МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{8}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases}3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2},\\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4.\end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x\geqslant |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{5}{2}$, $BD=\frac{13}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $3\leqslant x\leqslant 27$, $3\leqslant y\leqslant 27$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{4x-3}{2x-2}\geqslant ax+b\geqslant 8x^2-34x+30$$

выполнено для всех x на промежутке $(1;3]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $PQRS$, вершина P которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра PQ. Известно, что $QR=2$, $QS=1$, $PS=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра RS. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1 Напомним, что $\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$, тогда второе выражение можно записать как:

$2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta=-8/17$, подставляя значение $\sin(2\alpha+2\beta)$, получаем: $2\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right)\cdot\cos 2\beta=-\frac{8}{17} \Leftrightarrow \cos 2\beta=\frac{4}{\sqrt{17}}$

Значит $\sin 2\beta=\pm\frac{1}{\sqrt{17}}$. Раскрываем первое выражение, как синус суммы и подставляем значения:

$\frac{4}{\sqrt{17}}\sin 2\alpha \pm \frac{1}{\sqrt{17}}\cos 2\alpha=-\frac{1}{\sqrt{17}} \Leftrightarrow 4\sin 2\alpha \pm \cos 2\alpha=-1$ *

$$* \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 8\sin\alpha\cos\alpha+2\cos^2\alpha-1=-1 \\ 8\sin\alpha\cos\alpha-2\cos^2\alpha+1=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} 4\sin\alpha+\cos\alpha=0 \\ \cos\alpha=0 \end{array}\right. \\ 4\sin\alpha\cos\alpha+\sin^2\alpha+\cos^2\alpha- \\ \quad -\cos^2\alpha=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} tg\alpha=-1/4 \\ tg\alpha\in\varnothing \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} \sin\alpha=0 \\ 4\cos\alpha+\sin\alpha=0 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} tg\alpha=-1/4 \\ tg\alpha=0 \\ tg\alpha=-4 \end{array}\right.$$

Ответ: $-1/4;\ 0;\ -4$

— — — — — — — — — — — —

№2

$$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2} & (1) \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 & (2) \end{cases}$$

$(1) \Leftrightarrow (3y-2)-2(x-1)=\sqrt{(3y-2)(x-1)}$

$(2) \Leftrightarrow (x-1)^2+(y-2/3)^2=25/9$ Пусть $y-2/3=b$, $x-1=a$,

тогда система запишется, как $\begin{cases} 3b-2a=\sqrt{3ba} \\ a^2+b^2=25/9 \end{cases}$.

Чтобы система имела решения: $\begin{cases} 3b-2a\geq 0 \\ 3ba\geq 0 \end{cases}$

Возведем (1) в квадрат, тогда $(1) \Leftrightarrow 9b^2-12ba+4a^2=3ba$ * $\cancel{\Leftrightarrow}$

~~$\Leftrightarrow 5b^2+4(a^2+b^2)=15ba$, подставляя (2), получаем:~~

~~$5b^2+\frac{25\cdot 4}{9}=15ba \Leftrightarrow b^2-3ba+\frac{20}{9}=0$~~

$* \Leftrightarrow 9b^2-15ba+4a^2=0 \Leftrightarrow (b-1/3\,a)(b-4/3\,a)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3b=a \\ 3b=4a \end{array}\right.$ $\cancel{\Leftrightarrow}$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ПОДСТАВЛЯЯ ЗНАЧЕНИЯ ~~а, в получаем:~~ в (2)

получаем $\left[\begin{array}{l} 9b^2+b^2=25/9 \\ \frac{9}{16}b^2+b^2=25/9 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=\sqrt{10}/6 \\ b=4/3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3b=\sqrt{10}/2 \\ 3b=4 \end{array}\right.$

ПОДСТАВЛЯЯ ЗНАЧЕНИЕ в получаем: $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases} \\ \begin{cases} y=\frac{\sqrt{10}+4}{6} \\ x=\frac{\sqrt{10}+2}{2} \end{cases} \end{array}\right.$

ИЗ (1) получаем ограничения: $\begin{cases} 3b\geqslant 2a \\ b\geqslant 0 \\ a\geqslant 0 \end{cases}$

Данным ограничениям соответ~~ствует~~ствует только пара (2;2).

ОТВЕТ: (2;2)

№5 $f(x/y)=f(x)+f(1/y)$ *

т. к. $\begin{cases} f(x)=f(a)+f(1/a) \\ f(1)=[1/4]=0 \end{cases}$, то $f(a)=-f(1/a)$, тогда $* \Leftrightarrow f(x)-f(y)$

Пользуясь предоставленными формулами, получаем, что:

$f(1)=0$; $f(2)=0$; $f(3)=0$; $f(4)=0$; $f(5)=1$; $f(6)=0$; $f(7)=1$; $f(8)=0$; $f(9)=0$; $f(10)=1$; $f(11)=2$;

$f(12)=0$; $f(13)=3$; $f(14)=1$; $f(15)=1$; $f(16)=0$; $f(17)=4$; $f(18)=0$; $f(19)=4$;

$f(20)=1$; $f(21)=1$; $f(22)=2$; $f(23)=5$; $f(24)=0$; $f(25)=2$; $f(26)=3$; $f(27)=0$.

т.к. $f(x)-f(y)<0$, то нам подходят пары: $f(x)=0$, $f(y)\in[1;5]$;

$f(x)=1$, $f(y)\in[2;5]$; $f(x)=2$, $f(y)\in[3;5]$; $f(x)=3$, $f(y)\in[4;5]$;

$f(x)=4$, $f(y)=5$. всего $f(a)=0$ - 10 шт, $f(a)=1$ - 7шт, $f(a)=2$ -

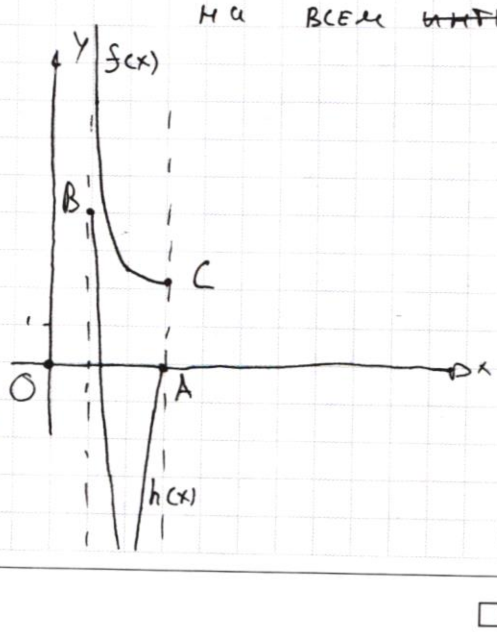
- 3шт, $f(a)=3$ - 2шт, $f(a)=4$ - 2шт, $f(a)=5$ - 1шт.

тогда общее число подходящих пар: $10\cdot(7+3+2+2+1)+$

$+7(3+2+2+1)+3(2+2+1)+2(2+1)+2\cdot 1=229$ ОТВЕТ: 229

№6 $\frac{4x-3}{2x-2}=f(x)$ $ax+b=g(x)$ $8x^2-34x+30=h(x)$ $f(x)\geqslant g(x)\geqslant h(x)$

на всем ~~интервале~~ промежутке (1;3]. Построим граффики



ф-ций на промежутке (1;3]. g(x) - задает прямую, чтобы условие задачи выполнялось, нужно, чтобы она должна лежать под граффиком f(x) и над граффиком h(x).

A(3;0), B(1;4), C(3;9/4)

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Пусть $g(x)$ проходить через A и B, тогда уравнение прямой имеет следующий вид: $g(x) = -2x+6$. Заметим, что данная прямая кассается граффика $f(x)$ в точке $(3/2; 3)$. Нетрудно понять, что при изменении коэффициэнтов $g(x)$, прямая будет пересекать (а не касаться) граффики $f(x)$ и/или $h(x)$ и условие не будет выполнено. Ответ: $a=-2$, $b=6$

№3 $3^{\log_4(x^2+6x)}+6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2 \Leftrightarrow x^2+6x+3^{\log_4(x^2+6x)} \geq |x^2+6x|^{\log_4 5}$

Заметим, что чтобы $\log_4(x^2+6x)$ была определена, нужно, чтобы $x^2+6x>0$, тогда $|x^2+6x|^{\log_4 5} = (x^2+6x)^{\log_4 5}$

Пусть $t = x^2+6x$, тогда выражение примет вид:

$t+3^{\log_4 t} \geq t^{\log_4 5}$

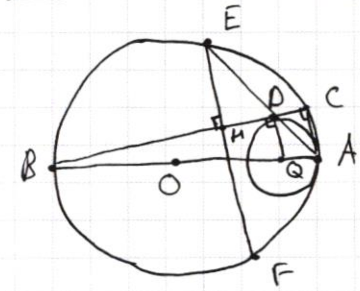
☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

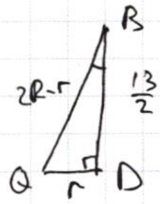
(Нумеровать только чистовики)

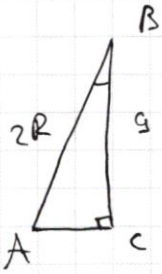
№4

Пусть O – центр Ω, Q – центр ω. Заметим, что они лежат на одной прямой AB. Рассмотрим $\triangle QDB$ и $\triangle ACB$



($\angle ACB = \pi/2$, т.к. опирается на диаметр) ($\angle QDB = \pi/2$, т.к. QD – радиус, проведенный к касательной)





Пусть r – радиус ω, R – радиус Ω. $BQ = 2R - r$

$$\cos\angle ABD = \frac{9}{2R} = \frac{13/2}{2R-r} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 18R - 9r = 13R \Leftrightarrow R = \frac{9}{5}r$$

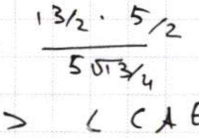
По теореме Пифагора для $\triangle QBD$ получаем, что $4R^2 - 4Rr + r^2 = r^2 + \frac{169}{4} \Leftrightarrow R^2 - Rr = \frac{169}{16}$. Подставляя $R = 9/5\, r$, получаем $r = \frac{65}{24}$, $R = \frac{39}{8}$.

Заметим, что $AC = \frac{15}{4}$ (по теореме Пифагора).

Пусть $\angle BQD = 2\alpha$, тогда $\angle BAD = \alpha$ (вписанный и центральный опир. на одну дугу). $\angle BAC = \angle BQD$ (т.к. $\angle BCA = \angle BDQ = \pi/2$, а $\angle ABC$ – общий), тогда $\angle DAC = \angle BAC - \angle BAD = 2\alpha - \alpha = \alpha$.

$$\cos\angle BAC = \frac{AC}{AB} = \frac{15}{39}, \quad \cos\angle BAC = \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

$\cos\alpha = \sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}} = \frac{3}{\sqrt{13}}$. Рассмотрим $\triangle DCA$, т.к. $\angle C = \pi/2$, то $AD = AC/\cos\angle A = \frac{15/4}{3/\sqrt{13}} = \frac{5}{4}\sqrt{13}$. Заметим, что $AD \cdot DE = BD \cdot DC$ (пересекающиеся хорды), значит $DE = \frac{BD \cdot DC}{AD} = \frac{13/2 \cdot 5/2}{5\sqrt{13}/4} = \sqrt{13}$. Т.к. $EF \perp BC$ и $AC \perp BC$, то $EF \parallel AC \Rightarrow$ $\Rightarrow \angle CAE = \angle FEA = \alpha$. Пусть H – точка пересечения BC и FE. Рассмотрим $\triangle HED$ ($\angle H = \pi/2$ по условию)



$EH = ED \cdot \cos\alpha = \sqrt{13} \cdot \frac{3}{\sqrt{13}} = 3$, $HD = 2$ (по теореме Пифагора). Заметим, что

$$EH \cdot HF = BH \cdot HC \Leftrightarrow HF = \frac{BH \cdot HC}{EH} = \frac{(\frac{13}{2}-2)(\frac{5}{2}+2)}{3} = \frac{27}{4}$$

$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \frac{2}{\sqrt{13}}$. $S_{FEA} = FE \cdot EA \cdot \sin\angle FEA \cdot \frac{1}{2} =$

$$= (HF + EH) \cdot (ED + DA)/\sqrt{13} = \frac{39}{4} \cdot \frac{9}{4}\sqrt{13} \cdot \frac{1}{\sqrt{13}} = \frac{351}{16}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

По теореме косинусов для $\triangle FEA$: $FA^2 = FE^2 + AE^2 - 2 FE \cdot AE \cos\alpha$

Подставляя значения, получаем $FA^2 = \frac{9 \cdot 13}{4} \Leftrightarrow FA = \frac{3}{2}\sqrt{13}$

По теореме косинусов для $\triangle FEA$: $EA^2 = FE^2 + FA^2 - 2 \cdot FE \cdot FA \cdot \cos\angle F$

$$\frac{9^2 \cdot 13}{16} = \frac{9 \cdot 13^2}{16} + \frac{9 \cdot 13}{4} - 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \sqrt{13} \cdot \frac{3 \cdot 13}{4} \cdot \cos\angle F$$

$\Updownarrow$

$-2 = \sqrt{13} \cos\angle F \Leftrightarrow \cos\angle F = \frac{2}{\sqrt{13}}$ $\quad \angle AFE = \arccos\frac{2}{\sqrt{13}}$

Ответ: $R = \frac{39}{8}$, $r = \frac{65}{24}$, $\angle AFE = \arccos\frac{2}{\sqrt{13}}$, $S_{AEF} = \frac{351}{16}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2} \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \end{cases}$$

$x(3y-2)-(3y-2)=(x-1)(3y-2)$

$3y-2x=3y-2-2x+2=(3y-2)-2(x-1)$

6 −

$3x^2-6x+3-3=3(x-1)^2-3$

$3y^2-4y=3(y^2-\frac{4}{3}y+\frac{4}{9}-\frac{4}{9})=3(y-\frac{2}{3})^2-\frac{4}{3}$

$3(x-1)^2-\cancel{3}+3(y-\frac{2}{3})^2-\cancel{\frac{4}{3}}=\cancel{4}$ $\quad \frac{21+4}{3}=\frac{25}{3}$

$(x-2)$

$\frac{\sqrt{10}+4}{2}-(\sqrt{10}+2)=$

$(x-1)^2+(y-\frac{2}{3})^2=\frac{25}{9}$

$\sqrt{10}+4-2\sqrt{10}-4$

~~$a=(3y-2)$~~

~~$b=(x-1)$~~

$a=(x-1)$

$3b-2a=\sqrt{3ba}$

$3b\geq\frac{3}{2}b$

$3b=3y-2$

225
144
81

$(x-1$

$x-1$

$a=\frac{3}{4}b$

$9b^2-12ba+4a=3bb$

$3y\geq 2x \quad x-1=\frac{3}{4}(3y-2)$

$9b^2-15ba+4a=0$

$6-4$

$\cancel{b}\geq$ $\quad 2-1=4=$

$3\cdot 4-\cancel{4}-\cancel{6}$

$6\cdot 2 \quad (2+2)$

$\sqrt{10}+4\geq\sqrt{10}+2$

$9t^2-15t+4=0$

$t=\frac{15\pm\sqrt{225-144}}{18}=\frac{\cancel{15}\pm\cancel{9}}{\cancel{18}}=\begin{cases} 6/18=1/3 \\ 24/18=12/9=4/3 \end{cases}$

$3b\geq 6b$

$a=3b$

$\frac{b}{a}=1/3;\ 4/3$

$4\cdot(-1)=$

$\left[\begin{array}{l} 3b=a \\ 3b=4a \end{array}\right.$

$3y-2=x-1$

$3y-2=4x-4$

$6-2=-4$

$a=\frac{3}{4}b \quad \frac{9}{16}b^2$

$a^2+b^2=\frac{25}{9}$

$9b^2+b^2=\frac{25}{9}$

$b^2=\frac{25}{9\cdot 10}$

$b=\frac{5\sqrt{10}}{3\cdot 10_2}=\frac{\sqrt{10}}{6}$

$b=\frac{\sqrt{10}}{6}$

$b^2=\frac{25}{9\cdot 10}=\frac{\cancel{25}\cdot 10}{9\cdot\cancel{100}_4}$

$\frac{25}{16}b^2=\frac{25}{9}$

$3y-2=\sqrt{10}/2$

$3y=\frac{\sqrt{10}+4}{2}$

$b^2=\frac{16}{9} \quad b=\frac{4}{3}$

$3y-2=4$

$3y=6$

$\boxed{y=2}$

$\boxed{y=\frac{\sqrt{10}+4}{6}}$

$x-1=\frac{\sqrt{10}}{2}$

$a=\frac{\sqrt{10}}{2}$

$x=\frac{\sqrt{10}+2}{2}$

$x=2$

$a=\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{3}=1$

$x-1=1$

$x=2$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

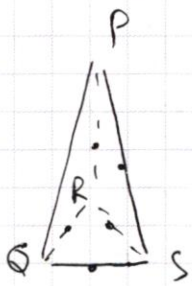
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

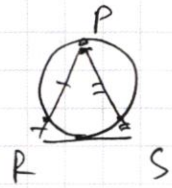
ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$QR=2,\ QS=1\quad PS=\sqrt{5}\quad RS-?\quad R_{min\ QRSP}-?$





$-4x^2+12x+4\cancel{x}-\cancel{12}=\cancel{4x-3}$
-9

$4x^2-12x+9=0$

$(2x-3)^2=0$

$\cancel{9}B^2+4a^2=15aB$

$\cancel{8B^2}\quad 9B^2-\cancel{2}\cdot3\cdot2aB+4a^2+2\cdot3\cdot2aB=15aB$

$(3B-2a)^2=3aB\qquad (x-3/2)^2=0$

$5B^2+5\cdot\frac{25}{9}=15aB$

$x=\frac{3}{2}$

$B^2+\frac{25}{9}+3aB\qquad y=-3+6=3$

$B^2-3aB+25/9=0$

$B=\frac{3a\pm\sqrt{9a^2+100/9}}{2}=\frac{3a\pm\frac{\sqrt{81a^2+100}}{3}}{2}$

$y=\frac{4x-3}{2x-2}$

$a,B\geq0$

$-2x+6=\frac{4x-3}{2x-2}$

$y-2/3=\frac{9x-9\ \pm\sqrt{81(x-1)^2+100}}{6}$

$3B\geq2a$

$y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$

т.к. $3a<\sqrt{9a^2+\frac{100}{9}}$, то $B=\frac{3a+\sqrt{9a^2+100/9}}{2}$

$y=-2x+6$

$y-\frac{2}{3}=\frac{3x-3+\sqrt{9(x-1)^2+100/9}}{2}$

$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x\geq|x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2$

$B^2-3Ba+\frac{20}{9}=0$

$B=\frac{3\cancel{a}\pm\sqrt{9a^2-80/9}}{2}=$

$3^{\log_4 t}+t\geq t^{\log_4 5}$

$(1;4):\ ax+B$

$(3;0):\ ax+B$

$3^{\log_4 t}\geq t^{\log_4 5}-t$

$a+B=4$

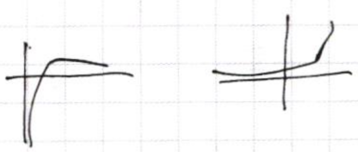
$3a+B=0$

$(1;3]$

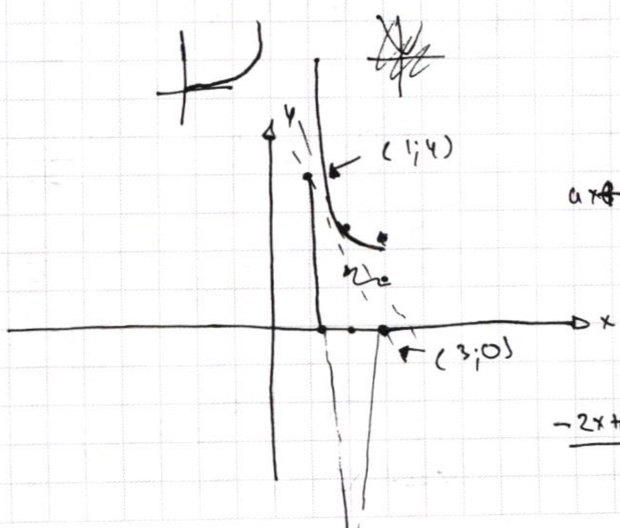
$2a=-4$

$a=-2$

$B=6$



$\frac{4x-3}{2x-2}$



$\frac{12-3}{6-2}=\frac{9}{4}$

$1{,}1\quad\frac{4{,}4-3}{2{,}2-2}=\frac{1{,}4}{0{,}2}=\cancel{\frac{14}{4}}$

$=\frac{7}{1}$

$\frac{8-3}{4-2}=\frac{5}{2}$

$a\cancel{x}B$

$8\cdot9-34\cdot3+30$

$8-34+30$

$\cancel{72}\ -\cancel{80}-12+\cancel{30}$
12

$x_B=\frac{-B}{2a}=\frac{34}{16}=\frac{17}{8}$

$\frac{17}{4}-3=\frac{5}{4}$

$-2x+6$

$8(x-3)(x-5/4)=8\left(\frac{17-24}{8}\right)\cdot\left(\frac{17-10}{8}\right)=$

$=-7\cdot\frac{7}{8}=-49/8$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$R(R-r)=\frac{169}{16}$ $\frac{9}{5}r\left(\frac{9-5}{5}r\right)=\frac{169}{16}$ $r=\frac{13\cdot5}{4\cdot6}=\frac{65}{24}\cdot\frac{9}{5}=$

$\frac{9}{5}\cdot r\cdot\frac{4}{5}r=\frac{169}{16}$ $r^2=\frac{13^2}{4^2}\cdot\frac{5^2}{36}=$

$\frac{13\cdot5}{4\cdot6}\cdot\frac{9}{5}=\frac{39}{8}$

$\frac{5}{4}\sqrt{13}$ D A C $\frac{15}{4}$ $\frac{13\cdot5}{4\cdot6}\cdot\frac{9}{5}=$ $\frac{9}{20}=\frac{13/2}{20}$

$R(R-r)=\frac{9}{5}r\cdot\frac{4}{5}r=\frac{13^2}{4^2}$

$\frac{39}{4}$ $=2R$ 9 $\frac{15}{4}$ $39^2=1600-80+1=1521$ $r^2=\frac{13^2\cdot5^2}{4^2\cdot6^2}$

$900+81+540$

$\frac{1521-81\cdot16}{16}$ 810 81 405 1296 1521 1296 225

$\cos\alpha=\frac{15/4}{39/4}=\frac{15}{39}$

$\cos2\alpha=2\cos^2\alpha-1$

$AD=AC/\cos\alpha=\frac{15/4\cdot39}{15}=\frac{39}{4}$ $\frac{9-13-4}{4}=-2$ $\cos\alpha=\sqrt{\frac{1+\cos2\alpha}{2}}=\sqrt{\frac{1+\frac{15}{39}}{2}}=$

$\frac{9}{16}=\frac{13}{16}+\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{13}}{2}\cos F$

E $=\sqrt{\frac{54\cdot2}{39\cdot2}}=3\sqrt{\frac{3}{39}}=3\sqrt{\frac{1}{13}}=\frac{3}{\sqrt{13}}$

$AD=\frac{15/4}{\sqrt{54}}\sqrt{39}\cdot2$ $\frac{15\cdot\sqrt{13}}{4\cdot3}=\frac{5}{4}\sqrt{13}$

3 $\sqrt{13}$ H 2 D E 2 $\sqrt{13}$ H 3 D

$AD\cdot DE=BD\cdot DC=\frac{5}{2}\cdot\frac{13}{2}$

$DE=\frac{BD\cdot DC}{AD}=\frac{5\cdot13\cdot4}{2\cdot2\cdot5\sqrt{13}}=\sqrt{13}$

$EH\cdot HF=BH\cdot HC \Leftrightarrow 2HF=\left(\frac{13}{2}-3\right)\left(\frac{5}{2}+3\right)=2\cdot\frac{11}{2}$

$\frac{9\cdot13}{16}=\frac{9\cdot13}{4}+\frac{13\cdot9}{16}+2\cdot\frac{13\cdot3}{4}\cdot\frac{3\sqrt{13}}{4}\cdot\cos\varphi$ $HF=11/2$ $\frac{\frac{9}{2}\cdot\frac{9}{2}}{3}=\frac{27}{4}$

$40\cdot9=360-9=351$

$\frac{9}{16}=\frac{4}{16}+\frac{13}{16}-\frac{\sqrt{13}}{4}\cos\varphi$ $S=\frac{351}{16}$ $FA=\frac{3}{2}\sqrt{13}$ $\beta-?$ $\frac{3}{\sqrt{13}}=\frac{2}{\sqrt{13}}$

$\frac{9-17}{16}=-\frac{\sqrt{13}}{4}$ E $\frac{27}{4}+3=$

$\frac{3}{4}9$ α $\frac{9}{4}\sqrt{13}$ A $\sqrt{13}+\frac{5}{4}\sqrt{13}=\frac{9}{4}\sqrt{13}$ $12+27=$

$FA^2=EA^2+EF^2-2EF\cdot EA\cos\alpha$ $=\frac{39}{4}$

$-\frac{8}{4}$ β F $\cos\varphi=\frac{2}{\sqrt{13}}$ $\left(\frac{39}{4}\right)^2=\frac{1521}{16}+\frac{81}{16}-$ $\left(\frac{39}{4}\right)^2=\frac{1521}{16}$ $\frac{9\cdot13(11-9)}{8\cdot4}=$

$-2=-\sqrt{13}\cos\varphi$

$2\cdot\frac{9\cdot3\cdot13\cdot\sqrt{13}}{4\cdot4\cdot2}\cdot\frac{3}{\sqrt{13}}=$ $\frac{13^2\cdot3^2}{16}+\frac{81\cdot13}{16}$ $\left(\frac{9}{4}\sqrt{13}\right)^2=\frac{81\cdot13}{16}$ $=\frac{130-13}{4}=$

$\boxed{\frac{117}{4}}=$

$=\frac{9\cdot9\cdot13}{8}$ $\frac{13\cdot9\cdot13}{16}+9\cdot9\cdot13$ $\frac{9\cdot13}{16}\cdot\frac{22}{8}$

$\frac{9\cdot13\cdot11}{8}-9\cdot9\cdot13=\frac{9\cdot13}{16}(13+9)=\frac{9\cdot13\cdot11}{8}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$ $tg\alpha - ?$

$\sin(2\alpha+2\beta+2\beta) = \sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta + \cos(2\alpha+2\beta)\sin 2\beta$

$b-2a=\sqrt{ab}$ $a^2+b^2=$ $(a-b)$

$x-1=a$ $3(y-2/3)=3b$ $(x-1)=a$ $(3y-2)=b$

$\cos(2\alpha+2\beta) = \pm\sqrt{1-\frac{1}{17}} = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}$

$3b-2a=\sqrt{3ab}$ $9b^2+4a^2-12ab=3ab$ $a^2+b^2=25/9$

$$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2} \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \end{cases}$$

$3y \geq 2x$ $3xy-2x-3y \geq -2$

$9y^2-12xy+4x^2 = 3xy-2x-3y+2$

$3x^2-6x = 3(x^2-2x+1-1) = 3(x-1)^2-3$

$9y^2+3y = $ $9y^2+3y+\frac{1}{4}-\frac{1}{4} = $

$3y^2-4y = 3(y^2-\frac{4}{3}y+\frac{4}{9}-\frac{4}{9}) = 3(y-\frac{2}{3})^2-\frac{4}{3}$

$= (3y+1/2)^2-1/4$

$3(x-1)^2-3+3(y-2/3)^2-4/3=4$

$4x^2+2x+1/4-1/4 = (2x+1/2)-1/4$

$3(x-1)^2+3(y-2/3)^2 = \frac{25}{3}$

$(3y+1/2)^2+(2x+1/2)^2-1/2 = 12xy+3xy+2$

$(x-1)^2+(y-2/3)^2 = 25/9$

$(3y+1/2)^2+(2x+1/2)^2 = 15xy+\frac{5}{2}$

$3y-2x=\sqrt{3y(x-1)-2(x-2)}$

$(3y-2x)^2 = (x-1)(3y-2x)+1$ $\frac{(3y-2x)^2-1}{(3y-2x)} = (x-1)$

$3y(x-1)-2(x-1)+1$ $t^2-at-1=0$ $x^2-2x+1+4$

$(x-1)(3y-2x)+1$ $t \pm \frac{a\pm\sqrt{a^2+4}}{2}$

$(3y-2x)(3y-2x-x+1)=1$ $(x-1)^2=\frac{25}{9}-(y-2/3)^2$

$x^{\log_4 y}$ $y^{\log_4 x}$

$(3y-2x)(3y-3x+1)=1$

$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2$ $x^2+6x>0$ $a^{\log_b c} = a^{\log_c^{-1} b}$

$3^{\log_4(x^2+6x)}+x^2+6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5}$ $3^{\log_4 t}+t^{\log_4 4} \geq t^{\log_4 5}$

$t=x^2+6x$ $t>0$: $3^{\log_4 t}+t \geq |t|^{\log_4 5}$ $x(3y-2)-3y+2$ $3^{\log_2 8}=3^3$

$3^{\log_4 t}-t^{\log_4 5}+t \geq 0$ $x(3y-2)-(3y-2)=$ $8^{\log_2 3}$

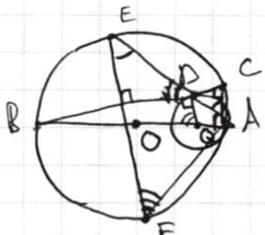
$=(x-1)(3y-2)$ $8^{\log_8 9}$

$t(1-t^{\log_4 5/4})+3^{\log_4 t} \geq 0$ $(3y-2x)^2=(x-1)(3y-2)$ $=\frac{2}{3}\log_2 3$

$(3y-2)-2(x-1)$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

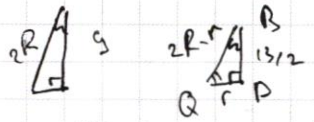
Страница №__ (Нумеровать только чистовики)



$r, R, \angle AFE, S_{\triangle EF}$ -?

$CD = 5/2, \quad BD = 13/2$

$AD \cdot DE = CD \cdot BD = \frac{65}{4}$



$4R^2 - 4Rr + r^2 = \frac{169}{4} + r^2$

$\boxed{R^2 - Rr = \frac{169}{16}}$

$\cos\beta = \frac{13/2}{2R-r} = \frac{9}{2R}$

$\cancel{13R} = 18R - 9r$

$5R = 9r$

$8\sin\alpha\cos\alpha \pm 2\cos^2\alpha + 1 = -1$

$8\sin\alpha\cos\alpha + 2\cos^2\alpha = 0$

$\begin{cases} \cos\alpha = 0 \\ 4\sin\alpha + \cos\alpha = 0 \end{cases}$

$4\operatorname{tg}\alpha = -1$

$f(ab) = f(a) + f(b) \quad ab > 0 \quad ab \in \mathbb{Q}$

$f(p) = [p/4]$, p-простое $(x, y) \in \mathbb{N}$ -?

$x \in [3; 27], \quad y \in [3; 27]$

$f(x/y) < 0 \qquad 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23,$

$f(-7) = f(-1) + f(7) = f(-1) + 1$

$f(-1) = f(-1) + f(1) \quad f(-4) = f(-2) + f(2) = f(-2)$

$f(1) = 0$

$f(-4) = f(-1) + f(4)$

$f(4) = 0 \quad f(-1) = f(-4)$

$f(1) = 0 \; f(x \cdot \frac{1}{y}) = f(x) + f(\frac{1}{y}) = f(x) - f(y)$

$f(2) = 0$

$f(3) = 0 \quad f(11) = 2 \quad f(19) = 4 \quad f(1) = f(y) + f(1/y) = 0$

$f(5) = 1 \quad f(13) = 3 \quad f(23) = 5$

$f(7) = 1 \quad f(17) = 4 \qquad f(y) = -f(1/y)$

$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \quad \cos(2\alpha + 2\beta) = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}$

$\sin\alpha$

$\frac{-1}{\sqrt{17}}\cos 2\beta \pm \frac{4}{\sqrt{17}}\sin 2\beta$

$+\sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

1 0
2 0
3 0.
4 0.
5 1.
6 0.
7 1.
8 0.
9 0.
10 1.
11 2.
12 0.
13 3.
14 1.
15 1.
16 0.
17 4.
18 0.
19 4.
20 1.
21 1.
22 2.
23 5
24 0.
25 2.
26 3.
27 0.

$4 = 2 \cdot 2 \quad 6 = 2 \cdot 3$

$8 = 2^3 \quad 9 = 3^2 \quad 10 = 2 \cdot 5$

$12 = 2^2 \cdot 3$

01 12 23 34 45
02 13 24 35
03 14 25
04 15
05

$(a; b)$ -?

a	b
1	7
2	3
3	2
4	2
5	1

$\sin\alpha + \sin\beta = 2(\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})\sin(\frac{\alpha+\beta}{2}))$

$\cos\beta \sin\alpha = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta))$

$\frac{4x-3}{2x-2} \geq ax + b \geq 8x^2 - 34x + 30$

$\forall x, \; x \in (1; 3]$

$x = \frac{17 \pm \sqrt{289 - 240}}{8} = \frac{17 \pm 7}{8} =$

$= \left[\begin{array}{l} 5/4 \\ 3 \end{array}\right.$

$\cancel{2(4x^2 - 17x + 15)}$

$x_B = \frac{34}{16} = \frac{17}{8}$

$a + b = \alpha$

$a - b = \beta$

$2a = \alpha + \beta$

$a = \frac{\alpha+\beta}{2}$

$b = \alpha - a = \frac{2\alpha - \alpha - \beta}{2} = \frac{\alpha - \beta}{2}$

$(S\alpha \cdot C\beta + C\alpha \cdot S\beta)$

$(C\alpha C\beta + S\alpha \cdot S\beta)$

$S\alpha C\alpha \cdot C\beta^2 + C\alpha^2 S\beta C\beta$

$+ S\alpha^2 S\beta C\beta + C\alpha S\alpha S\beta^2$

$S\alpha C\alpha + S\beta C\beta$

$S = -4C$

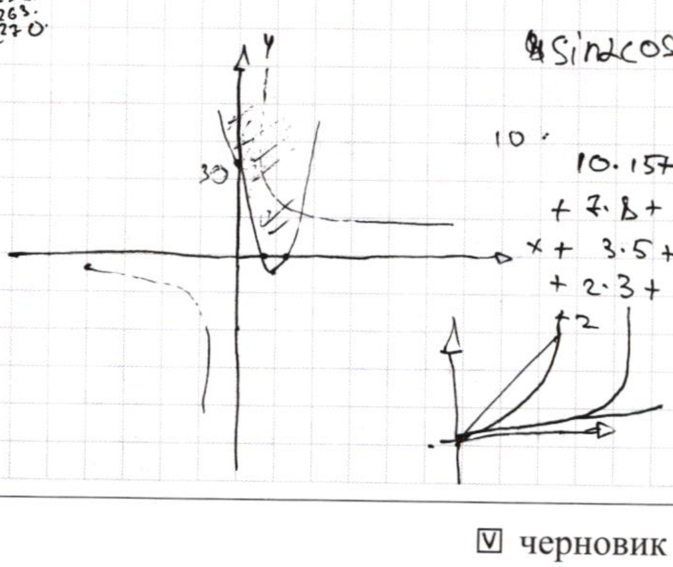
$\sin\alpha + \sin$

$\frac{4(x - 3/4)}{2(x-1)} \geq ax + b \geq 8(x-3)(x - 5/4)$

$\sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha =$

$4\sin\alpha\cos\alpha - \cos^2\alpha + 1 = 0$ ($\sin^2\alpha$)

$= 2\sin(2\alpha + 2\beta)\cos 2\beta = -\frac{8}{17}$



10 ·

$10 \cdot 15 +$

$+ 7 \cdot 8 +$

$x + 3 \cdot 5 +$

$+ 2 \cdot 3 +$

$+ 2$

165
64
329
150
56
75
$6 \to 8$
2

64

$|x \cdot (-\frac{1}{\sqrt{17}}) \quad \cos 2\beta = -\frac{8 \cdot 4}{17\sqrt{17}}$

$\cos 2\beta = 4/\sqrt{17}$

$\sin 2\beta = \pm\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha \cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\frac{4}{\sqrt{17}}\sin 2\alpha \pm \frac{1}{\sqrt{17}}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$4\sin 2\alpha \pm \cos 2\alpha = -1$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)