МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 4 ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6}, \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$\left|x^2-26x\right|^{\log_5 12}+26x\geqslant x^2+13^{\log_5\left(26x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=12$, $BD=13$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $4\leqslant x\leqslant 28$, $4\leqslant y\leqslant 28$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{8-6x}{3x-2}\geqslant ax+b\geqslant 18x^2-51x+28$$

выполнено для всех x на промежутке $\left(\frac{2}{3};2\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $TXYZ$, вершина Y которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра TY. Известно, что $XY=\sqrt{3}$, $TX=\sqrt{2}$, $TZ=2$. Найдите длину ребра XZ. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$BD = 13$

$CD = 12$

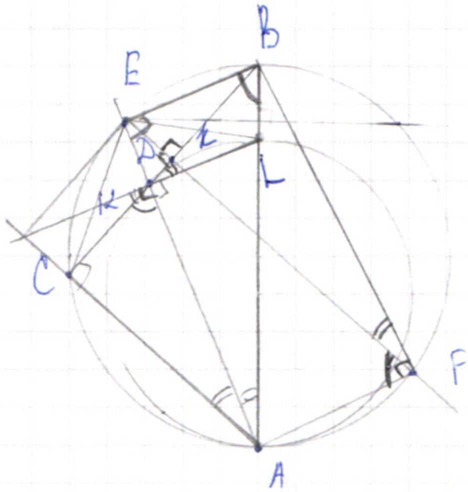
r и R – радиусы

$13^2 = (2R-2r)2R$

$ED \cdot AD = 12 \cdot 13$

$EK^2 = DK \cdot KB$

$ED^2 = DK \cdot BD$



$64 = 8$

$\frac{2r}{2R} = \frac{AD}{AE}$ $\frac{AD}{ED} = \frac{2r}{2R-2r}$

$125^{\log_5 25}$

$AD \cdot (2R-2r) = ED \cdot 2r$

$4^{\log_8 256} = 4^3$

$ED \cdot AD = 12 \cdot 13$

$AD \cdot 2R - 2rAD = ED2r$

$\sin\alpha = \frac{AD}{2r}$

$256^{\log_8 4}$

$AD \frac{13^2}{2r} = ED \cdot 2r$

$\frac{AD}{ED} = \frac{2r}{2(R-r)}$ $\sqrt[3]{256^2}$

$ED = \frac{13 \cdot 12}{AD}$

~~$(AE - ED)(ED) = 12 \cdot 13$~~

$\frac{AD^2}{12 \cdot 13} = \frac{2r}{2R-2r} = \frac{4Rr}{13^2}$

$AD^2 = 4Rr \frac{12}{13}$

$\frac{ED}{BD}$

$\cos\alpha = \sqrt{\frac{12}{AD}}$ $\cos\alpha$

$\log_5 t = y$ $5^y = t$

$5^{y \cdot \log_5 12} = t^{\log_5 12}$

$12^y = t^{\log_5 12}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

$(3x-3)^2 + (y-6)^2 = (3\sqrt{10})^2$ $\quad x-1=v$

$u = y-6$

$y-6x = \sqrt{(y-6)(x-1)}$

$-6x=0$ $\quad y-6+6-6x$

$x=0$

$x=1$

$\cancel{y=0}$

$6-6x=0$

$x=1$

$y=6$

$y-6=0$

$(y-6)+(6+6x) = \sqrt{(y-6)(x-1)}$

$y-6+6(x-1)$

$\begin{cases} u+6v=\sqrt{uv} \\ 9v^2+u^2=90 \end{cases}$ $\quad u-6v=\sqrt{uv}$

$u^2+12uv+36v^2=uv$

$u^2+13uv+36v^2=0$

$\cancel{D = 169v^2 - 4 \cdot 36v^2}$

$u^2=90-9v^2$

$\log_5 t = y$

$u^2-12uv+36v^2=uv$

$u^2-13uv+36v^2=0$

$D = 169v^2-144v^2 = 25v^2$

$u = \frac{13v \pm 5v}{2} = \left[\begin{array}{l} 9v \\ 4v \end{array}\right.$

$(u-4v)(u-9v)=0$

$9v^2+16v^2=90$

$v^2=\frac{90}{19}$ $\quad v=\pm\sqrt{\frac{90}{19}} = \pm 3\sqrt{\frac{10}{19}}$

$u=\pm 12\sqrt{\frac{10}{19}}$

$3v^2+81v^2=90$

$v^2=\frac{90}{84}=\frac{30}{28}=\frac{15}{14}$ $\quad v=\pm\sqrt{\frac{15}{14}}$

$|t|^{\log_5 12} = t + 13^{\log_5(-t)}$

$|t|^{\log_5 12}$

$12t$

$5^y \cdot 12 = t^{\log_5 12}$

$5^{y\log_5 12} = t^{\log_5 12}$

$5^y = t$

$\left(t^{\log_5 12} + t\right)' =$

$\log_5 12 \cdot t^{\log_5 12 - 1} + 1 = 0$

$\log_5 12 \cdot t^{\log_5 24}$

$\log_5 t = y$

$\log_5 0 = t - t = 0$

$12 \cdot 5^y$

$5^{y\log_5 12} = t^{\log_5 12}$

$5^y = t$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha+4\beta) = \sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta + \sin 2\beta\cdot\cos(2\alpha+2\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$

$\cos(2\alpha+2\beta) = \pm\sqrt{\frac{16}{17}} = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}$

$\cancel{-\frac{1}{\sqrt{17}}\cdot\cos 2\beta + \sin 2\beta\,\frac{4}{\sqrt{17}} + \sin 2\alpha = -\frac{2}{\sqrt{17}}}$

$\sin\frac{4\alpha+4\beta}{2} = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\cancel{\cos 2\alpha = \cos^2 - \sin^2} =$
$= 1-2\sin^2$

$\cancel{\sin^2\frac{4\alpha+4\beta}{2} = \frac{1}{17} = \frac{1-\cos(4\alpha+4\beta)}{2}}$

$\boxed{\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}, \quad \sin 2\beta = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}.}$

$\cancel{\cos(4\alpha+4\beta) = \frac{15}{17}}$

$\cancel{2\sin\beta\cdot\cos\beta}$

$2\sin(\alpha+2\beta)\cdot\cos(\alpha+2\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$

$\cancel{2(\sin 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha)(\cos 2\alpha\cdot\cos 2\beta - \sin 2\alpha\cdot\sin 2\beta) + \sin 2\alpha =}$

$2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$2(\sin\alpha\cdot\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha)(\cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\frac{1}{\sqrt{17}}\sin 2\alpha + \cos 2\alpha\,\frac{4}{\sqrt{17}} = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$4\cos 2\alpha + \sin 2\alpha = -1$

$4\cos^2\alpha - 4\sin^2\alpha + \sin 2\alpha = -1 = -\cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

$5\cos^2\alpha - 3\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha = 0 \quad /:\cos^2\alpha$

$5 - 3\,tg^2\alpha + 2\,tg\,\alpha = 0$

$\cancel{D} \quad -3\,tg^2\alpha + 2\,tg\,\alpha + 5 = 0$

$3\,tg^2\alpha - 2\,tg\,\alpha - 5 = 0$

$tg\,\alpha = -1;\ \frac{5}{3}$ Ответ. $-1;\ \frac{5}{3}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$\angle NBD = 90° - 180 + \angle\beta = \angle\beta - 90°$

~~$\alpha - \beta = 2\beta - 90 = 2\beta - \alpha - \beta = \beta - \alpha$~~

3β

2β

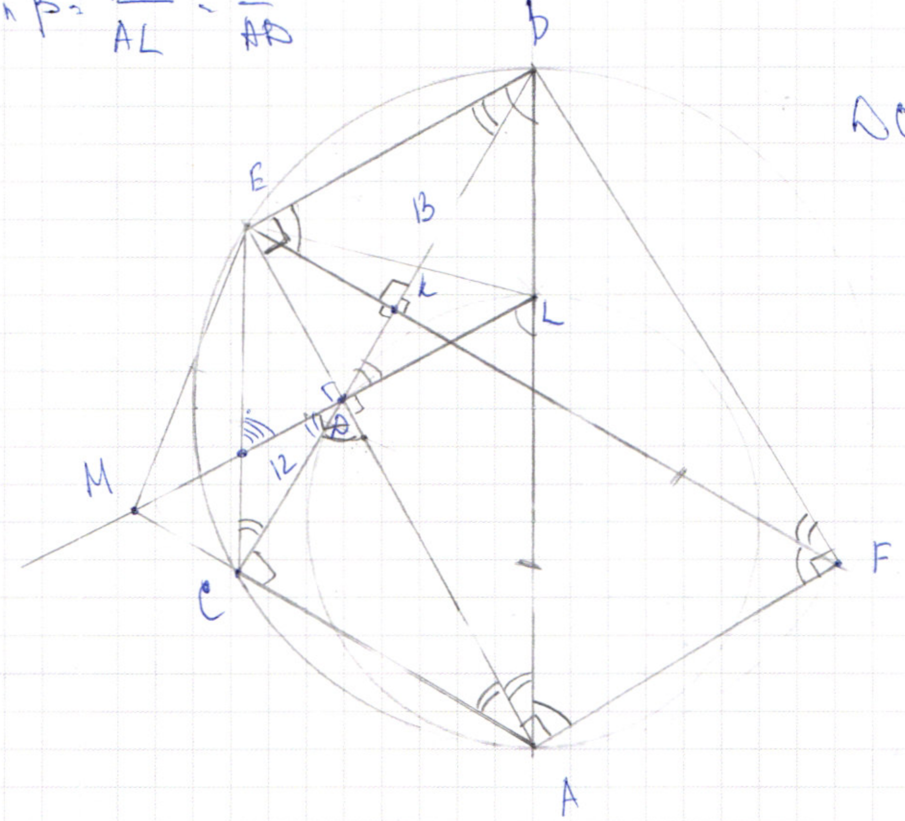
$\sin\beta = \frac{12}{AD}$

~~$tg\beta$~~

$\sin\beta = \frac{DL}{AL} = \frac{12}{AD}$

$90 - 2\beta = \alpha - \beta$

$90 - \beta = \alpha$



$DO^2 = LO \cdot AO =$

$= kO^2 + Dk^2 =$

$= Bk \cdot Dk + Dk^2 =$

$= Dk(Dk + Bk) =$

$= DK \cdot BD$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = 2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta = -\frac{2}{17}$

$-\frac{2}{\sqrt{17}}\cdot\sin 2\beta = -\frac{2}{17}$

$\sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}$

$\cos 2\beta = \pm\sqrt{1-\frac{1}{17}} = \pm\sqrt{\frac{16}{17}} = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \cos 2\alpha\cdot\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

1) $\cos 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha\cdot\frac{4}{\sqrt{17}} + \cos 2\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt{17}} = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$4\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1$ $\quad \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

$4\sin 2\alpha + 1 + \cos 2\alpha = 0$

$4\sin 2\alpha + 2\cos^2\alpha = 0$ $\quad -4\sin 2\alpha + 2\cos^2\alpha = 0$

$4\sin\alpha\cdot\cos\alpha + \cos^2\alpha = 0$ $\quad -4\sin\alpha\cdot\cos\alpha + \cos^2\alpha = 0$

$\cos\alpha\,(4\sin\alpha + \cos\alpha) = 0$ $\quad -4\,tg\alpha + 1 = 0$

$\cos\alpha \neq 0$, т.к. существует $tg\alpha$ $\quad tg\alpha = \frac{1}{4}$

$4\,tg\alpha + 1 = 0$

$tg\alpha = -\frac{1}{4}$

2) $\cos 2\beta = -\frac{4}{\sqrt{17}}$

$-\sin 2\alpha\cdot\frac{4}{\sqrt{17}} + \cos 2\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt{17}} = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$-4\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$18x^2 - 51x + 28$

$D = 51^2 - 4 \cdot 28 \cdot 18 = 9 \cdot 289 - 4 \cdot 28 \cdot 9 \cdot 2 =$

$= 9(289 - 4 \cdot 2 \cdot 28) = 9 \cdot 65$

$\begin{array}{r} 28 \\ \times 8 \\ \hline 224 \end{array}$ $\begin{array}{r} 289 \\ -224 \\ \hline 65 \end{array}$

$x = \frac{51 \pm 3\sqrt{65}}{2 \cdot 18} = \frac{17 \pm \sqrt{65}}{2 \cdot 6} = \frac{17 \pm \sqrt{65}}{12}$

$\frac{18 \cdot 17^2}{12 \cdot 12} - \frac{51 \cdot 17}{12} + 28$

$x_0 = \frac{51}{2 \cdot 18} = \frac{17}{2 \cdot 6} = \frac{17}{12}$

$18 \cdot 9 - 51 \cdot 3 + 28 = 37$

162 153

$1\frac{5}{12}$ 1,5

$\frac{289}{2} = 28$

$\frac{8-6x}{3x-2} = \frac{4+4-6x}{3x-2} =$

$= \frac{4-(6x-4)}{3x-2} =$

$= \frac{4}{3x-2} - 2$

$\frac{18 \cdot 289}{12 \cdot 12}$

$y(2) = 18 \cdot 4 - 51 \cdot 2 + 28 =$

$= 72 - 102 + 28 = -2$

$y\left(\frac{2}{3}\right) = 8 - 34 + 28 = 2$

$-\frac{51 \cdot 17}{12} + 28 = 28 - \frac{289}{8} = -\frac{65}{8} \approx -8$

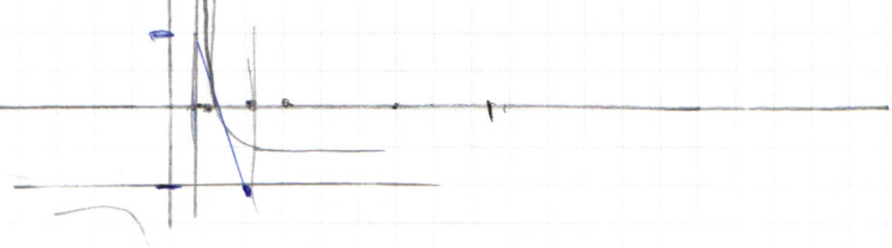
~~$\frac{2}{3}a + b \geq 2$~~

$-2 = 2a + b$

$8 - 6x = (3x-2)(ax+b) =$

$= a3x^2 + 3xb - 2ax - 2b$

$a3x^2 + x(3b - 2a + 6) - 2b - 8 = 0$



☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$9x^2+y^2-18x-12y+9+36=90$

$9(x^2-2x+1)+y^2-12y+36=90$

$(3x-3)^2+(y-6)^2=90=(3\sqrt{10})^2$

$xy-6x-y+6=x(y-6)-(y-6)=(y-6)(x-1)$

ОДЗ: $y-6x\geq 0$

$y\geq 6x$

$y^2-12xy+36x^2=xy-6x-y+6$

$y^2-13yx+36x^2+y-6=0$

$y^2-y(13x-1)+6(6x^2-1)=0$

$D=169x^2-26x+1-4\cdot \underset{144}{36}x^2+4\cdot 6=25x^2-26x+25>0$

$D=\cancel{26^2}-4\cdot 25\cdot 25=$

$x^2-26x=t$

$|t|^{\log_5 12}\geq t+13^{\log_5(26x-x^2)}$

ОДЗ: $26x-x^2>0$

$x^2-26x<0 \Rightarrow t<0 \Rightarrow -t>0$

$|t|^{\log_5 12}\geq t+13^{\log_5(-t)}$ $\qquad |t|>0 \Rightarrow$

$|t|^{\log_5 12}-t\geq 13^{\log_5(-t)}$ $\qquad -t=|t|$

$|t|^{\log_5 12}+|t|\geq 13^{\log_5|t|}$

~~$|t|^{\log}$~~

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$2a = -b - 2 \qquad 3b + 6a = -6$

$a = -\frac{b}{2} - 1 \qquad 3b = -6 - 6a$

$\cancel{\left(-\frac{b}{2} - 1\right)3x^2}$

$\left(-\frac{b}{2} - 1\right)3x^2 + x(\underbrace{3b + b + 2 + 6}_{4b+8}) - 2b - 8 = 0$

$D = 4^2(b+2)^2 + 4\left(\frac{b}{2} + 1\right) \cdot 3(-2b - 8) =$

$= 4\left(4b^2 + 16b + 16 - (b+2)(3b+12)\right) =$

$= (4b^2 + 16b + 16 - 3b^2 - 12b - 6b - 24) = 0$

$b^2 - 2b - 8 = 0$

$D = 4 + 4 \cdot 8 = 36$

$b = \frac{2 \pm 6}{2} = 4; -2$

$a = -1 - \frac{b}{2} = \left[\begin{array}{l} -3 \\ 0 \end{array}\right.$

$a = -3$

$b = 4 \qquad -3x + 4 = -2 + 4 = 2$

$\frac{8 - 6x}{3x - 2} = -3x + 4$

$2(4 - 3x) = (4 - 3x)(3x - 2)$

$x = \frac{4}{3}; \qquad 3x - 2 = 2$

$(4 - 3x)(2 - (3x - 2)) = 0$

$2 - 3x + 2 = 0$

$3x = -4$

$x = -\frac{4}{3}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

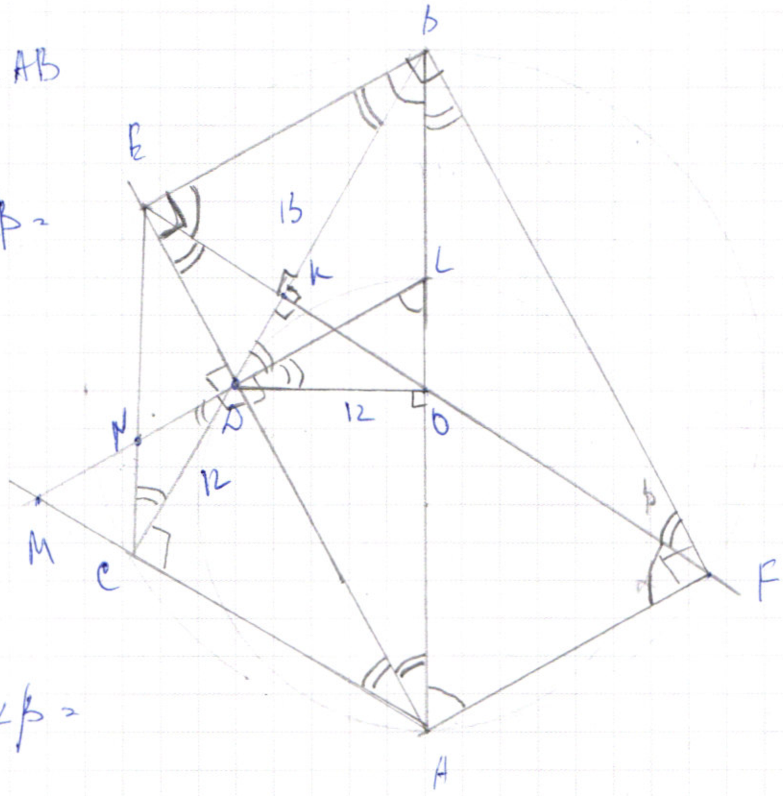
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4. 1) Пусть $\angle AFE = \angle$; $\angle EFB = \beta$



2) $\angle EFB = \frac{1}{2} \cup EB = \angle EAB$

3) $\angle ADL = 90^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle DLA = 90^\circ - \angle\beta =$

$= \angle\alpha$

4) $\angle BDL = \angle DAL =$

$= \frac{1}{2} \cup DL \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle MDC =$

$= \angle BDL \Rightarrow$

$\angle CDA = 90^\circ - \angle\beta =$

$= \angle\alpha \Rightarrow$

$\angle CAD = 90^\circ - \angle\alpha = \angle\beta$

$\angle CA\cancel{E} = \frac{1}{2} \cup CE = \angle EBC \Rightarrow \angle BEK = \angle \Rightarrow \angle EB\cancel{C}F = 90^\circ \Rightarrow$

AEBF – прямоугольник

5) $\angle ABE = \angle AFE$

$2\angle EAB = \angle EOB$

$\angle END = 180^\circ - 2\beta$

6) $BO = CD = 12$ т.к. $\triangle ACD = \triangle AOD$

$12^2 = DK \cdot BD = DK \cdot 13$

$DK = \frac{12^2}{13} =$

$\cos 2\beta = \frac{\frac{12}{13}}{12} = \frac{12}{13}$ $\cos 2\beta = 1 - 2\sin^2\beta$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 1 (Нумеровать только чистовики)

$\sin 2\beta = \sqrt{\frac{169-144}{13}} = \frac{5}{13}$

$\sin^2\beta = \frac{1-\cos 2\beta}{2}$

$\sin^2\beta = \frac{\frac{1}{13}}{2} = \frac{1}{26}$

$\sin\beta = \sqrt{\frac{1}{26}} \Rightarrow \cos\beta = \frac{5}{\sqrt{26}}$

$\cancel{\cos\beta =}$ $\sin\beta = \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{26}}$

$\angle AFE = \arccos\frac{1}{\sqrt{26}}$

$\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{5} = \frac{12}{OA}$ $\quad OA = 60 = 2r \Rightarrow r = 30$ (~~...~~ окр w)

$r = AC = 30$

$\cos 2\beta = \frac{AC}{AB} = \frac{12}{13}$

$\cancel{AB = \frac{30 \cdot 13}{12} = \frac{65}{2} = ...}$

Ответ: $r = 30$.

N1. $\sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$

$\cancel{2 \sin}$ $2\sin(2\alpha + 2\beta)\cos 2\beta = -\frac{2}{17}$

$\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\beta = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta + \cos 2\alpha \cdot \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\Leftrightarrow 5 - 3\operatorname{tg}^2\alpha + 2\operatorname{tg}\alpha = 0$

$3\operatorname{tg}^2\alpha - 2\operatorname{tg}\alpha - 5 = 0$

$\operatorname{tg}\alpha = -1;\ \frac{5}{3}$

Ответ: $-1;\ \frac{5}{3}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

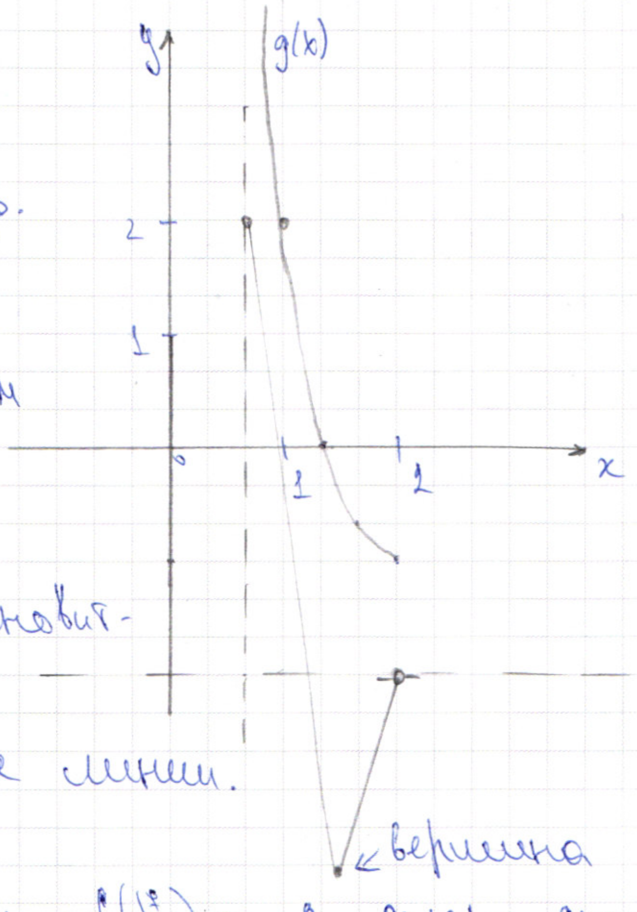
№ 5. 1) x_0 (для параболы) = $\frac{51}{36} = \frac{17}{12}$

$y_0 = -\frac{65}{8}$ $\quad 18x^2 - 51x + 28 = f(x)$

2) $\frac{8-6x}{3x-2} = \frac{4+(4-6x)}{3x-2} = \frac{4}{3x-2} - 2 = g(x)$

$x = \frac{2}{3}$ – вер. асимптота

$y = -2$ – гор. асимптота



3) при старшем коэффициенте равном „18" парабола становится похожей на 2 прямые линии.

$f g(\frac{2}{3}) = 2$ $\quad$ ← вершина

$f g(2) = -2$; $f(\frac{17}{12}) \approx -8$ – далеко снизу

4) прямая $ax+b$ должна проходить {или быть выше} чем парабола, потому

худший случай, когда $\frac{2}{3}a+b=2$ и $2a+b=-2$

решая систему, получаем $a=-3$; $b=4$

~~теперь проверим эту прямую на решения с гипер-~~

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

~~Болой~~

$\cancel{\frac{8-6x}{3x-2} = -3x+4}$

$\cancel{(8-6x) = (-3x+4)(3x-2)}$

$\cancel{8-6x = -9x^2+6x+12x-8}$

$\cancel{9x^2}$

Теперь найдем такие a и b при которых прямая касается гиперболы и проходит через (2; -2)

Тогда:

$$\begin{cases} 8-6x = (3x-2)(ax+b); (D=0) \\ -2 = 2a+b \end{cases}$$

$$a3x^2 + x(3b-2a+6) - 2b-8 = 0$$

$$\left(-\frac{b}{2}-1\right)3x^2 + x(4b+8) - 2b-8 = 0$$

$$D = 4(4b^2+16b+16 - (b+2)(3b+12)) = 0$$

$$4b^2+16b+16-3b^2-12b-6b-24=0$$

$$b^2-2b-8=0$$

$$b = 4; -2$$

$$a = -3; 0$$

$a=0$ – не подходит

$a=-3;\ b=4 \Rightarrow$

При $a=-3; b=4$ прямая касается ~~параболы~~ гиперболы и проходит через 2 точки параболы ($\left(\frac{2}{3}; 2\right)$ и $(2;-2)$), т.е. прямая только-только поместилась между функциями $\Rightarrow$ a и b $= (-3; 4)$ – единственная пара

Ответ: $(-3; 4)$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 2

$$y-6+6-6x=\sqrt{(y-6)(x-1)}$$

$$9(x-1)^2+(y-6)^2=90$$

$$\begin{cases} x-1=v \\ y-6=u \end{cases}$$

$$\begin{cases} u-6v=\sqrt{uv} \\ 9v^2+u^2=90 \end{cases}$$

$$u^2-12vu+36v^2=uv$$

$$(u-4v)(u-9v)=0$$

1) $9v^2+16v^2=90$

$$v^2=\frac{90}{25}$$

$$v=\pm\frac{3}{5}\sqrt{10}$$

$$u=\pm\frac{12}{5}\sqrt{10}$$

2) $9v^2+81v^2=90$

$$v^2=1$$

$$v=\pm 1$$

$$u=\pm 9$$

3) $v=\pm\frac{3}{5}\sqrt{10}=x-1$

$$x=1\pm\frac{3}{5}\sqrt{10}$$

$$y=6\pm\frac{12}{5}\sqrt{10}$$

4) $x=1\pm 1$

$$y=6\pm 9$$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

№2

Ответ: $\left(1+\frac{3}{5}\sqrt{10};\ 6+\frac{12}{5}\sqrt{10}\right);\ \left(1-\frac{3}{5}\sqrt{10};\ 6-\frac{12}{5}\sqrt{10}\right)$

$(0;-3);\ (2;15)$

№3. $x^2-26x=t$

ОДЗ: $26-x^2>0 \Rightarrow t<0$

$$|t|^{\log_5 12}-t\geqslant 13^{\log_5|t|}$$

$$|t|^{\log_5 12}+|t|\geqslant 13^{\log_5|t|}$$

$\cancel{12^{\log_5|t|}}+$

$$|t|^{\log_5 12}+|t|\geqslant |t|^{\log_5 13}$$

$$12^{\log_5|t|}+5^{\log_5|t|}\geqslant 13^{\log_5|t|}$$

$$\log_5|t|=y$$

$$12^y+5^y\geqslant 13^y \quad /:12^y$$

$$1+\left(\frac{5}{12}\right)^y\geqslant\left(\frac{13}{12}\right)^y$$

$1+\left(\frac{5}{12}\right)^y$ – убывающая функция

$\left(\frac{13}{12}\right)^y$ – возрастающая

пусть y_0 – решение, тогда

$y\in(-\infty;y_0)$ – решени неравенства

$1+\left(\frac{5}{12}\right)^y\geqslant\left(\frac{13}{12}\right)^y$; y_0 – легко найти подбором

$y=2 \Rightarrow y\in(-\infty;2]$

$$\log_5|t|\leqslant 2$$

$\begin{cases}|t|\leqslant 25\\ t<0\end{cases} \Leftrightarrow$ ~~25~~ $\begin{cases}t\geqslant -25\\ t<0\end{cases}$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3 $t \in [-25; 0)$

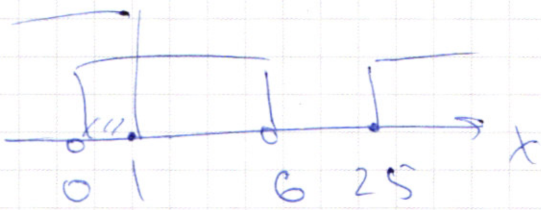
$-25 \le x^2 - 26x < 0$

1) $x^2 - 26x + 25 \geq 0$

$(x-1)(x-25) \geq 0$

2) $x^2 - 6x < 0$

$x(x-6) < 0$



Ответ: $x \in (0; 1]$

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)