МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 6 ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

+ 1. [3 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - \sqrt[3]{64y^2 - x^2} = 124, \\ 8y - \sqrt[3]{64y^2 - x^2} = -92. \end{cases}$$

+ 2. [4 балла] Решите неравенство

$$\sqrt{\log_{2x^3} x^9} \leqslant \log_{2x} \frac{1}{x^3}.$$

+ 3. [5 баллов] Найдите количество семизначных чисел, обладающих следующим свойством: сумма остатков от деления числа на некоторые три последовательные степени числа десять равна 12414.

4. [5 баллов] Даны равнобокая трапеция $ABCD$ (AD и BC – основания, $AD > BC$) и окружность ω с центром C, касающаяся стороны AD. Касательные к ω, проведённые из точки B, пересекают прямую AD в точках P и Q (точка P лежит между Q и D). На продолжении стороны CB за точку B выбрана точка N так, что $\angle CPN$ – прямой. Найдите углы ADC, NQC и площадь четырёхугольника $NCDQ$, если известно, что $\angle NCP = \operatorname{arctg} \frac{8}{15}$, $AP = \frac{17}{2}$, $NC = 17$.

5. [5 баллов] Дана система уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{3}\cos(x+y) = 5\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right), \\ \sin(x+2y) + \sqrt{3}\cos(x+2y) = 8\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right). \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y$, если известно, что оно определено и что этих значений не меньше двух.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x - 14}{2x - 3} \leqslant ax + b \leqslant 2 + \sqrt{\frac{51}{4} - 7x - x^2}$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$.

7. [6 баллов] Дан параллелепипед $KLMNK_1L_1M_1N_1$, грани $KLMN$ и LMM_1L_1 которого являются прямоугольниками. Сфера S касается прямых L_1M_1 и M_1N_1, плоскости LMM_1, а также плоскости KLM в точке K. Эта сфера повторно пересекает отрезок KM_1 в точке A. Найдите $\angle NN_1M_1$ и объём параллелепипеда $KLMNK_1L_1M_1N_1$, если известно, что $AK = 5$, $AM_1 = 2$.

© МФТИ, 2022

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

$$\begin{cases} x - \sqrt[3]{64y^2 - x^2} = 124 \quad (1) \\ 8y - \sqrt[3]{64y^2 - x^2} = -92 \quad (2) \end{cases}$$

$$\begin{matrix} (1)+(2): \\ (1)-(2): \end{matrix} \begin{cases} (x+8y) - 2\sqrt[3]{(8y-x)(8y+x)} = 32 \\ (x-8y) = 216 \end{cases}$$

Введём замену: $u = x+8y$; $t = 8y - x$

$$\begin{cases} u - 2\sqrt[3]{ut} = 32 \\ -t = 216 \quad \Rightarrow t = -216 \end{cases}$$

$$\Rightarrow u - 2\sqrt[3]{-216u} = 32$$

$$u + 12\sqrt[3]{u} = 32$$

Введём ещё замену: $\sqrt[3]{u} = v$

$$v^3 + 12v - 32 = 0$$

$$\begin{array}{r|l} v^3 + 0v^2 + 12v - 32 & v-2 \\ \cline{2-2} v^3 - 2v^2 \quad\quad\quad\quad & v^2 + 2v + 16 \\ \cline{1-1} 2v^2 + 12v \quad\quad & \\ 2v^2 - 4v \quad\quad & \\ \cline{1-1} 16v - 32 & \\ 16v - 32 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

$$(v-2)(v^2+2v+16) = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} v = 2 \\ v^2 + 2v + 16 = 0 \quad (*) \end{array}\right.$$

$(*)$: $v^2 + 2v + 16 = 0$

$$D = 4 - 4\cdot 16 < 0 \Rightarrow \varnothing$$

Т.о. $v = 2 \Leftrightarrow \sqrt[3]{u} = 2$

$$u = 8$$

Т.е. $\begin{cases} x + 8y = 8 \\ x - 8y = 216 \end{cases} \Rightarrow 2x = 224 \Rightarrow x = 112$

$$8y = 8 - 112 = -104 \Rightarrow y = -13$$

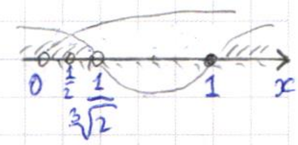
Ответ: $(112; -13)$

№2.

$$\sqrt{\log_{2x^3} x^9} \le \log_{2x} \frac{1}{x^3}$$

ОДЗ: $\begin{cases} x^9 > 0 \\ 2x^3 \ne 1 \\ 2x \ne 1 \\ \frac{1}{x^3} > 0 \\ \log_{2x^3} x^9 \ge 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x > 0, \ x \ne \frac{1}{2} \\ x \ne \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \quad \Leftrightarrow \\ (2x^3-1)(x^9-1) \ge 0 \end{cases}$



$$\log_{2x^3} x^9 = \log_{2x^3}\left((2x^3)^3 \cdot \frac{1}{8}\right) = 3 + \log_{2x^3}\frac{1}{8} =$$
$$= 3 - \log_{2x^3} 8$$

$$\log_{2x} \frac{1}{x^3} = \log_{2x} x^{-3} = \log_{2x}\left((2x)^{-3} \cdot 8\right) = -3 + \log_{2x} 8$$

Т.О. $\sqrt{3 - \log_{2x^3} 8} \le \log_{2x} 8 - 3$

$$\begin{cases} 3 - \log_{2x^3} 8 \le (\log_{2x} 8)^2 - 6\log_{2x} 8 + 9 \\ \log_{2x} 8 - 3 \ge 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\log_{2x} 8)^2 - 6\log_{2x} 8 + \log_{2x^3} 8 + 6 \ge 0 \\ \log_{2x} 8 - \log_{2x}(8x^3) \ge 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{\log_8 2x}\right)^2 - \frac{6}{\log_8 2x} + \frac{1}{\log_8 2x^3} + 6 \ge 0 \\ (2x-1)(8 - 8x^3) \ge 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{\log_8 2 + \log_8 x}\right)^2 - \frac{6}{\log_8 2 + \log_8 x} + \frac{1}{\log_8 2 + 3\log_8 x} + 6 \ge 0 \quad (1) \\ (x - 0{,}5)(x^3 - 1) \le 0 \end{cases}$$

Введём замену $t = \log_8 x$; $a = \log_8 2$

(1): $\frac{\overset{a+3t}{1}}{(t+a)^2} - \frac{\overset{(t+a)(a+3t)}{6}}{t+a} + \frac{\overset{(t+a)^2}{1}}{a+3t} \overset{(t+a)^2(a+3t)}{+6} \ge 0$

$$\frac{a + 3t - 6(t+a)(a+3t) + t^2 + 2at + a^2 + 6(t^2 + 2at + a^2)(3t+a)}{(t+a)^2(a+3t)} \ge 0$$

$$\frac{a + 3t - 6ta - 6a^2 - 18t^2 - 18at + t^2 + 2at + a^2 + 18t^3 + 6t^2a + 36t^2a + 12a^2t + 6a^3 + 18a^2t}{(t+a)^2(a+3t)} \ge 0$$

$$\frac{18t^3 - 17t^2 + 42t^2a - 22at + 3t + 18a^2t + a - 5a^2 + 6a^3}{(t+a)^2(a+3t)} \ge 0$$

$$a = \log_8 2 = \frac{1}{3}$$

$$\frac{18t^3 - 17t^2 + 14t^2 - \frac{22}{3}t + 3t + \frac{4}{3}t + 2t + \cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{5}{9}} + \cancel{\frac{2}{9}}}{(t + \frac{1}{3})^2(a + 3t)} \ge 0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{18t^3-3t^2-t}{(t+\frac{1}{3})^2(3t+\frac{1}{3})} \geq 0$$

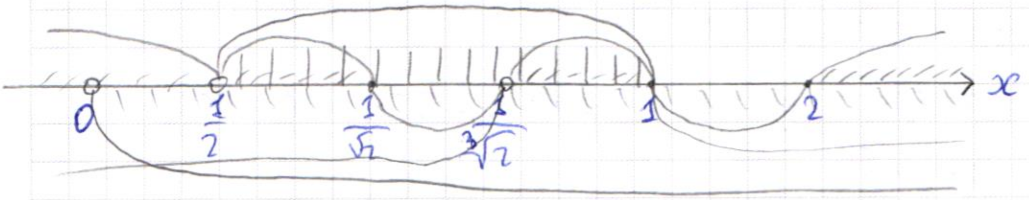
$3t(18t^2-3t-1)(t+\frac{1}{3})^2(t+\frac{1}{9}) \geq 0$, $t \neq -\frac{1}{3}$ и $t \neq -\frac{1}{9}$

$18t(t-\frac{1}{3})(t+\frac{1}{6})(t+\frac{1}{3})^2(t+\frac{1}{9}) \geq 0$

$$\begin{cases} (\log_8 x - 0)(\log_8 x - \frac{1}{3})(\log_8 x + \frac{1}{6})(\log_8 x + \frac{1}{3})^2(\log_8 x + \frac{1}{9}) \geq 0 \\ \log_8 x \neq \log_8 8^{-\frac{1}{3}}; \quad \log_8 x \neq \log_8 8^{-\frac{1}{9}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (8-1)(x-1)(\log_8 x - \log_8 2)(\log_8 x - \log_8 \frac{1}{\sqrt{2}})(\log_8 x - \log_8 \frac{1}{2})^2(\log_8 x - \log_8 \frac{1}{\sqrt[3]{2}}) \geq 0 \\ x \neq \frac{1}{2}; \quad x \neq \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-1)\cancel{(8-1)}(x-2)\cancel{(8-1)}^4(x-\frac{1}{\sqrt{2}})(x-\frac{1}{2})^2(x-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}) \geq 0 \\ x \neq 0,5; \quad x \neq 2^{-\frac{1}{3}} \end{cases}$$



(2): $(x-0,5)(x-1)\underbrace{(x^2+x+1)}_{>0} \leq 0 \Rightarrow x \in [0,5; 1]$

После приведения в соответствие с ОДЗ получим:
$x \in (0,5; \frac{1}{\sqrt{2}}]$

Ответ: $x \in (0,5; \frac{1}{\sqrt{2}}]$

№3

Пусть имеем число $\overline{a_6a_5a_4a_3a_2a_1a_0}$. Найдём, какие 3 последовательные степени 10 нам подходят:

1) Если одна из степеней — 10^7, то остатком будет являться всё число $\overline{a_6a_5a_4a_3a_2a_1a_0} > 12\,414$

$\Rightarrow$ каждая степень 10, на кот. мы делим < 10.

2) Если степени 10^2, 10^3 и 10^4, то максимальная сумма остатков при делении на эти ст. будет:

$9999 + 999 + 99 = 10000 - 1 + 1000 - 1 + 100 - 1 =$

$= 11100 - 3 < 12\,414$

Значит такие 3 степени нам не подходят. Очевидно, что сумма ост. при дел. на 10, 10^2 и 10^3 также < 12414:

$999 + 99 + 9 = 1000 + 100 + 10 - 3 = 1110 - 3 < 12414$

Таким образом $\overline{a_6 a_5 a_4 a_3 a_2 a_1 a_0}$ могли делить либо на $10^3, 10^4, 10^5$, либо на $10^4, 10^5, 10^6$

а) Деление на $10^4, 10^5, 10^6$:

$A = \overline{a_6 a_5 a_4 a_3 a_2 a_1 a_0} = a_6 \cdot 10^6 + a_5 \cdot 10^5 + a_4 \cdot 10^4 + a_3 \cdot 10^3 + a_2 \cdot 10^2 +$
$+ 10a_1 + a_0$

При делении А на 10^6 получим: $r_1 = a_5 \cdot 10^5 + 10^4 a_4 + 10^3 a_3 + 10^2 a_2 +$
$+ 10a_1 + a_0$, r_1 - остаток при дел. на 10^6

При делении А на 10^5: $r_2 = 10^4 a_4 + 10^3 a_3 + 100a_2 + 10a_1 + a_0$,
r_2 - ост. при дел. на 10^5

При дел. А на 10^4: $r_3 = 10^3 a_3 + 100a_2 + 10a_1 + a_0$, r_3 - ост. при дел. на 10^4

Сумма ост. $r_1 + r_2 + r_3 = 10^5 a_5 + 2 \cdot 10^4 a_4 + (1000a_3 + 100a_2 + 10a_1 + a_0) 3 =$
$= 12\,414$

при $a_5 > 0$: $r_1 + r_2 + r_3 \geq 100\,000 > 12414 \Rightarrow a_5 = 0$

при $\begin{cases} a_4 > 0 \\ a_5 = 0 \end{cases}$: $r_1 + r_2 + r_3 \geq 20\,000 > 12\,414 \Rightarrow a_4 = 0$

Т.о. $3\,\overline{a_3 a_2 a_1 a_0} = 12\,414 = 3 \cdot 4128$

$\Rightarrow \overline{a_3 a_2 a_1 a_0} = 4128$

Число А может иметь вид: $\overline{a_6 004128}$ (*)

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

a_6 принимает любое зн. $\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$

$\Rightarrow$ 9 вариантов числа A.

б) Делим на 10^3, 10^4 и 10^5:

на 10^5: $r_4 = 10^4 a_4 + 10^3 a_3 + 100 a_2 + 10 a_1 + a_0$, r_4 - ост.

на 10^4: $r_5 = 1000 a_3 + 100 a_2 + 10 a_1 + a_0$, r_5 - ост.

на 10^3: $r_6 = 100 a_2 + 10 a_1 + a_0$

$r_4 + r_5 + r_6 = 10^4 a_4 + 2000 a_3 + 3(a_2 \cdot 100 + 10 a_1 + a_0) = 12414$

при $a_4 > 1$: $r_4 + r_5 + r_6 \geq 20000 > 12414$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} a_4 = 1 \\ a_4 = 0 \end{array}\right.$

$\boxed{a_4 = 1}$: $2000 a_3 + 3(a_2 \cdot 100 + 10 a_1 + a_0) = 2414$

при $a_3 > 1$: ~~нер~~ рав-во нарушается

при $a_3 = 0$: $3\,\overline{a_2 a_1 a_0} = 2414$

$2414 \not\vdots\, 3$ (по пр.) $\Rightarrow \varnothing$

Т.о. $a_3 = 1 \Rightarrow 3\,\overline{a_2 a_1 a_0} = 414 \Rightarrow \overline{a_2 a_1 a_0} = 128$

Значит число A может принимать вид: $\overline{a_6 a_5 11128}$ (**)

Есть 9 сп. выбрать a_6 и 10 сп. выбрать a_5 $\Rightarrow$ имеем ещё 90 вариантов

$\boxed{a_4 = 0}$: $2000 a_3 + 3(a_2 \cdot 100 + 10 a_1 + a_0) = 12414$

$12414 \,\vdots\, 3$, $3(100 a_2 + 10 a_1 + a_0) \,\vdots\, 3 \Rightarrow 2000 a_3 \,\vdots\, 3 \Rightarrow a_3 \,\vdots\, 3$

$\left[\begin{array}{l} a_3 = 0 \text{ - левая часть будет меньше } 12414 \\ a_3 = 3 \text{ - левая часть } < 10000 < 12414 \\ a_3 = 6 \\ a_3 = 9 \text{ - левая часть } > 12414 \end{array}\right.$

Т.о. $a_3=6$

$12\,000+3(\overline{a_2a_1a_0})=12\,414$

$3\cdot\overline{a_2a_1a_0}=414$

$\overline{a_2a_1a_0}=128$

А может иметь вид: $\overset{(***)}{\overline{a_6a_5 06128}}$. Есть 9 сп. выбрать a_6 и 10 сп. выбрать a_5 => всего $10\cdot 9=90$ вариантов числа

Заметим, что числа (*), (**) и (***) никогда не совпадают. Значит всего искомых чисел А:

$9+90+90=189$

Ответ: 189

№6.

$$\frac{12x-14}{2x-3}\le ax+b\le 2+\sqrt{\frac{51}{4}-7x-x^2} \qquad x\in\left[-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$$

$$\frac{12x-14}{2x-3}=\frac{6(2x-3)+4}{2x-3}=6+\frac{4}{2x-3}$$

Рассмотрим $f(x)=6+\frac{4}{2x-3}$; $g(x)=2+\sqrt{\frac{51}{4}-7x-x^2}$

и $S(x)=ax+b$. Построим графики этих ф-ий

$f(x)=6+\frac{4}{2x-3}=6+\frac{2}{x-1{,}5}$ – гипербола

$g(x)$: $y=2+\sqrt{\frac{51}{4}-7x-x^2}$

$$\begin{cases}(y-2)^2=\frac{51}{4}-7x-x^2\\ y\ge 2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\left(x^2+7x+\frac{49}{4}\right)+(y-2)^2=\frac{51}{4}-\frac{49}{4}=\frac{1}{2}\\ y\ge 2\end{cases}$$

$\begin{cases}\left(x+\frac{7}{2}\right)^2+(y-2)^2=\frac{1}{2}\\ y\ge 2\end{cases}$ – полуокр. с ц. $\left(-\frac{7}{2};2\right)$ и $R=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\left|x+\frac{7}{2}\right|\le\frac{1}{\sqrt{2}}$

$S(x)=ax+b$ – прямая

$\left(x+\frac{7}{2}\right)^2\le\frac{1}{2}$ $\qquad$ $\frac{51}{4}-7x-x^2\ge 0$ $\qquad$ $\frac{1}{2}-\left(x+\frac{7}{2}\right)^2\ge 0$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

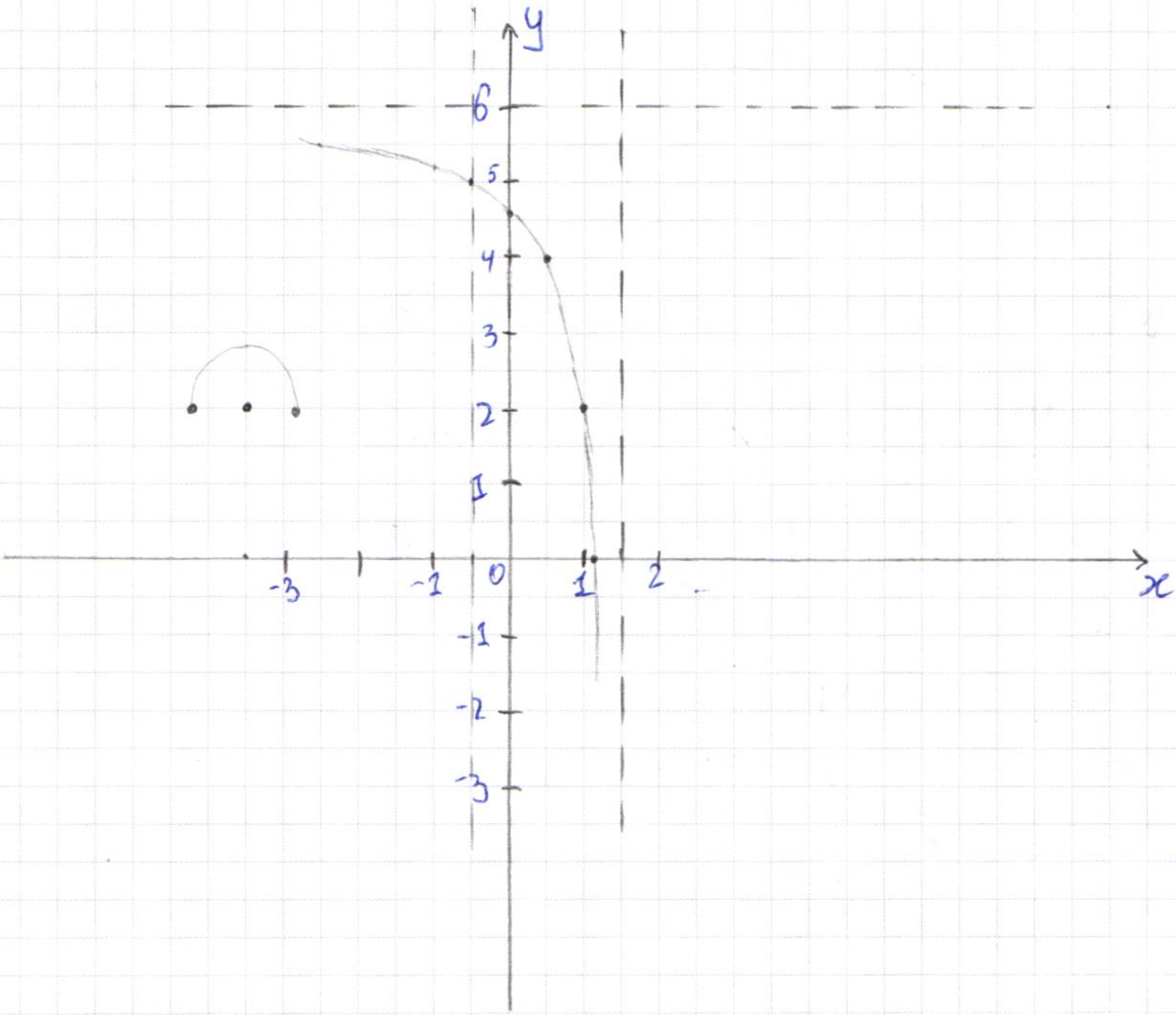
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

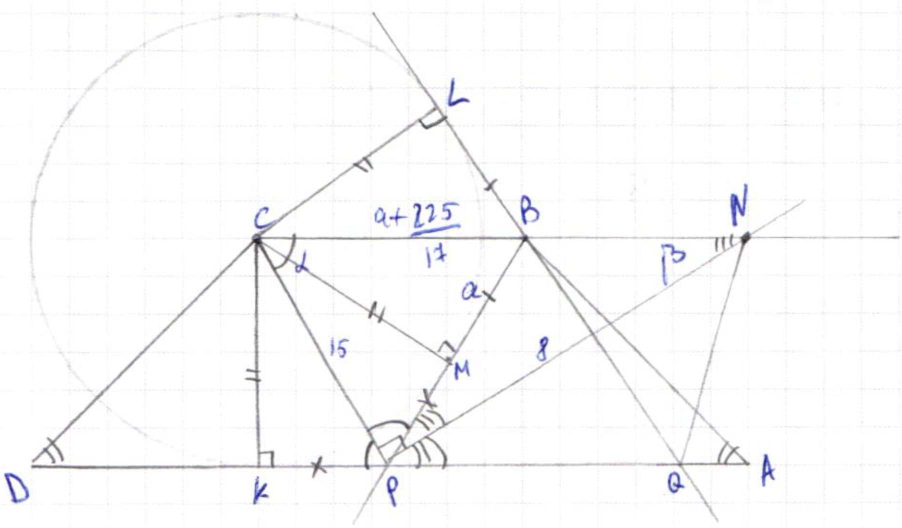


☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

№4.



$tg\,\alpha = tg\,\angle NCP = \frac{8}{15}$

$NC = 17$

$AP = \frac{17}{2}$

$\angle ADC = ?$

$\angle NQC = ?$

$S_{NCDQ} = ?$

Решение:

1) $\triangle NCP$:

$tg\,\alpha = \frac{NP}{CP} = \frac{8}{15} \Rightarrow NP = 8x;\ CP = 15x$

$PC^2 + PN^2 = CN^2 \Rightarrow 64x^2 + 225x^2 = 289$

$x = 1$

$\Rightarrow CP = 15;\ NP = 8$

2) $\triangle CKP$: $\angle CPK = \angle NCP$ (накр. леж.)

$\frac{CK}{KP} = tg\,\alpha = \frac{8}{15}$

$CK = 8y;\ KP = 15y$

$64y^2 + 225y^2 = 225$

$289y^2 = 225 \Rightarrow y = \frac{15}{17} \Rightarrow CK = \frac{120}{17};\ KP = \frac{225}{17}$

$\Rightarrow$ радиус окр. $= CK = \frac{120}{17} = r$

3) $\triangle CBP$: $S = \frac{1}{2} CB \cdot CP \cdot \sin\alpha = r \cdot BP$

$\triangle CKP = \triangle CMP$ (по катетам) $\Rightarrow \angle CPK = \angle CPM = \alpha$

$\Rightarrow \triangle PCB$ – равноб. (по пр.)

$\triangle CMB$: $\cancel{a^2} + \frac{2\cdot 225}{17}a + \frac{15^4}{289} = \frac{64\cdot 225}{289} + \cancel{a^2}$

$\frac{2\cdot \cancel{225}}{\cancel{17}} a = \frac{\cancel{15^2}(15^2 - 64)}{\cancel{289}\ 17} = 161 \Rightarrow a = \frac{161}{2}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\cos\beta = \frac{8}{17}$

$\cos 2\beta = 2\cos^2\beta - 1 = \frac{2\cdot 64}{289} - 1 = \frac{128-289}{289} = \frac{161}{289}$

$\triangle ABP$: $AB^2 = BP^2 + AP^2 - 2AP\cdot BP\cdot\cos 2\beta =$

$= \frac{289}{4} + \left(\frac{225}{17} + \frac{161}{2}\right)^2 - 2\cdot\frac{17}{2}\cdot\left(\frac{225}{17}+\frac{161}{2}\right)\cdot\frac{161}{289}$

$\angle CDA = \angle BAP$ (трап. вписана):

$\cos\angle BAP =$ ~~BP~~ $\frac{AB^2 + AP^2 - BP^2}{2AB\cdot AP} = A$ подставляем сюда знач. AB и находим $\cos\angle BAP$

$\angle BAP = \arccos A$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5.

$$\begin{cases} \sqrt{3}\cos(x+y) = 5\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right) \\ \sin(x+2y) + \sqrt{3}\cos(x+2y) = 8\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right) \end{cases}$$

$\sin x\cos 2y + \sin 2y\cos x + \sqrt{3}\cos x\cos 2y - \sqrt{3}\sin x\sin 2y = \frac{\overset{4}{\cancel{8}}\cdot\sqrt{3}}{\cancel{2}}\cos x - \frac{\overset{4}{\cancel{8}}}{\cancel{2}}\sin x$

$$\boxed{\begin{gathered} 2\left(\frac{1}{2}\sin(x+2y) + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(x+2y)\right) = 8\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right) \\ \cos\left(x+2y-\frac{\pi}{6}\right) - 4\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right) = 0 \end{gathered}}$$

№3.

$\_\ \_\ \_\ \underset{\vee}{\_}\ \underset{\vee}{\_}\ \underset{\vee}{\_}\ \underset{\vee}{\_}$

$99 + 999 + 9999$

$100 + 1000 + 10000 - 3 =$

$= 11100 - 3 < 12414$

$$\begin{array}{r|l} 12414 & 3 \\ \hline -12 & 4128 \\ 4 & \\ -3 & \\ 11 & \\ -9 & \\ 24 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 414 & 9 \\ \hline -36 & 46 \\ 54 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 414 & 3 \\ \hline -3 & 128 \\ 11 & \\ -9 & \\ 24 & \end{array}$$

$3, 4, 5$

не 8

~~1011414~~

10000000

456 ~~567~~

$10^6 a_6 + 10^5 a_5 + \underbrace{10^4 a_4 + 10^3 a_3 + 100a_2 + 10a_1 + a_0}$

456

$3\cdot(1000a_3 + 100a_2 + 10a_1 + a_0) + 2\cdot 10^4 a_4 + 10^5 a_5 = 10^4 + 2\cdot10^3 + 4\cdot10^2 +$
$+10 + 4$

06046

$a_5 = 0, \quad a_4 = 0$

$1000a_3 + 100a_2 + 10a_1 + a_0 = 4000 + 100 + 20 + 8$

$\underline{1\text{-}9}\ 004128 \qquad 10^4, 10^5, 10^6$

$\underline{1\text{-}9}\ \underset{0-9}{\underline{\vee}}\ 11046$

$345: 3(100a_2 + 10a_1 + a_0) + 2\cdot10^3 a_3 + 10^4 a_4 = 1\cdot10^4 + 2\cdot10^3 + 4\cdot10^2 + 1\cdot10 + 4$

$a_4 = 1 \quad a_3 = 1 \quad a_2 = 0 \quad a_1 = 4 \quad a_0 = 6$

$a_4 = 0$

$2 \cdot 10^3 a_3 + 3(100a_2 + 10a_1 + a_0) = 10^4 + 2000 + 400 + 10 + 4$

$(10^4 + 2 \cdot 10^3 - 2 \cdot 10^3 a_3) + (414 - 3\overline{a_2 a_1 a_0}) = 0$

$10^3(10 + 2 - 2a_3) + 3(46 - \overline{a_2 a_1 a_0}) = 0$

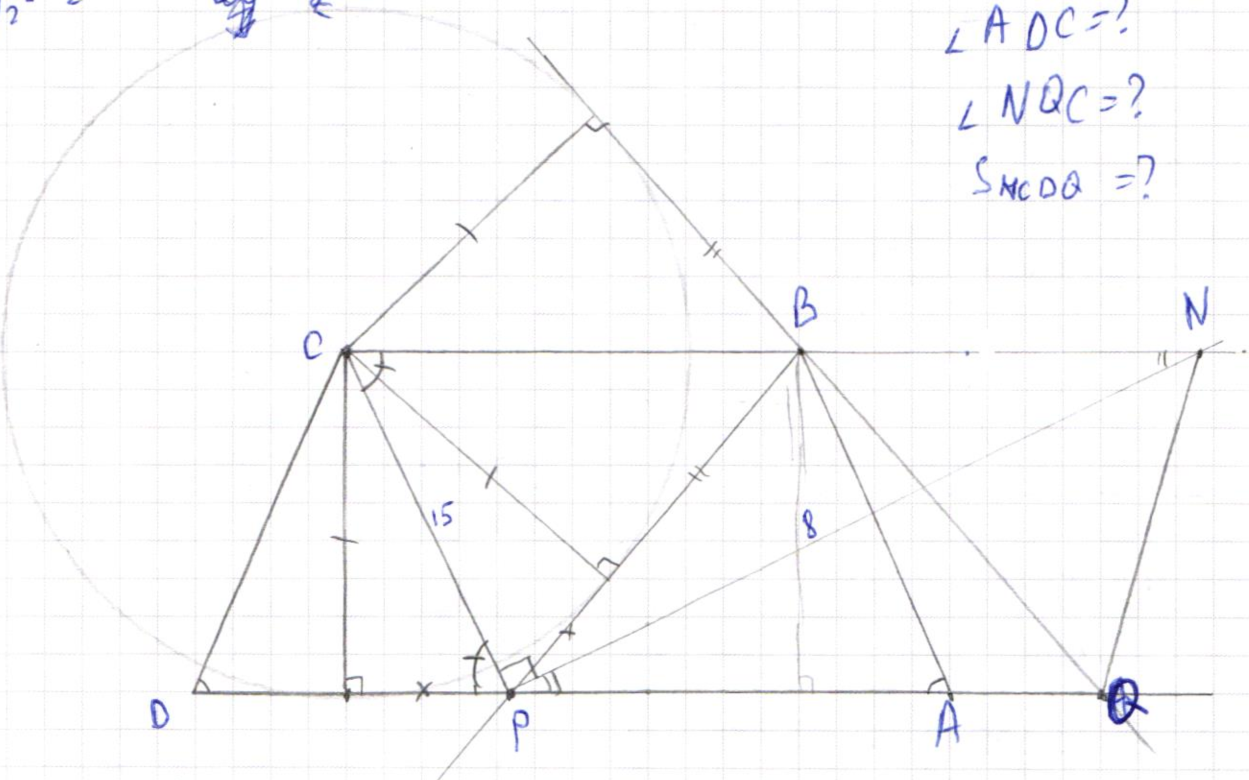
$\log_{2^4} 2^9 = \log_{2^4}(2^4 \cdot 2^5) = 1 + \log_{2^4} 2^5 = 1 + \frac{5}{4} = \frac{9}{4}$

$\log_{2^2} 2^{-3} = \cancel{\log}\ 2^{-\frac{3}{2}}$

$\angle ADC = ?$

$\angle NQC = ?$

$S_{NCDQ} = ?$



$\operatorname{tg} \angle NCP = \frac{8}{15}$

$\frac{PN}{CP} = \frac{8}{15}$

$AP = \frac{17}{2}$; $NC = 17$

$PN = 8x$; $CN = 15x$

$64x^2 + 225x^2 = 289 \Rightarrow 289 = 289x^2 \Rightarrow x = 1$

$CP = 15$; $NP = 8$

$x = -2 \quad 6 + \frac{14}{-7}$

$6 - \frac{14}{3} = \frac{4}{3}$

$\frac{12x - 14}{2x - 3} \le ax + b \le 2 + \sqrt{\frac{51}{4} - 7x - x^2}$

$x = \frac{3}{2}$

$\frac{14}{2x-3} = -6$

$\frac{12x - 4}{2x - 3} = \frac{6(2x-3) + 14}{2x - 3} = 6 + \frac{14}{2x - 3}$

$14 = -12x + 18$

$-4 = -12x$

$x = \frac{1}{3}$

$(y - 2)^2 = \frac{51}{4} - 7x - x^2 \Rightarrow (x^2 + 2 \cdot \frac{7}{2}x + \frac{49}{4}) + (y-2)^2 = \frac{1}{2}$

$(x + \frac{7}{2})^2 + (y - 2)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

$$\begin{cases} x - \sqrt[3]{64y^2 - x^2} = 124 & (1) \\ 8y - \sqrt[3]{64y^2 - x^2} = -92 & (2) \end{cases}$$

$(1)-(2)$: $x - 8y = 124 + 92 = 216$

$x = 8y + 216$

$8y - \sqrt[3]{(8y-x)(8y+x)} = -92$

$+$

$x - \sqrt[3]{(8y-x)(8y+x)} = 124$

$(x+8y) - 2\sqrt[3]{(8y-x)(8y+x)} = 32$

$u = x + 8y \qquad t = 8y - x = -216$

$u - 2\sqrt[3]{ut} = 32$

$u + 12\sqrt[3]{u} = 32$

$12\sqrt[3]{u} = 32 - u$

$v^3 + 12v - 32 = 0$

$$\begin{array}{l|l} v^3 + 12v - 32 & v-2 \\ -\;v^3 - 2v^2 & v^2 + 2v + 16 \\ \quad 2v^2 + 12v & \\ \;-\;2v^2 - 4v & \\ \qquad 16v - 32 & \\ \quad -\;16v - 32 & \end{array}$$

$(v-2)(v^2 + 2v + 16) = 0$

$D = 4 - 4 \cdot 16 < 0$

$\Rightarrow v = 2 \Rightarrow \sqrt[3]{u} = 2$

$u = 8$

$$\begin{cases} x + 8y = 8 \\ x - 8y = 216 \end{cases} \Rightarrow 2x = 224$$

$\underline{x = 112}$

$8y = 8 - 112 = -104$

$\underline{y = -13}$

№2.

$\sqrt{\log_{2x^3} x^9} \le \log_{2x} \frac{1}{x^3}$

$\log_{2x} x^{-3} = \log_{2x} 8 \cdot (2x)^{-3} =$

$= \log_{2x} 8 + (-3)$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

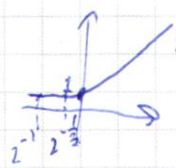
$\log_{2x^3} x^9 = \log_{2x^3} (8x^9)\cdot\frac{1}{8} = 3 + \log_{2x^3}\frac{1}{8} = 3 - \log_{2x^3} 8$

$(2x^3)^3 = 8\cdot x^9$

$\sqrt{3-\log_{2x^3}8} \le \log_{2x} 8 - 3$

$\begin{cases} 3-\log_{2x^3} 8 \le \log_{2x}^2 8 - 6\log_{2x} 8 + 9 \\ \log_{2x} 8 \ge 3 \end{cases}$

2^{-1} $\quad 2^{-\frac{1}{3}}$



$\left(\frac{1}{\log_8 2x}\right)^2 - 6\frac{1}{\log_8 2x} + \frac{1}{\log_8 2x^3} + 6 \ge 0$

$\left(\frac{1}{\log_8 x + \frac{1}{3}}\right)^2 - 6\frac{1}{\log_8 x + \frac{1}{3}} + \frac{1}{3\log_8 x + \frac{1}{3}} + 6 \ge 0$

$\sqrt{\log_{2^4} 2^9} \le \log_{2^2}\frac{1}{2^3}$

$\log_8 x = t$

$\left(\frac{1}{t+\frac{1}{3}}\right)^2 - \frac{6}{t+\frac{1}{3}} + \frac{1}{3t+\frac{1}{3}} + 6 \ge 0$

$\frac{3t+\frac{1}{3} - 6(t+\frac{1}{3})(3t+\frac{1}{3}) + t^2 + \frac{2}{3}t + \frac{1}{9} + 6(t^2+\frac{2}{3}t+\frac{1}{9})(3t+\frac{1}{3})}{(t+\frac{1}{3})^2(3t+\frac{1}{3})} \ge 0$

$-3t^2 \quad -t$

$\frac{\cancel{3t} + \cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{18t^2} - 2t - \cancel{6t} - \frac{2}{3} + \cancel{t^2} + \frac{2}{3}t + \cancel{\frac{1}{9}} + 18t^3 + \cancel{12t^2} + 2t^2 + 12t^2 + \frac{4}{3}t + \frac{2}{9}}{(t+\frac{1}{3})^2(3t+\frac{1}{3})} \ge 0$

$(18t^3 - 3t^2 - 3t)(t+\frac{1}{3})^2(3t+\frac{1}{3}) \ge 0$

$t(18t^2 - 3t - 1)(t+\frac{1}{3})^2(t+\frac{1}{9}) \ge 0$

$18 \times 12 = 36 + 18 = 216$

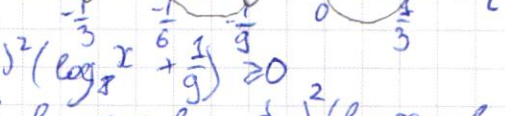
~~$D = 25 + 12\cdot 18 = 241$~~

~~$D = 25 + 4\cdot 18 =$~~

$\sqrt[6]{8} = (\sqrt[3]{8})^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$

$9 + 72 = 81 \qquad t = \frac{3+9}{36} = \frac{1}{3}; \quad t = \frac{3-9}{36} = -\frac{1}{6}$

$t(t-\frac{1}{3})(t+\frac{1}{6})(t+\frac{1}{3})^2(t+\frac{1}{9}) \ge 0$

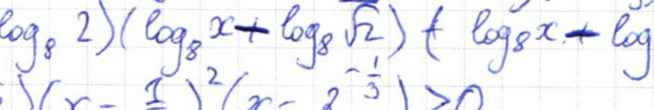


$\log_8 x(\log_8 x - \frac{1}{3})(\log_8 x + \frac{1}{6})(\log_8 x + \frac{1}{3})^2(\log_8 x + \frac{1}{9}) \ge 0$

$(8-1)(x-1)(\log_8 x - \log_8 2)(\log_8 x + \log_8 \sqrt{2})(\log_8 x + \log_8 \frac{1}{2})^2(\log_8 x - \log_8 \frac{1}{\sqrt[3]{2}}) \ge 0$

$(x-1)(x-2)(x-\sqrt{2})(x-\frac{1}{2})^2(x-2^{-\frac{1}{3}}) \ge 0$

~~$x \in (-\infty, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 1] \cup [\frac{1}{\sqrt[3]{2}}; \sqrt{2}] \cup [2, +\infty)$~~ $\cup \frac{1}{2}$



☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле) Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$456:\ 10^5 a_5 + 10^4 a_4 + 3(1000a_3 + 100a_2 + 10a_1 + a_0) =$

$= 10^4 + 2\cdot10^3 + 4\cdot10^2 + 10 + 4$

$a_5 = 0$; $a_4 = 0$

$3\,\overline{a_3a_2a_1a_0} = 3\cdot4128$

$\overline{a_3a_2a_1a_0} = 4128$ $\qquad$ $\underline{1\text{-}9}$ 004128 − 9в

$345:\ 3(100a_2 + 10a_1 + a_0) + 2\cdot10^3 a_3 + 10^4 a_4 = 10^4 + 2\cdot10^3 + 4\cdot10^2 + 10 + 4$

$\underline{a_4 = 1}$: $\cancel{2\cdot10^3 a}$ $a_3 = 1$

$414 = 3\,\overline{a_2a_1a_0}$ $\qquad$ $\underline{1\text{-}9}$ $\underline{0\text{-}9}$ 1 1 1 28

$9\cdot10 = 90$ в.

$\underline{a_4 = 0}$: $\overbrace{2\cdot10^3 a_3}^{\vdots 3} + \overbrace{3(100a_2 + 10a_1 + a_0)}^{\vdots 3} = \underbrace{10^4 + 2\cdot10^3 + 4\cdot10^2 + 10 + 4}_{\vdots 3}$

$999\cdot3 = (1000-1)\cdot3 = 3000 - 3 = 2997$

$a_3 \vdots 3$ $\qquad a_3 = 3$; $\underline{a_3 = 6}$; $a_3 = 9$

$\underline{a_3 = 6}$: $414 = 3\,\overline{a_2a_1a_0} \Rightarrow \overline{a_2a_1a_0} = 128$

$\underline{1\text{-}9}$ $\underline{0\text{-}9}$ 06128 − 90в

$225 - 64 = 161$

189 в.

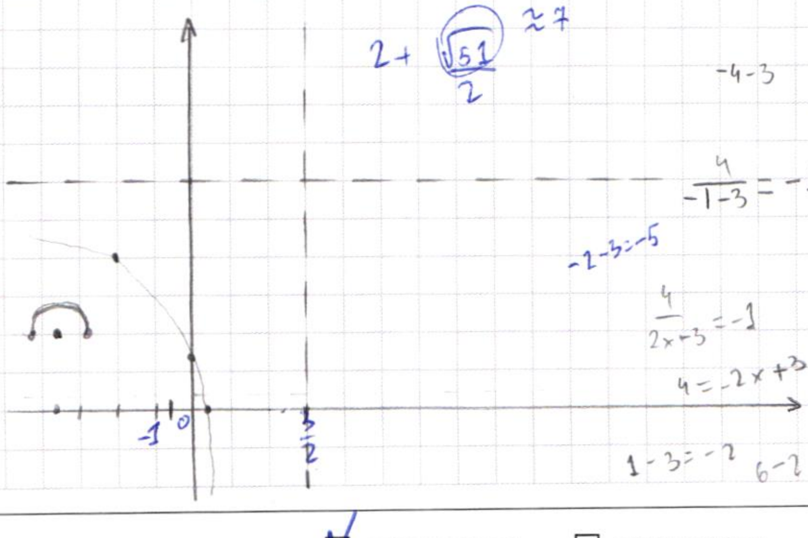
0

$2 + \frac{\sqrt{51}}{2} \approx 7$

$\frac{10}{14} = \frac{5}{7}$

−4−3

$6 - \frac{4}{3} = \frac{14}{3} = 4$



$\frac{4}{-1-3} = -1+6$

$-2-3=-5$

$\frac{4}{2x-3} = -1$

$4 = -2x+3$

$1-3=-2$ $\quad 6-2$

$\frac{4}{2x-3} = -6$

$4 = -12x + 18$

$-12x = -14$

$x = \frac{7}{6}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)