МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}; \qquad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3y - 2x = \sqrt{3xy - 2x - 3y + 2}, \\ 3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 4. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geqslant |x^2 + 6x|^{\log_4 5} - x^2.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = \frac{5}{2}$, $BD = \frac{13}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $3 \leqslant x \leqslant 27$, $3 \leqslant y \leqslant 27$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{4x-3}{2x-2} \geqslant ax + b \geqslant 8x^2 - 34x + 30$$

выполнено для всех x на промежутке $(1; 3]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $PQRS$, вершина P которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра PQ. Известно, что $QR = 2$, $QS = 1$, $PS = \sqrt{2}$. Найдите длину ребра RS. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6

$$\begin{cases} 8x^2-34x+30\leq ax+b \\ ax+b\leq \frac{4x-3}{2x-2} \end{cases}$$

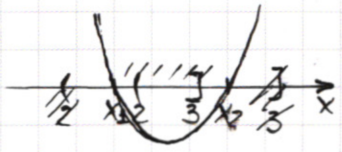
$$\begin{cases} 8x^2-(a+34)x+30-b\leq 0 \\ \frac{(ax+b)(2x-2)-4x+3}{2x-2}\leq 0 \end{cases}$$

Т.к. $x>1$, то $2x-2>0$:

$$\begin{cases} 8x^2-(a+34)x+30-b\leq 0 \\ 2ax^2+2(b-a)x-2b-4x+3\leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8x^2-(a+34)x+30-b\leq 0 \\ 2ax^2+2(b-a-2)x-2b+3\leq 0 \end{cases}$$

Первое неравенство выполнено для всех x, если полуинтервал ~~отрезок~~ $[2;3]$ включается в ~~весь~~ отрезок $[x_1, x_2]$, где x_1 и x_2 — корни уравнения $8x^2-(a+34)x+30-b\leq 0$, поэтому нужно потребовать:



$$\begin{cases} D>0 \\ f(2)\leq 0 \\ f(3)<0 \end{cases}$$

Заметим, что первое условие следует из ~~перв~~ двух последних, поэтому

$$\begin{cases} f(2)\leq 0 \\ f(3)\leq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 32-2a-68+30-b\leq 0 \\ 72-3a-102+30-b\leq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2a+b\geq -6 \\ 3a+b\geq 0 \end{cases}$$

При $a>0$ аналогично потребуем

$$\begin{cases} g(2)\leq 0 \\ g(3)\leq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 4a+2b\leq 5 \\ 12a+4b\leq 9 \end{cases} \quad \begin{cases} 4a+2b\leq 5 \\ 12a+4b\leq 9 \end{cases}$$

При $a=0$: $2(b-2)x\le 2b-3$

При $b=0$ $0\le -3$ - неверно

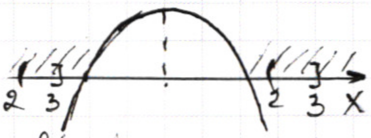
При $b>2$ $x\le \frac{2b-3}{2(b-2)}$

Потребуем $3\le \frac{2b-3}{2(b-2)} \Rightarrow b\le \frac{9}{4}$

При $b<2$ $x\ge \frac{2b-3}{2(b-2)}$, тогда

$2\ge \frac{2b-3}{2b-4} \Rightarrow b\ge \frac{5}{2}$

При $a<0$ потребуем:



$$\cancel{\left[\begin{array}{l} g(3)<0 \\ g(2)<0 \end{array}\right.}$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \frac{a+2-b}{2a}>3 \\ g(3)\le 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{a+2-b}{2a}<2 \\ g(2)<0 \end{cases} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 5a+b<2 \\ 12a+4b\le 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 5a+b>2 \\ 4a+2b\le 5 \end{cases} \end{array}\right.$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N 3

Так как $x^2+6x>0$, то $|x^2+6x| = x^2+6x$.

Введем замену $t = x^2+6x$, тогда

$3^{\log_4 t} + t \geq t^{\log_4 5}$

~~Прологарифмируем последнее по основанию 4~~

~~$\log_4 3^{\log_4 t} + \log$~~

Пусть $z = \log_4 t$, тогда

$3^z + 4^z \geq 5^z \quad |:5^z$

$\left(\frac{3}{5}\right)^z + \left(\frac{4}{5}\right)^z \geq 1$

При $z \geq 2$:

$\left(\frac{3}{5}\right)^z + \left(\frac{4}{5}\right)^z \leq \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1$, поэтому равенство достигается толь при $z = 2$

При $z < 2$ $\left(\frac{3}{5}\right)^z + \left(\frac{4}{5}\right)^z > 1$, поэтому все $z \geq 2$ подходят

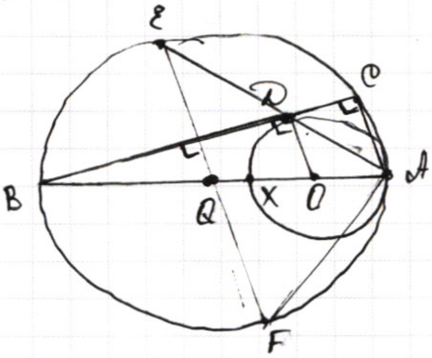
$z \geq 2$, $\log_4 t \geq 2$, $t \geq 16$

$|x^2+6x| \geq 16$

$$\left[\begin{array}{l} x^2+6x \geq 16 \\ x^2+6x \leq -16 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x^2+6x-16 \geq 0 \\ x^2+6x+16 \leq 0 \end{array}\right. \iff x^2+6x-16 \geq 0 \quad (x+8)(x-2) \geq 0$$

$x \in (-\infty; -8] \cup [2; +\infty)$

№4



Пусть радиус Ω равен R, а ω — r,
По теореме о касательной и секущей:

$BD^2 = BX \cdot BA = (AB - AX)\cdot BA =$

$= (2R - 2r)\cdot 2R = \frac{169}{4}$

$(R - r)R = \frac{169}{16}$.

Из подобия $\triangle BAC$ и $\triangle BOD$:

$\frac{BO}{BA} = \frac{BD}{BC}$

$\frac{2R-r}{2R} = \frac{13}{18} \Rightarrow \frac{r}{R} = \frac{5}{9} \Rightarrow r = \frac{5R}{9}$, тогда $R\cdot\left(R - \frac{5R}{9}\right) = \frac{169}{16}$

$\frac{4R^2}{9} = \frac{169}{16} \Rightarrow R = \frac{39}{8}$, $r = \frac{65}{24} = \frac{13}{8}$

Применим гомотетию с центром в т. A и коэффициентом $\frac{R}{r}$, тогда меньшая окружность перейдет в большую, AD в AE, радиусы AO и OD меньшей окружности в радиусы AQ и QE большей, тогда EF — диаметр Ω и $\angle EAF = 90^\circ$

~~По Th косинусов для $\triangle BAD$:~~

$\cancel{\cos\angle BAD = \frac{AB^2 + AD^2 - BD^2}{2AB\cdot AD} = 4R^2}$

$\cos\angle CBA = \frac{BC}{BA} = \frac{9}{2\cdot\frac{39}{8}} = \frac{36}{39} = \frac{12}{13}$

~~По Th косинусов для $\triangle ABD$~~

$\cancel{AD^2 = AB^2 + BD^2 - 2AB\cdot BD\cos\angle ABD =}$

Пусть $\angle AEF = \angle ADO = \alpha$, тогда $\angle BOD = 2\alpha$

$\sin\angle BOD = \sin 2\alpha = \frac{BC}{AB} = \frac{12}{13}$, $\cos 2\alpha = \frac{5}{13}$

$\sin\alpha = \sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}} = \frac{2}{\sqrt{13}}$, $\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{13}}$, $tg\,\alpha = \frac{2}{3}$

$\angle AFE = 90^\circ - \alpha = 90^\circ - arctg\frac{2}{3} = arcctg\frac{2}{3}$

$AF = \frac{39}{4}\sin\alpha = \frac{3\sqrt{13}}{2}$

$AE = \frac{39}{4}\cos\alpha = \frac{9\sqrt{13}}{4}$

$S_{AEF} = \frac{AE\cdot AF}{2} = \frac{27\cdot 13}{16} = \frac{351}{16}$

Ответ: $\frac{39}{8}$, $\frac{65}{24}$, 90°, $arcctg\frac{2}{3}$, $\frac{351}{16}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

Возведем первое уравнение системы в квадрат, учитывая $y \geq \frac{2x}{3}$ *

$9y^2 + 4x^2 - 12xy = 3xy - 2x - 3y + 2$

$9y^2 + (3 - 15x)y + 4x^2 + 2x - 2 = 0$

$D = 225x^2 + 9 - 90x - 144x^2 - 72x + 72 = 81x^2 - 162x + 81 = (9x - 9)^2$

$y = \frac{15x - 3 \pm (9x - 9)}{18}$

$y_1 = \frac{4}{3}x - \frac{2}{3}$

$y_2 = \frac{x}{3} + \frac{1}{3}$

Подставим во второе уравнение y_1

$3x^2 + 3\left(\frac{16}{9}x^2 + \frac{4}{9} - \frac{16}{9}x\right) - 6x - \frac{16}{3}x + \frac{8}{3} = \cancel{0}\ 4$

$\frac{25}{3}x^2 - \frac{50}{3}x + 4 = \cancel{0}\ 4$

$\cancel{25x^2 - 50x + 12 = 0}$ $x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x = 0,\ y = -\frac{2}{3}$ – не удовлетворяет *

$\cancel{x = 1 \pm \frac{\sqrt{13}}{5} \Rightarrow y = \frac{2}{3} \pm \frac{4\sqrt{13}}{15}}$ $x = 2,\ y = 2$

Подставим во второе уравнение y_2:

$3x^2 + 3\left(\frac{x^2}{9} + \frac{1}{9} - \frac{2x}{9}\right) - 6x - \frac{4x}{3} - \frac{4}{3} = 4$

$\frac{10}{3}x^2 - 8x - 1 = 4$

$10x^2 - 24x - 15 = 0$

$x = \frac{12 \pm \sqrt{294}}{10} = \frac{12 \pm 7\sqrt{6}}{10} \Rightarrow y = \frac{22 \pm 7\sqrt{6}}{30}$

Т.к. $y_2 \geq \frac{2x}{3}$ и $y_2 = \frac{x}{3} + \frac{1}{3}$, то $y_2 \leq 1 \Rightarrow x = \frac{12 - 7\sqrt{6}}{10},\ y = \frac{22 - 7\sqrt{6}}{30}$

Ответ: $(2, 2)$ или $\left(\frac{12 - 7\sqrt{6}}{10}; \frac{22 - 7\sqrt{6}}{30}\right)$

№5

$f(2)=0$

$f(3)=0$

$f(5)=1$

$f(7)=1$

$\cancel{f(9)=2}$

$f(11)=2$

$f(13)=3$

$f(17)=4$

$f(19)=4$

$f(23)=5$

$\cancel{f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right)}$

$f(2)=f(2\cdot 1)=f(2)+f(1)\Rightarrow f(1)=0$

$f(4)=f(2\cdot 2)=f(2)+f(2)=0$

$f(6)=f(2)+f(3)=0$

$f(8)=f(2)+f(4)=0$

$f(9)=f(3)+f(3)=0$

$f(10)=f(2)+f(5)=1$

$f(12)=f(3)+f(4)=0$

$f(14)=f(2)+f(7)=1$

$f(15)=f(3)+f(5)=1$

$f(16)=2f(4)=0$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = -\frac{8}{17}$

Так как $\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$, то $2\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right)\cos 2\beta = -\frac{8}{17}$

$\cos 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}$, а $\sin 2\beta = \pm\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha \cos 2\beta + \sin 2\beta \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\frac{4}{\sqrt{17}}\sin 2\alpha \pm \frac{1}{\sqrt{17}}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin\left(2\alpha + \arccos\frac{4}{\sqrt{17}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ или $\sin\left(2\alpha - \arccos\frac{4}{\sqrt{17}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$$\left[\begin{array}{l} 2\alpha + \arccos\frac{4}{\sqrt{17}} = -\arcsin\frac{1}{\sqrt{17}} + 2\pi k,\ k\in\mathbb{Z} \\ 2\alpha - \arccos\frac{4}{\sqrt{17}} = \pi + \arcsin\frac{1}{\sqrt{17}} + 2\pi k,\ k\in\mathbb{Z} \\ 2\alpha + \arccos\frac{4}{\sqrt{17}} = \pi + \arcsin\frac{1}{\sqrt{17}} + 2\pi k \\ 2\alpha - \arccos\frac{4}{\sqrt{17}} = -\arcsin\frac{1}{\sqrt{17}} + 2\pi k \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \alpha_1 = -\frac{1}{2}\left(\arcsin\frac{1}{\sqrt{17}} + \arccos\frac{4}{\sqrt{17}}\right) + 2\pi k \\ \alpha_2 = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\left(\arcsin\frac{1}{\sqrt{17}} + \arccos\frac{4}{\sqrt{17}}\right) + 2\pi k \\ \alpha_3 = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\left(\arcsin\frac{1}{\sqrt{17}} - \arccos\frac{4}{\sqrt{17}}\right) + 2\pi k \\ \alpha_4 = \frac{1}{2}\left(\arccos\frac{4}{\sqrt{17}} - \arcsin\frac{1}{\sqrt{17}}\right) + 2\pi k \end{array}\right.$$

$tg\alpha_1 = tg\left(\frac{1}{2}\left(\arcsin\frac{1}{\sqrt{17}} + \arccos\frac{4}{\sqrt{17}}\right)\right) = \frac{\sin\left(\frac{1}{2}\left(\arcsin\frac{1}{\sqrt{17}} + \arccos\frac{4}{\sqrt{17}}\right)\right)}{\cos\left(\frac{1}{2}\left(\arcsin\frac{1}{\sqrt{17}} + \arccos\frac{4}{\sqrt{17}}\right)\right)} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\left(\arcsin\frac{1}{\sqrt{17}} + \arccos\frac{4}{\sqrt{17}}\right)}{1+\cos\left(\arcsin\frac{1}{\sqrt{17}} + \arccos\frac{4}{\sqrt{17}}\right)}} =$
$= \pm\frac{1}{4}$

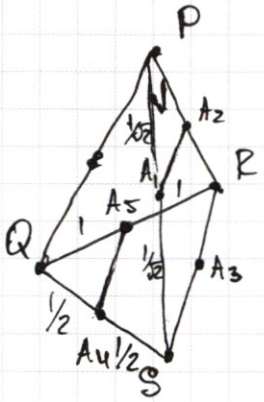
$tg\alpha_2 = -ctg\left(\frac{1}{2}\left(\arcsin\frac{1}{\sqrt{17}} + \arccos\frac{4}{\sqrt{17}}\right)\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\left(\arcsin\frac{1}{\sqrt{17}} + \arccos\frac{4}{\sqrt{17}}\right)}{1-\cos\left(\arcsin\frac{1}{\sqrt{17}} + \arccos\frac{4}{\sqrt{17}}\right)}} = \pm 4$

$tg\alpha_3$ ~~$= -ctg\alpha_3$~~ неопределен, поскольку $\cos\left(\arcsin\frac{1}{\sqrt{17}} - \arccos\frac{4}{\sqrt{17}}\right) \neq 1$

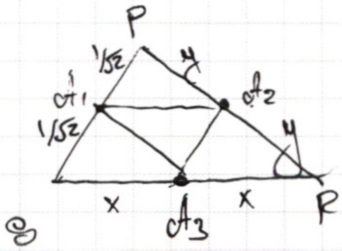
$tg\alpha_4 = 0$

Ответ: $(\pm 4, \pm\frac{1}{4}; 0)$

№7.



Т.к. т. A_1, A_2, A_3 и P лежат в одной плоскости и на одной окружности — сечении сферы (PRS), то $PA_1A_2A_3$ — прямоугольник $\Longrightarrow \angle P$ — прямой



По Th Пифагора:

$2+4y^2=4x^2$

$1+2y^2=2x^2$

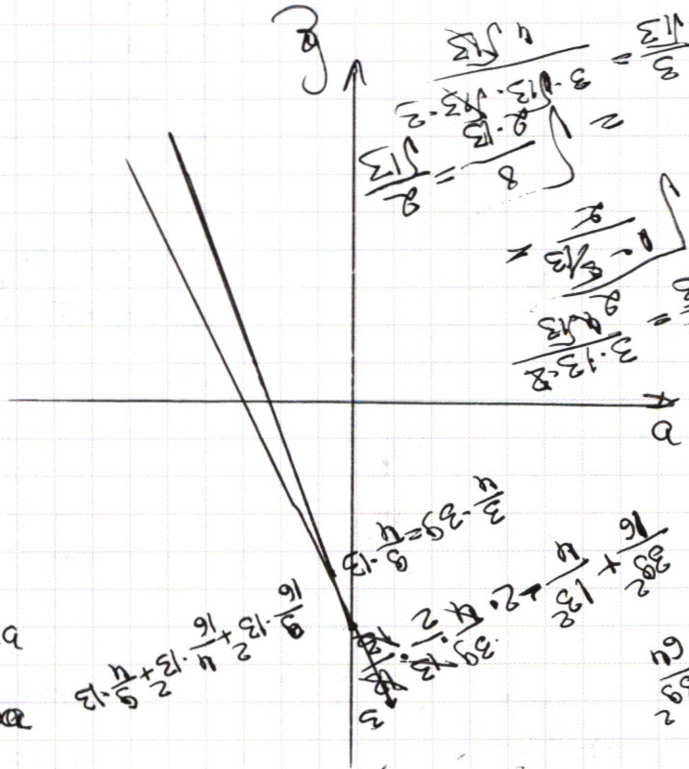
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

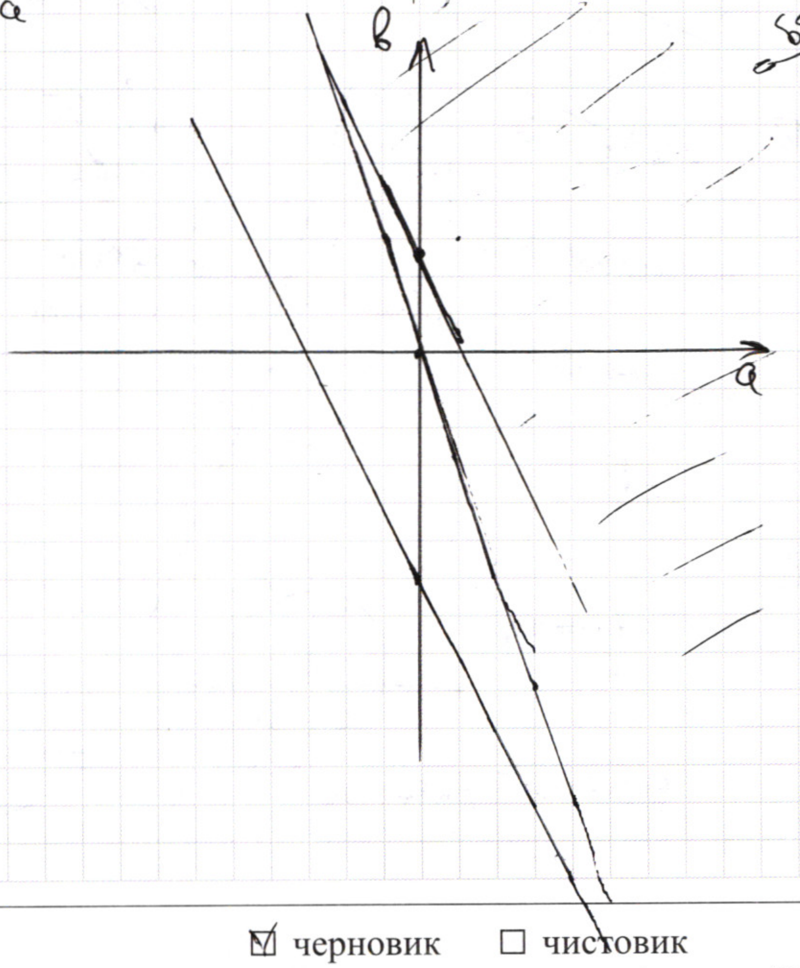
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$в \geq 2,5 - 2а$

$в \geq 2,25 - 3а$

$в \geq -3а$



☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$b < 2{,}5 - 2a$

$b < 2{,}25 - 3a$

$f\left(\frac{m}{n}\right) = f(m) + f\left(\frac{1}{n}\right)$

$f(2) = f(2) + f(1)$

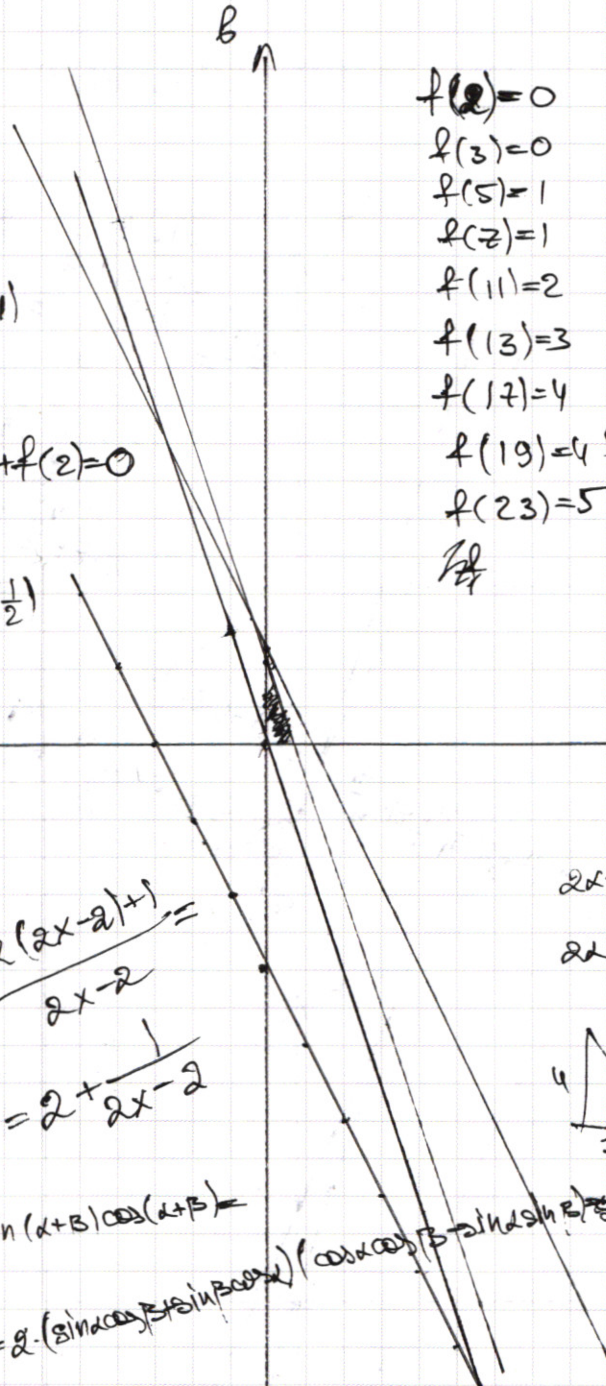
$f(1) = 0$

$\cancel{f(\frac{3}{2})}$

$f(4) = f(2) + f(2) = 0$

$f\left(\frac{1}{4}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right)$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = 1 + f\left(\frac{1}{2}\right)$



$f(2) = 0$

$f(3) = 0$

$f(5) = 1$

$f(7) = 1$

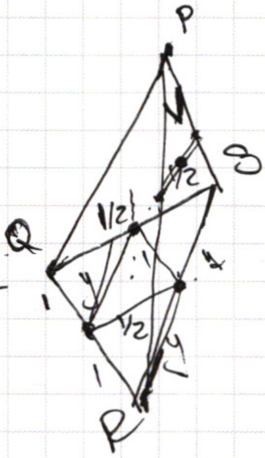
$f(11) = 2$

$f(13) = 3$

$f(17) = 4$

$f(19) = 4$

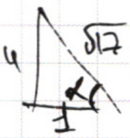
$f(23) = 5$

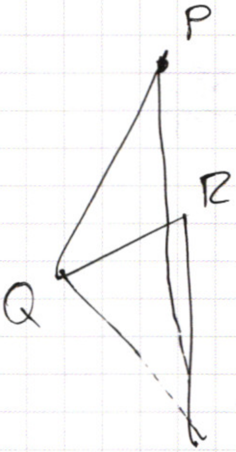


$\frac{2(2x-2)+1}{2x-2} = 2 + \frac{1}{2x-2}$

$2\alpha + 2\beta = \arcsin\frac{1}{\sqrt{17}} + 2\pi k$

$2\alpha + 2\beta = \pi + \arcsin\frac{1}{\sqrt{17}}$





$2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta) =$

$= 2\cdot(\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha)(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) = \sin\alpha$

$\frac{a+2-8}{2a}$

$-2($

$tg\,\alpha = \pm 4$

$4y^2 + 2 = 4x^2$ $\quad 2y^2 + 1 = 2x^2$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha$

$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha$

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta))$

$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta))$

$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta))$

$\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$

$\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$

$tg\left(\frac{1}{2}(\dots)\right)$

$1-tg^2\alpha$

$tg\frac{\alpha}{2}=$

$tg2\alpha=\frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$

$\begin{cases} 9y^2+4x^2-12xy=3xy-2x-3y+2 \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \end{cases}$

$3^{\log_4 t}+t\geq t^{\log_4 5}$

$t^{\log_4 3}+t\geq t^{\log_4 5}$

$t^{\log_4 3}-t^{\log_4 5}+t\geq 0$

$9y^2-15xy+3y+4x^2+2x-2=0$

$9y^2+(3-15x)y+4x^2+2x-2=0$

$D=225x^2+9-90x-$

$-144x^2-72x+72$

$\cdot 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta=-\frac{8}{17}$

$\begin{cases} 9y^2+4x^2-12xy=3xy-2x-3y+2 \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \end{cases}$

$\frac{56}{\frac{25}{81}}$ $81x^2-162x+81$

$f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right)<0$

si

$\begin{cases} 9y^2+4x^2-15xy+2x+3y-2=0 \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \end{cases}$

$2\beta=\pm c$

$\frac{24x-12}{18}=$

$=\frac{4}{3}x$

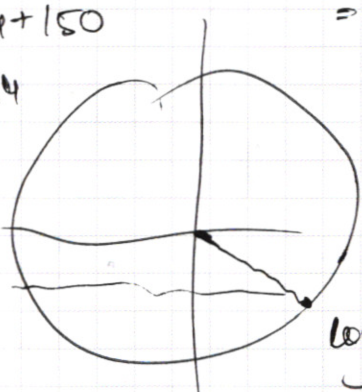
$f\left(\frac{x}{y}\right)<0$

$9x^2+9y^2-18x-12y=12$

$144+150$

294

$5x^2$ $D=64+150=214$



$-\frac{2}{3}-6-\frac{4}{3}$

$f(a\beta)=f(a)+f(\beta)$

$f(p)=[P/4]$

$3+\frac{1}{3}=$

$t^{\log_4 3}+t\geq t^{\log_4 5}$

$\log_4(3$

$\log_3 3^{\log_4 t}+$

$+\log t$

$\sqrt{\frac{1-\cos}{2}}$

$\log_4(3^{\log_4 t}+t)\geq$

$\log_4 5\cdot\log_4 t.$

$25^2-25\cdot12=$

$25\cdot13$

$\frac{25\pm5\sqrt{13}}{25}.$

$tg\left(\frac{\pi}{2}+\right.$

$\frac{4}{3}$

$3+\frac{16}{3}=$

$\frac{4}{3}\pm\frac{4\sqrt{13}}{15}-\frac{2}{3}$

$+\frac{16}{3}+\frac{16}{3}+6$

$\frac{8}{3}-\frac{16}{3}=$

$\frac{32}{3}+6=$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$3^{\log_4 t} + t \geq t^{\log_4 5}$

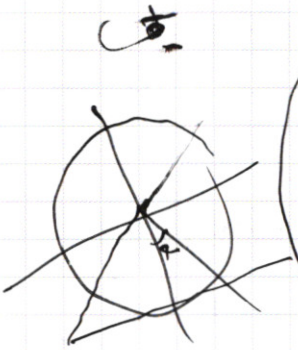
$t^{\log_4 3} + t - t^{\log_4 5} \geq 0$

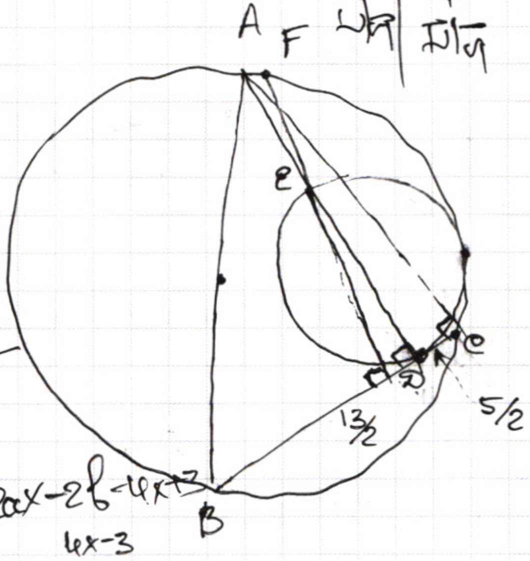
$t^{\log_3 4} + t \geq t^{\log_4 5}$ $\log_4 3 \log_4 5 =$

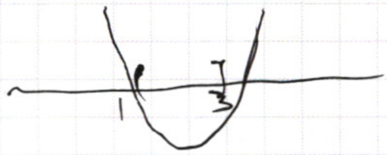
a $t(t^{\log}$

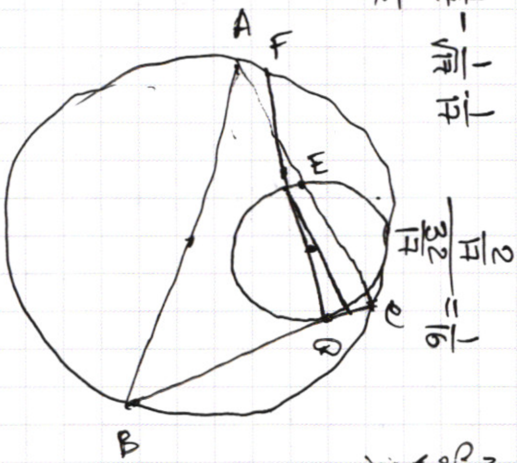
$8x^2 - 34x + 30 \leq ax + b =$

$8x^2 - (34+a)x + 30 - b \leq 0$







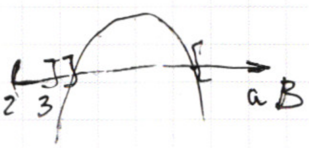


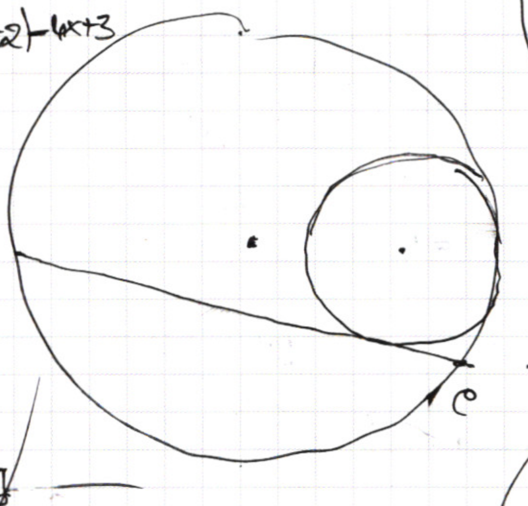
$2ax^2 + 2bx - 2ax - 2b - 4x + 3$

$4x - 3$

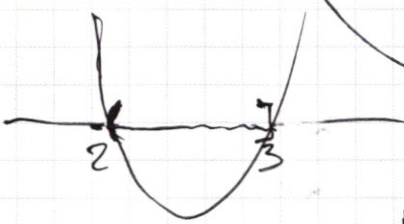
$(ax+b)(2x-2) - 4x + 3$

$2ax^2$



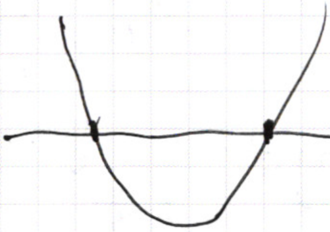


$2(b-2)x \leq 2b - 3$



$t^{\log_3 4} + t \geq t^{\log_4 5}$

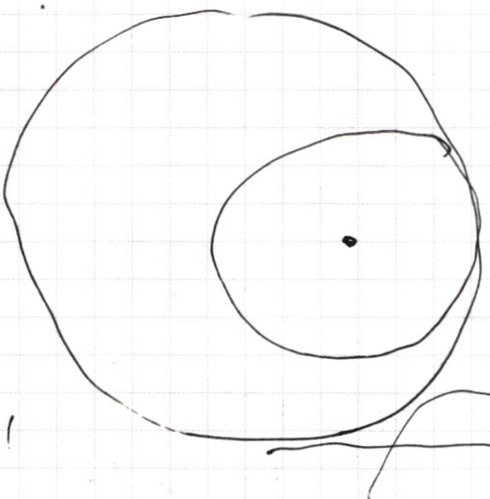
$t^{\log_3 4 - 1} + 1 \geq t^{\log_4 5 - 1}$

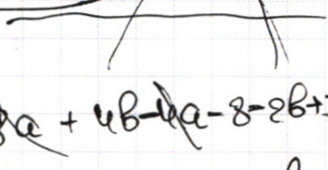


$-t^{\log_3 4 - 1} + t^{\log_4 5 - 1} \leq 1$

$\log_3 4 + 1 \geq$

$\log_4 5$





$8a + 4b - 4a - 8 - 2b + 3$

$18a + 6b - 6a - 12 - 2b + 3 \leq 0$

$12a + 4b$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

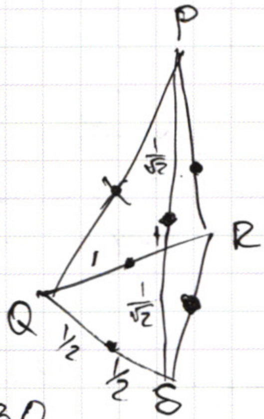
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\cos\left(\frac{1}{2}\right.$



$\cos\left(\arcsin\frac{1}{\sqrt{17}} - \arccos\frac{4}{\sqrt{17}}\right) =$

$= \frac{4}{\sqrt{17}} \cdot \frac{4}{\sqrt{17}} + \frac{1}{\sqrt{17}} \cdot \frac{1}{\sqrt{17}} =$

$= 1$

$\frac{9 \cdot 4}{39}$

BO

$\sqrt{\frac{1+1}{1-1}}$

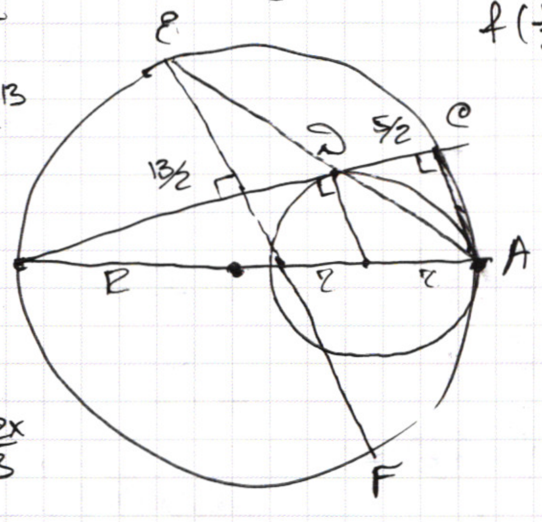
$y = 3$

$f\left(\frac{x}{3}\right) = f($

$\frac{13 \cdot 3}{4 \cdot 2}$

$\frac{13}{9} = 2 - \frac{r}{R}$ $\quad \frac{5}{9} \cdot \frac{39}{8}$ 13

$\frac{4}{9} R^2 = \frac{169}{16}$ $\quad \frac{r}{R} = \frac{5}{9}$



$\frac{\frac{13}{2}}{\frac{13}{2} + \frac{5}{2}} = \frac{13}{18}$

$y > \frac{2x}{3}$

$\frac{x}{3} + \frac{1}{3} > \frac{2x}{3}$

$\frac{x}{3} < \frac{1}{3}$

$x < 1$

$144 + 150 = 294$

$x = \frac{12 \pm \sqrt{284}}{10}$

$4R^2 +$

$4 \cdot \frac{39^2}{8^2} + \frac{13^2}{4} - 2 \cdot \frac{39}{4} \cdot \frac{13}{2} \cdot \frac{3}{13} =$

$\frac{9}{16} \cdot 13^2 + \frac{4}{16} \cdot 13^2$ $\qquad = \frac{3}{4} \cdot 39 = \frac{9}{4} \cdot 13$

$\frac{13}{16} \cdot 13^2 + \frac{9}{4} \cdot 13 = \frac{13}{4}\left(\frac{13^2}{4} + 9\right) =$

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

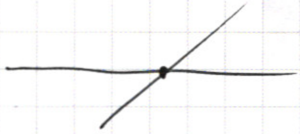
$3^{\log_4 t} + t \geq t^{\log_4 5}$

$4b-8 \geq 2b-3$

$2b \geq 5$

$2b-3 \geq 6b-12$

$4b \leq 9$



$t^{\log_4 3} + t \geq t^{\log_4 5}$

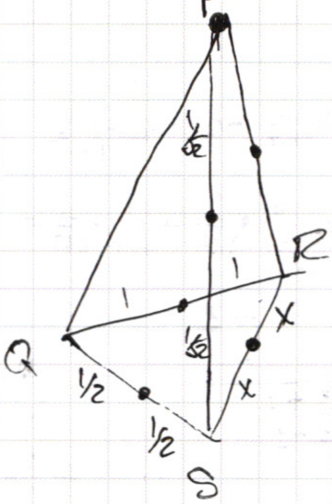
$t^{\log_4 5} - t^{\log_4 3} \leq t$

$t^{\log_4 3}\left(t^{\log_4 5 - \log_4 3} - 1\right) \leq t$

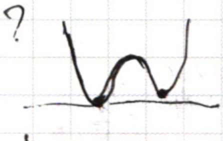
$3^{\log_4 t} + t \geq 5^{\log_4 t}$, $\log_4 t = z$

$\log_3 \left(3^{\log_4 t} + t\right) -$

$3^z + 4^z \geq 5^z$

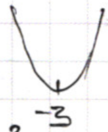


$RS - ?$

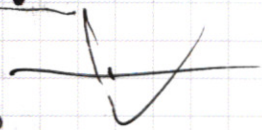


$\log_4 3$

$|x^2+6x|$



$9-18$



$3x^2 + \frac{x^2}{3} - \frac{2x}{3} + \frac{1}{3} - 6x - \frac{4x}{3} - \frac{4}{3} = 4$

$\frac{10}{3}x^2 - 8x - 5 = 0$

$\sin^z \alpha + \cos^z \alpha \geq 1$

$10x^2 - 24x - 15 = 0$

$144 + 150 = 294 \mid 2$

$147 \mid 3$

49

$\sin^n \alpha + \cos^n \alpha \leq \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

$f(2) = f\left(\frac{1}{2}\right)$

$f(3) =$

$f(2) = \cancel{f(0)} = 0$

$f(3) = f(0) = 0$

$f(5) = f(1) = 1$

$f(7) = 1$

$f(11) = 2$

$f(13) = 3$

$f(17) = 4$

$f(19) = 4$

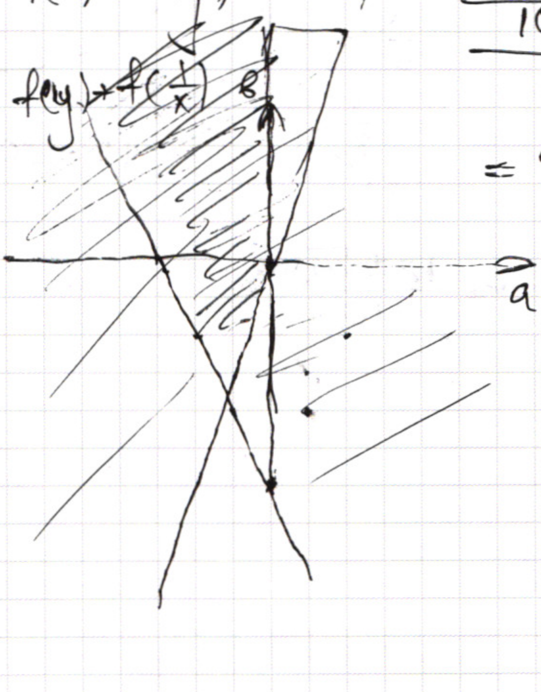
$f(23) = 5$

$\cancel{f}(2$

$f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$

$f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) < 0$

$f(y) + f\left(\frac{1}{x}\right)$



$\dfrac{\frac{12 \pm 7\sqrt{6}}{10} + 1}{3} =$

$= \frac{22 \pm 7\sqrt{6}}{30}$

$\left(\frac{3}{5}\right)^z + \left(\frac{4}{5}\right)^z$

☐ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)