МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФР ______________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

+-

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{8}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases}3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2},\\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4.\end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x\geqslant |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{5}{2}$, $BD=\frac{13}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $3\leqslant x\leqslant 27$, $3\leqslant y\leqslant 27$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

+-

$$\frac{4x-3}{2x-2}\geqslant ax+b\geqslant 8x^2-34x+30$$

выполнено для всех x на промежутке $(1;3]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $PQRS$, вершина P которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра PQ. Известно, что $QR=2$, $QS=1$, $PS=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра RS. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

$$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2} \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{(3y-2)(x-1)} \\ 3(x-1)^2+(y+1)(3y-7)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=3y-2 \\ b=x-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{ab}=a-2b \\ 3b^2+\frac{(a-5)(a+5)}{3}=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{ab}=a-2b \\ 9b^2+a^2-25=0 \end{cases}$$ $ab\geq 0$; $a-2b\geq 0$

$$\begin{cases} ab=a^2+4b^2-4ab \\ a^2+9b^2=25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a-b)(a-4b)=0 \\ a^2+9b^2=25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} a=b \\ a=4b \end{array}\right. \\ a^2+9b^2=25 \end{cases}$$

1) $a=b$

$a^2+9a^2=25$

$a^2=2,5$

$a=\pm\sqrt{2,5}=b$

$a-2b\geq 0$, $a=b$

$a-2a\geq 0 \Rightarrow a\leq 0$

$ab\geq 0$ $a^2\geq 0$

$\Rightarrow a,b=$

$=-\sqrt{2,5}$

$$\begin{cases} 3y-2=-\sqrt{2,5} \\ x-1=-\sqrt{2,5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=1-\sqrt{2,5} \\ y=\frac{1}{3}(2-\sqrt{2,5}) \end{cases}$$

2) $a=4b$

$ab \geq 0 \quad 4a^2 \geq 0 \Rightarrow a \in R, a \in R$

$a-2b \geq 0 \quad 4b-2b \geq 0 \Rightarrow b \geq 0, a \geq 0$

$16b^2+9b^2=25$

$b=\pm 1$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=4 \\ b=1 \end{cases} \\ \begin{cases} a=-4 \\ b=-1 \end{cases} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 3y-2=4 \\ x-1=1 \end{cases} \\ \begin{cases} 3y-2=-4 \\ x-1=-1 \end{cases} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=2 \\ x=2 \end{cases} \\ \begin{cases} y=-\frac{2}{3} \\ x=0 \end{cases} \end{array}\right.$$

<u>Ответ</u>: $x, y = (2;2)\ (0;-\frac{2}{3})\ (1-\sqrt{2,5}; \frac{1}{3}(2-\sqrt{2,5}))$

№3

$$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2$$

ОДЗ: $x^2+6x>0$
$x(x+6)>0$
$x=(-\infty;-6)\cup$
$\cup(0;\infty)$

$x^2+6x>0 \Rightarrow |x^2+6x|=x^2+6x$

$a=\log_4(x^2+6x)$

$3^a+4^a \geq (4^a)^{\log_4 5}$ $\qquad (4^a)^{\log_4 5}=4^{a\log_4 5}=4^{\log_4 5^a}$
$=5^a$

$3^a+4^a \geq 5^a \quad |:5^a>0$

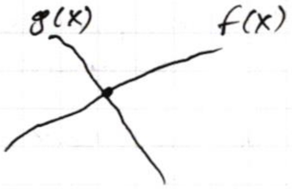
$0,6^a \geq 1-0,8^a \qquad f(x)=0,6 \uparrow$
$g(x)=1-0,8 \downarrow \Rightarrow$ имеют одно пересечение

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$f(x) \geq g(x)$ при $x \geq x_0$, где x_0 – точка пересечения.

$0{,}6^{a} = 1 - 0{,}8^{a}$ при $a = 2$

$0{,}36 = 1 - 0{,}64$

$0{,}36 = 0{,}36 \Rightarrow f(x) = g(x)$ при $x = 2$

$\Rightarrow f(x) \geq g(x)$ при $x \geq 2$

$a \geq 2$

$\log_4 (x^2 + 6x) \geq 2$

$x^2 + 6x \geq 16$

$x^2 + 6x - 16 \geq 0$

$(x+8)(x-2) \geq 0$

$x \in (-\infty; -8] \cup [2; \infty)$, $x \in (-\infty; -6) \cup (0; \infty)$

Ответ: $x \in (-\infty; -6) \cup [2; \infty)$

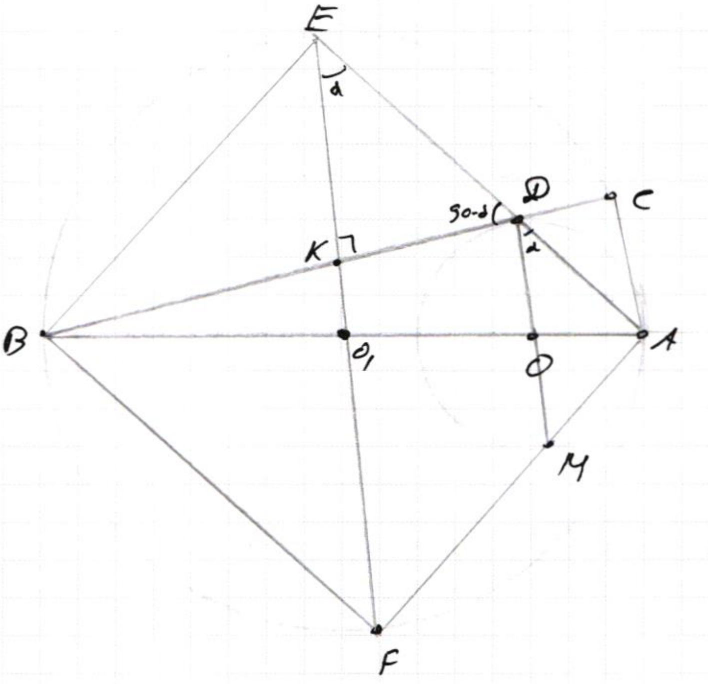
№4

Дано:

Ω, ω касаются внутр. образом, AB - диаметр, BC - касается ω в т. D, AD пересек Ω в т. E, $EF \perp BC$, $F \in \Omega$, $CD = \frac{5}{2}$, $BD = \frac{13}{2}$

Найти: $r, R, \angle AFE, S_{\triangle AFE}$

Решение:



1) $\angle AEB = \angle AFB = 90^\circ$ т.к. опирается на диаметр

2) $\angle ACB = 90^\circ$ т.к. опирается на диаметр

$\angle ODB = 90^\circ$ т.к. касательная

$\angle CBA$ - общий для $\triangle DOB$ и $\triangle CAB$

$\Rightarrow \triangle CAB \sim \triangle DOB \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{BD}{BC} = \frac{OB}{AB} = \frac{OD}{AC}$$

$$\frac{BD}{CD+BD} = \frac{2R-r}{2R} = \frac{\frac{13}{2}}{\frac{13}{2}+\frac{5}{2}} = \frac{13}{18}$$

$36R - 18r = 26R$

$10R = 18r$

$9r = 5R$

$r = \frac{5}{9}R$

$$\frac{OD}{AC} = \frac{13}{18} \Rightarrow$$

$$AC = \frac{18}{13}r$$

3) Пусть $\angle FED = \alpha \Rightarrow \angle EDK = 90^\circ - \alpha \Rightarrow \angle CDA = 90^\circ - \alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle ADO = \alpha$ т.к. $\angle CDO = 90^\circ$

4) Проведем прямую DO до пересечения с AF в точке M, $M \in \omega$

5) DM - диаметр т.к. DO – радиус, $DO \subset DM \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle DAM = 90^\circ$ т.к. опирается на диаметр $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ EF - диаметр $\Rightarrow O_1 \in EF$, O_1 - центр Ω

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

6) ΔBAC – прямоугольный $\Rightarrow$

$CB^2 + AC^2 = AB^2$

$9^2 + \frac{18^2}{13^2} r^2 = 4R^2$

$r = \frac{5}{9} R$

$81 + \frac{9^2}{13^2} \cdot 4 \cdot \frac{25}{9^2} R^2 = 4R^2$

$81 + \frac{25}{169} \cdot 4R^2 = 4R^2$

$4R^2 \cdot \frac{144}{169} = 81$

$2R \cdot \frac{12}{13} = 9$

$R = \frac{9 \cdot 13}{24} = \frac{39}{8}$ $\quad r = \frac{65}{24}$

7) EA и BC – пересекающиеся хорды $\Rightarrow BD \cdot DC = ED \cdot DA$

8) $\Delta EO_1A \sim \Delta DOA$ по 2-м углам $\Rightarrow$ $\quad AD \cdot ED = \frac{65}{4}$

$\frac{r}{R} = \frac{AD}{AD + ED}$

$\frac{r}{R} = \frac{AD}{AD + \frac{BD \cdot DC}{AD}} = \frac{AD}{AD + \frac{65}{4AD}} = \frac{5}{9}$

$9AD = 5AD + \frac{65 \cdot 5}{4AD}$

$4AD = \frac{5}{4} \cdot \frac{65}{AD}$

$AD =$

8) $\triangle EO_1A \sim \triangle DOA$ по 2-м углам.

$\Rightarrow \frac{r}{R} = \frac{AD}{AD+EA}$

$rAD + rEA = RAD$

$EA \cdot r = AD(R-r)$

$AD = EA \cdot \frac{r}{R-r}$

$EA \cdot AD = \cancel{69}\ \frac{65}{4} = EA^2 \cdot \frac{r}{R-r} = EA^2 \cdot \frac{\frac{65}{24}}{\frac{117}{24}-\frac{65}{24}} = \frac{65}{52}EA^2$

$= \frac{65}{4}$

$EA^2 = \frac{52}{65} \cdot \frac{65}{4} = 13 \quad EA = \sqrt{13} \quad AD = \frac{65}{4\sqrt{13}}$

9) $AE = EA + AD = \sqrt{13} + \frac{65}{13 \cdot 4}\sqrt{13} = \sqrt{13} + \frac{5}{4}\sqrt{13} = \sqrt{13} \cdot \frac{9}{4}$

10) ~~sin~~ $\cos\angle AEF = \frac{AE}{EF} = \frac{\sqrt{13} \cdot \frac{9}{4}}{\frac{39}{4}} = \frac{3\sqrt{13}}{13}$

11) $\sin\angle AEF = \sqrt{1 - \frac{9 \cdot 13}{13^2}} = \sqrt{\frac{4}{13}} = \frac{2\sqrt{13}}{13}$

$S_{AEF} = \frac{1}{2}\sin\angle AEF \cdot EA \cdot EF = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\sqrt{13}}{13} \cdot \frac{39}{4} \cdot \frac{9}{4}\sqrt{13}$

$= \frac{39 \cdot 9}{16} = \frac{351}{16}$

Ответ: $R = \frac{39}{8} \quad r = \frac{65}{24} \quad \angle AEF = \arcsin\frac{2\sqrt{13}}{13}$

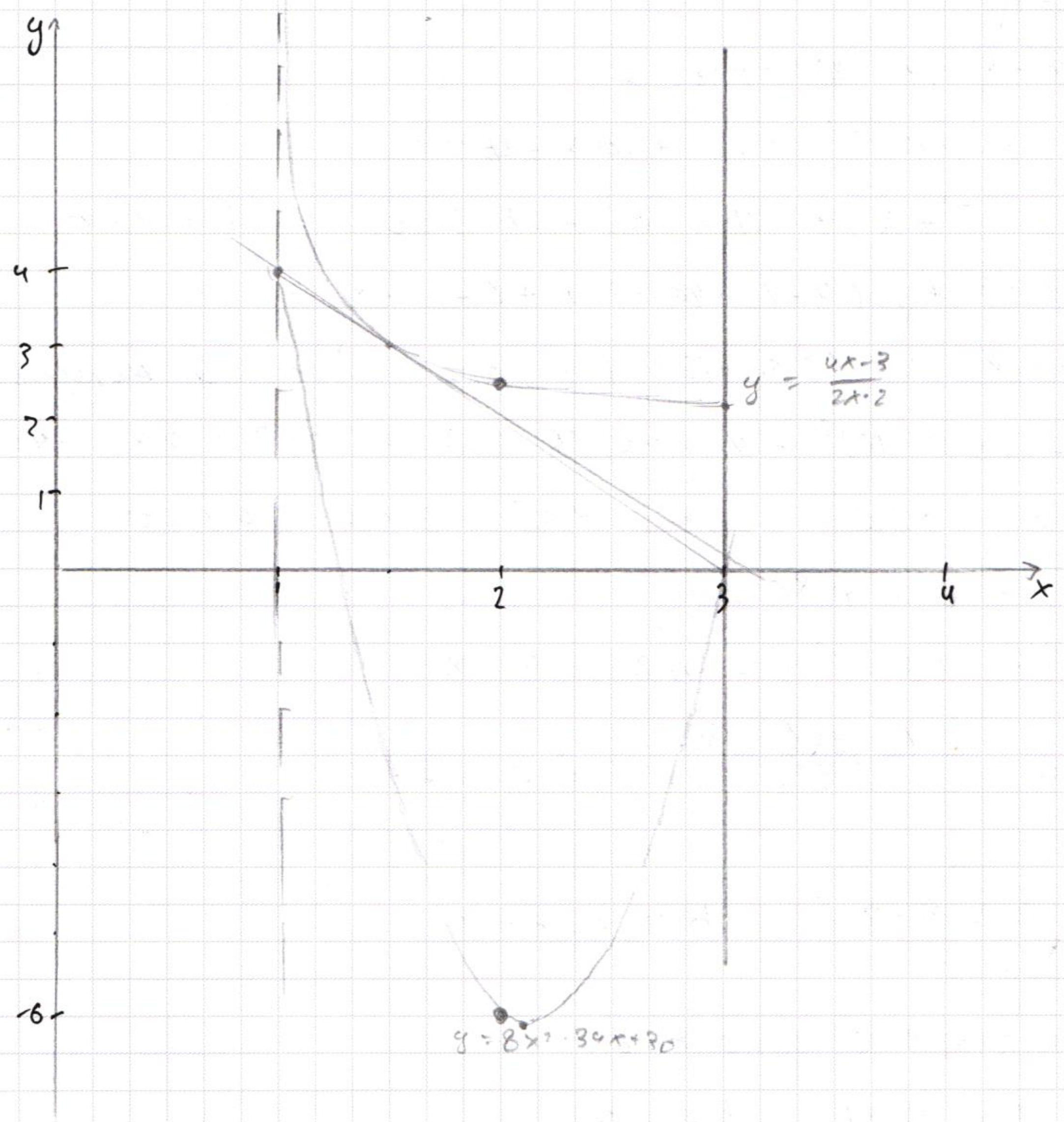
$S_{AEF} = \frac{351}{16}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6

$$\frac{4x-3}{2x-2} \geq ax+b \geq 8x^2-34x+30$$

Построим графики $\frac{4x-3}{2x-2}$ и $8x^2-34x+30$ на отрезке от 1 до 3



Рассмотрим крайние положения прямой $ax+b$,

1. когда прямая проходит через т. $(1;4)$ и касается $y=\frac{4x-3}{4x-2}$

и через т. $(3;0)$ и касается $y=\frac{4x-3}{x-2}$

1) $\begin{cases} ax+b=y \\ 4=a+b \end{cases}$ т. $(1;4) \in ax+b=y$

$\frac{4x-3}{4x-2}=ax+b$

$4x-3-(4x-2)(ax+b)=0$

$4x-3-4ax^2-4xb+2ax+2b=0$

$-4ax^2+x(4-4b+2a)+2b-3=0$ $b=4-a$

$-4ax^2+x(4-16+4a+2a)+8-2a-3=0$

$-4ax^2+x(6a-12)+5-2a=0$ – один корень $\Rightarrow D=0$

$D=(6a-12)^2-4(-4a)(5-2a)=36a^2+144-144a+$

$+80a-32a^2=\cancel{36a^2}\ 4a^2-64a+144=0$

$a^2-16a+36=0$

$D=256-144=112=4\cdot28$

$a=\frac{16\pm 4\sqrt{7}}{2}=8\pm2\sqrt{7}$

$a=8-2\sqrt{7}$; $b=2\sqrt{7}-4$

2) т. $(3;0) \in y=ax+b$

$0=3a+b$ $b=-3a$

$\frac{4x-3}{2x-2}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) т. $(1;4) \in ax+b=y$

$4=a+b \qquad b=4-a$

$\frac{4x-3}{2x-2}=ax+b$

$4x-3-(ax+b)(2x-2)=0$

$4x-3-2ax^2+2a+2bx+2b=0$

$4x-3-2ax^2+2a-8x+2ax+8-2a=0$

$-2ax^2+x(4-8+2a)+5=0$

$-2ax^2+x(2a-4)+5=0$ — один корень $\Rightarrow D=0$

$D=(2a-4)^2-4(-2a)5=4a^2+16-16a+40a$

$=4a^2+24a+16=0$

$a^2+6a+4=0$

$(a+3)^2-5=0$

$(a+3-\sqrt5)(a+3+\sqrt5)=0$

$\left[\begin{array}{l} a=\sqrt5-3 \\ a=-\sqrt5-3 \end{array}\right.$

$a=\sqrt5-3 \qquad b=7-\sqrt5$

2) т. $(3;0) \in y=ax+b \qquad b=-3a$

$\frac{4x-3}{2x-2}=ax+b$

$4x-3-2ax^2+2a-2bx+2b=0$

$4x-3-2ax^2+2a-2b(x-1)=0$

$4x-3-2ax^2+2a-2(-3a)(x-1)=0$

$4x-3-2ax^2+2a+6a(x-1)=0$

$4x-3-2ax^2+2a+6ax-6a=0$

$-2ax^2+x(6a+4)-4a=0$ один корень $\Rightarrow D=0$

$D=36a^2+16+48a-4(-4a)(-2a)=$

$=36a^2+16+48a-32a^2=4a^2+48a+16=0$

$a^2+12a+4=0$

$D=144-16=128=2^7$

$a=\dfrac{-12\pm 8\sqrt{2}}{2}=-6\pm 4\sqrt{2}$

$a=-6+4\sqrt{2}$ $\quad b=18-12\sqrt{2}$

Ответ: $a, b \in (\sqrt{5}-3;\ -6+4\sqrt{2}),\ (7-\sqrt{5};\ 18-12\sqrt{2})$

№1

$\sin(2\alpha+2\beta)=-\dfrac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta+\sin 2\beta\cos 2\alpha=-\dfrac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\dfrac{8}{17}$

$\sin 2\alpha(\cos^2 2\beta\cdot 2-1)+2\sin 2\beta\cos 2\beta\cos 2\alpha=-\dfrac{8}{17}-\sin 2\alpha$

$2\cos 2\beta\underbrace{(\cos 2\beta\sin 2\alpha+2\sin 2\beta\cos 2\alpha)}_{=-\frac{1}{\sqrt{17}}}=-\dfrac{8}{17}$

$\cos 2\beta=4\dfrac{\sqrt{17}}{17}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin 2\beta = \pm \frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha \cdot \frac{4\sqrt{17}}{17} \pm \cos 2\alpha \cdot \frac{1}{\sqrt{17}} = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$4\sin 2\alpha \pm \cos \alpha = -1$

$$\left[\begin{array}{l} 4\sin 2\alpha + \cos\alpha = -1 \\ 4\sin 2\alpha - \cos\alpha = -1 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \cos(2\alpha + \arcsin\frac{1}{\sqrt{17}}) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \cos(2\alpha - \arcsin\frac{1}{\sqrt{17}}) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} 2\alpha + \arcsin\frac{1}{\sqrt{17}} = \pm\arccos -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ 2\alpha + \arcsin\frac{1}{\sqrt{17}} = \pm\arccos -\frac{1}{\sqrt{17}} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} 2\alpha = \arccos -\frac{1}{\sqrt{17}} + \arcsin -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ 2\alpha = -\arccos -\frac{1}{\sqrt{17}} + \arcsin -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ 2\alpha = \arccos -\frac{1}{\sqrt{17}} - \arcsin -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ 2\alpha = +\arccos -\frac{1}{\sqrt{17}} - \arcsin -\frac{1}{\sqrt{17}} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \alpha = \frac{\pi}{4} \\ \alpha = \frac{1}{2}(\arcsin -\frac{1}{\sqrt{17}} - \arccos -\frac{1}{\sqrt{17}}) = \frac{1}{2}(-\arcsin\frac{1}{\sqrt{17}} - \pi + \\ \qquad - \pi + \arccos\frac{1}{\sqrt{17}}) \\ \alpha = \frac{1}{2}(\pi - \arccos\frac{1}{\sqrt{17}} + \arcsin\frac{1}{\sqrt{17}}) \\ \alpha = -\frac{\pi}{4} \end{array}\right.$$

Ответ: $tg\alpha = \pm 1$

$tg\alpha = tg\left(\pm\frac{1}{2}\left(\pi - \arccos\frac{1}{\sqrt{17}} + \arcsin\frac{1}{\sqrt{17}}\right)\right)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№7

$$\begin{cases} 3y-2x = \sqrt{3xy-2x-3y+2} \\ 3x^2+3y^2-6x+4y=4 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3xy-2x-3y+2\geq 0 \\ 3y-2x\geq 0 \end{cases}$$

$\cancel{3x^2-6x+3 \quad +3y^2-4y}$

$9y^2+4x^2-12xy = 3xy-2x-3y+2$

$9y^2+4x^2-15xy+2x+3y-2=0$

№1

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$\sin 2\alpha\cos 2\beta+\sin 2\beta\cos 2\alpha = \frac{-1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha(2\cos^2 2\beta-1)+2\sin 2\beta\cdot\cos 2\beta\cos 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$2\cos^2 2\beta\sin 2\alpha - \sin 2\alpha + 2\sin 2\beta\cos 2\beta\cos 2\alpha+\sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$2\cos 2\beta(\cos 2\beta\sin 2\alpha+\sin 2\beta\cdot\cos 2\alpha) = -\frac{8}{17}$

$2\cos 2\beta\cdot\frac{-1}{\sqrt{17}} = -\frac{8}{17}$

$\cos 2\beta = \frac{4\sqrt{17}}{17} \qquad \sin 2\beta = \pm\sqrt{1-\frac{16}{17}} = \pm\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha\cdot\frac{4\sqrt{17}}{\sqrt{17}} \pm \cos 2\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt{17}} = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$4\sin 2\alpha\pm\cos 2\alpha=-1$

$$\left[\begin{aligned} &4\sin 2\alpha+\cos 2\alpha=-1 \\ &4\sin 2\alpha-\cos 2\alpha=-1 \end{aligned}\right.$$

$\underline{\alpha=\frac{\pi}{4}}$

$\sqrt{17}\left(\frac{4}{\sqrt{17}}\sin+\frac{1}{\sqrt{17}}\cos\right)=-1$

$\cos(2\alpha+\arcsin\frac{1}{\sqrt{17}}) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$2\alpha+\arcsin\frac{1}{\sqrt{17}} = \arccos-\frac{1}{\sqrt{17}}$

$2\alpha=(\arccos-\frac{1}{\sqrt{17}}+\arcsin-\frac{1}{\sqrt{17}})$

№2

$3y-2x = \sqrt{x(3y-2)-(3y-2)} = \sqrt{(3y-2)(x-1)}$

$3x^2+3y^2-6x-4y=4$

$\cancel{xx3}$ $3x(x-1)+(3y-2)y-3x-2y=4$

№3

$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2$

$\cancel{3^{\log_4 a}+6x \geq |a|^{\log_4 5}-x^2}$

$3^{\log_4 a}+a \geq |a|^{\log_4 5}$

$3^{\log_4 a}+3^{\log_3 a} \geq |a|^{\log_4 5}$

$3^{\log_4 a}(1+3^{\log_3 a-\log_4 a}) \geq |a|^{\log_4 5}$

$\cancel{\frac{x}{y} = a^{d}\, 2^{a_1} 3^{b_1} 5^{c_1} 7^{d_1} 11^{e_1}}$

~~$a(a-5b)$~~

$(a-b)(a+4b)=0$

$a^2-ab-4ab+4b^2$

~~3:3~~

~~$3y-2-2x+2$~~

1) $\sqrt{ab}=a-2b$

$\cancel{(3b+3)b+a\left(\frac{a}{3}+\frac{2}{3}\right)-3b-3-\frac{2}{3}a-\frac{4}{3}=4}$

$3x^2-6x+3y^2-4y=4$

$3x^2-6x+3+3y^2-4y=7$

$3(x-1)^2+3y^2-4y=7$

$3(x-1)^2+(y+1)(3y-7)=0$

$3b^2+(a-5)\left(\frac{a+5}{3}\right)=0$

$3y^2-4y-7$

$(y+1)(3y-7)=0$

$\begin{cases} 3b^2+\frac{1}{3}(a^2-25)=0 \\ \sqrt{ab}=a-2b \end{cases}$

$\begin{cases} 9b^2+a^2=25 \\ ab=a^2+4b^2-4ab \end{cases}$ $ab \geq 0$

$(a-b)(a-4b)=0$ $a^2-5ab+4b^2=0$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

$\frac{r}{R}=\frac{x}{x+y}$ $\quad xy=\frac{65}{4}$ $\quad R=\frac{39}{8}$ $\quad r=\frac{65}{24}$

$rx+ry=Rx$

$x(R-r)=ry$

$x=\frac{r}{R-r}y$

$y^2\frac{r}{R-r}=\frac{65}{4}$ $\quad y^2=\frac{65}{4}\cdot\frac{\frac{39}{8}-\frac{65}{24}}{\frac{65}{24}}=$

$=\frac{65}{4}\cdot\frac{\frac{117-65}{24}}{\frac{65}{24}}=\frac{65}{4}\cdot\frac{52}{65}=13$

$y=\sqrt{13}$

$x=\frac{65}{4\sqrt{13}}$

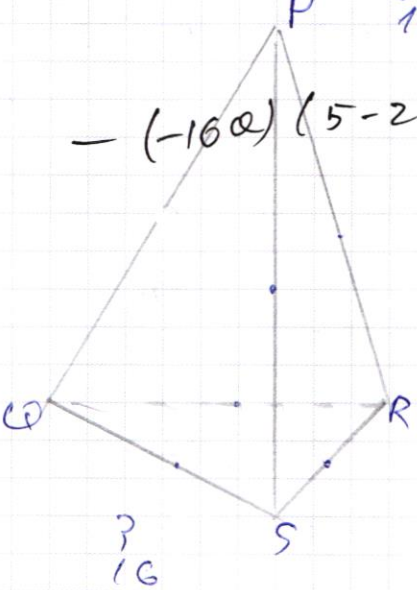
$34 \cdot 34$: 136, 102, $1156-240\cdot4=196$ $\quad 960$

№7

$\frac{34\pm14}{16}=\frac{10}{8}$ $\quad f(a+b)=f(a)+f(b)$ $\quad \sqrt{196}$

$=\frac{5}{4}; 3$ $\quad f(p)=[p/4]$

$-(-16a)(5-2a)$



$\frac{4x-3}{2x-2}\geq ax+b\geq 8x^2-34x+30$

$\boxed{2+\frac{1}{2x-2}}\geq ax+b\geq(8x-10)(x-3)$

$\cancel{8x^2}$ $\quad 2(4x^2-17x+15)$

$2\left(\left(2x-\frac{17}{4}\right)^2-\frac{49}{16}\right)$

$\cancel{16\cdot4}$ $\quad 8\cdot4-68+30$

56, 28, $2\frac{1}{2}$

7, 16, 15, 80, 16, 240 − 7, 289, −49 $\quad$ 4,5

$\frac{17}{4}$, 17, 17, 119, 17, 289, 16

$x_0 = \frac{34}{16}$

$8\cdot9-34\cdot3+30$ $\quad \frac{17}{8}$

$\left(\frac{8\cdot289}{16}-2\cdot17\cdot\frac{17}{4}+30\right)=2\frac{1}{8}$

$256\ 32-\cancel{68}\ 144+30=-6$

$-\frac{49}{8}=-6\frac{1}{8}$

$2+$ $\quad =112$ $\quad 102+30$

☑ черновик ☐ чистовик $\quad$ Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) $\quad$ (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

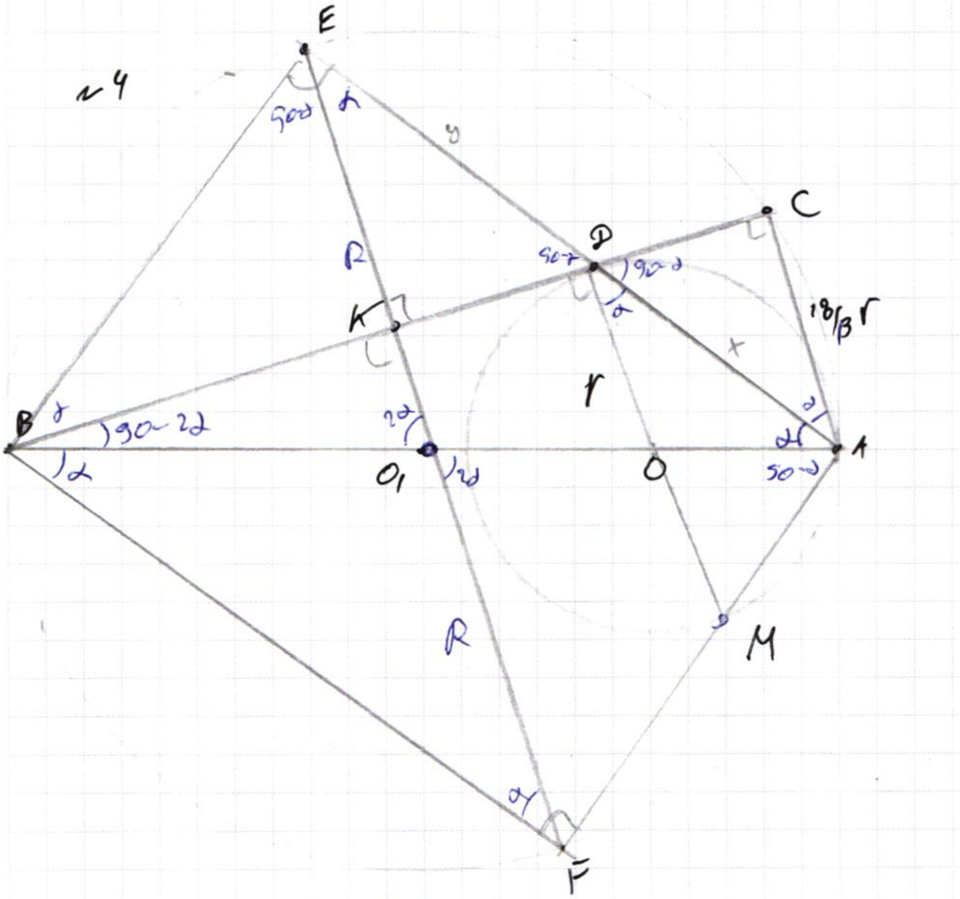
$\left[\begin{cases} a=b \\ a-4b=0 \end{cases}\right.$ $a=4b$

$9b^2+a^2=25$

$\left[\begin{array}{l} a^2=2{,}5 \\ 9b^2+16b^2=25 \end{array}\right.$ $a=\pm\sqrt{2{,}5}$ $b^2=1$ $b=\pm1$

$8 \cdot 39 \cdot 9 = 351$

№4



$\angle AFE$ -?

S_{AEF} -? R, r -?

$CD=\frac{5}{2}$ $BD=\frac{13}{2}$

$xy=\frac{65}{4}$

$BC=9$

$\frac{9}{13/2}=\frac{2R}{2R-r}$

$\frac{18}{13}=\frac{2R}{2R-r}$

$26R=36R-18r$

$18r=10R$

$9r=5R$

$\frac{D}{g}$ $\frac{CD}{y}=\frac{BD\ x}{BD}=\frac{CA}{BE}$ $CA=r\cdot\frac{18}{13}$

$81+\frac{18^2}{13^2}r^2=4R^2$

$\frac{x}{y}=\frac{CD}{KD}$

$r=\frac{5}{9}R$

$DR=\frac{9\cdot13}{24}=\boxed{\frac{39}{8}}$ $\frac{y}{BD}=\frac{KD}{y}$ $KD=\frac{y^2}{BD}$ ~~$\frac{x}{y}=\frac{CD\cdot BD}{y^2}$~~

$4R^2=\frac{81\cdot169}{144}$ $4R^2\left(1-\frac{25}{169}\right)=81$ $81+\frac{18^2}{13^2}\cdot\frac{25}{9^2}R^2=4R^2$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

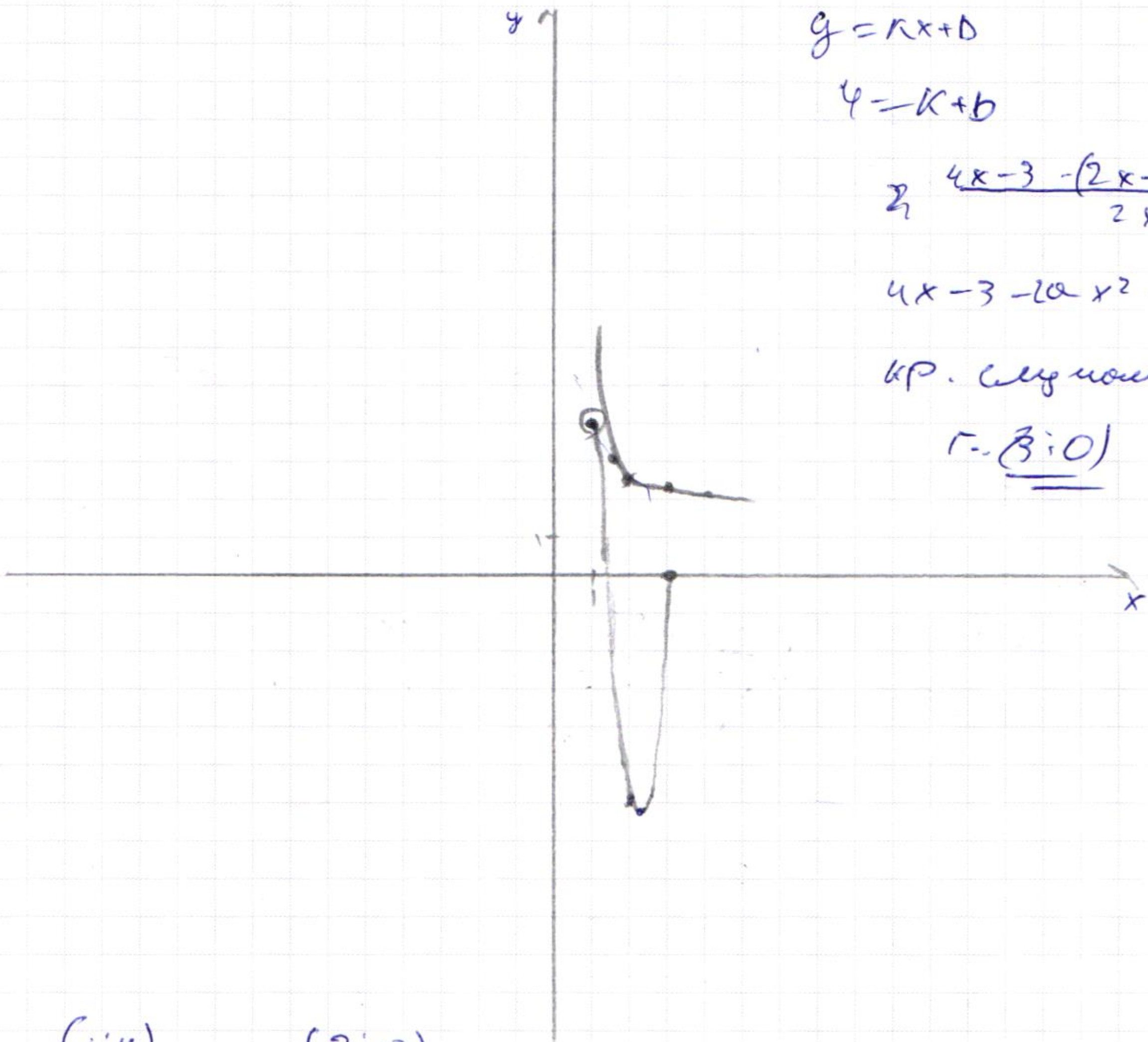
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$y = kx + b$

$4 = k + b$

$\frac{4x-3-(2x-2)(ax+b)}{2x-2} = 0$

$4x - 3 - 2ax^2 - 2xb + 2ax + 2b$

кр. случаи

т. $(3;0)$ и кас.

$(1;4)$ $(3;0)$

$(3;2\frac{1}{4})$

$4 = k + b$ ~~$k = 4 - b$~~ $b = 4 - k$

$0 = 3k + b$ $3k + 4 - k = 4 - 2k = 0$

$k = 2$ $b = 2$

$\begin{cases} a = k \\ b = 4 - k \end{cases}$ $k \in \boxed{[-\frac{7}{8}; 2]}$

$\frac{9}{4} = 3k + b$

$b = \frac{9}{4} - 3k$

$-2k = \frac{7}{4}$

$4 = k + 3k + \frac{9}{4}$

$b = 4\frac{3}{8}$ $k = -\frac{7}{8}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(\frac{x}{y}) \geq 0 \qquad f(\frac{x}{y}) = f(x) + f(\frac{1}{y})$

$f(x) \geq 0 \quad x \geq 1$

$3^{\log_4 a} + a \geq |a|^{\log_4 a}$

$a = \log_4(x^2+6x)$

$3^a + 4^a \geq (4^a)^{\log_4 5}$

$(4^a)^{\log_4 5} = 4^{a \log_4 5} = 4^{\log_4 5^a}$

$= 5^a$

$3^a + 4^a \geq 5^a$

$0{,}6^a + 0{,}8^a \geq 1$

$0{,}6^a \geq 1 - 0{,}8^a$

$PS = \sqrt{2}$

$(x+3)^2 - 25$

$(x+8)(x-2) \geq 0$

$a \geq 2$