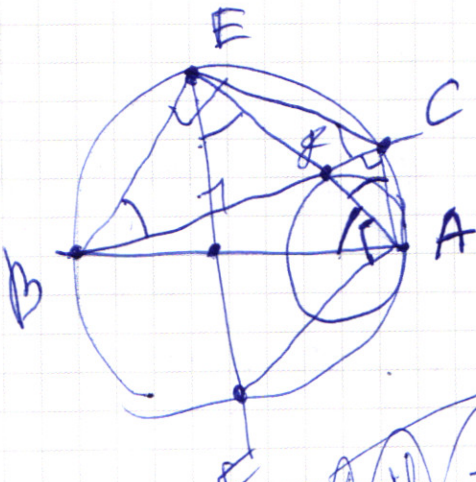
$x^2+4y^2-5xy+x+2y-2=0$

$\cancel{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(2y+\frac{1}{2}\right)^2=5xy+\ldots}$

$(x-2)^2+(3y-3)^2=25$

$a^2+9b^2=25$

$\cancel{\ldots}\ a-2b=\sqrt{ab}$



$CD=8$

$BD=17$