МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}, \\ x^2+9y^2-4x-18y=12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2\geqslant\left|x^2+18x\right|^{\log_{12}13}-18x.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=8$, $BD=17$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1\leqslant x\leqslant 24$, $1\leqslant y\leqslant 24$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x+11}{4x+3}\leqslant ax+b\leqslant -8x^2-30x-17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4};-\frac{3}{4}\right)$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB=1$, $BD=2$, $CD=3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

$$\begin{cases} \sin 2\alpha \cos 2\beta + \sin 2\beta \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5} \Rightarrow \cos 2\beta = \dfrac{-\frac{1}{\sqrt5} - \sin 2\beta \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} \\ \frac{-\cos 2\beta}{\sqrt5} \pm \frac{2\sin 2\beta}{\sqrt{\sqrt5}} + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5} \end{cases}$$

$$\cos 2\beta = \frac{-\frac{1}{\sqrt5} - \sin 2\beta \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} \Rightarrow \sin 2\beta = \sqrt{1 - \left(\frac{-\frac{1}{\sqrt5} - \sin 2\beta \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}\right)^2}$$

$$\sin^2 2\beta = 1 - \frac{\frac{1}{5} + \frac{2}{\sqrt5}\sin 2\beta \cos 2\alpha + \sin^2 2\beta \cdot \cos^2 2\alpha}{\sin^2 2\alpha}$$

$$\sin^2 2\beta \cdot \sin^2 2\alpha = \sin^2 2\alpha - \frac{1}{5} - \frac{2}{\sqrt5}\sin 2\beta \cos 2\alpha + \sin^2 2\beta \cos^2 2\alpha$$

$$\sin^2 2\beta (\sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha) = \sin^2 2\alpha - \frac{2}{\sqrt5}\sin 2\beta \cos 2\alpha - \frac{1}{5}$$

$$\sin^2 2\beta + \frac{2}{\sqrt5}\sin 2\beta \cos 2\alpha + \frac{1}{5} - \sin^2 2\alpha = 0$$

~~$D/4 = \frac{1}{5}\cdot\cos^2 2\alpha - \frac{1}{5} = \frac{1}{5}(\cos^2 2\alpha - 1) = \frac{1}{5}\cdot(\sin^2 2\alpha)$, чтоб решение достигалось $D/4 \geq 0 \Rightarrow -\frac{1}{5}\sin^2 2\alpha \geq 0 \Rightarrow \sin^2 2\alpha = 0 \Rightarrow$~~

~~$\Rightarrow \sin 2\alpha = 0$.~~

~~$2\sin 2\cos 2\alpha = 0 \Rightarrow \begin{cases}\sin\alpha = 0 \\ \cos\alpha = 0\end{cases}$ $tg\alpha$ определен $\Rightarrow \cos\alpha \neq 0 \Rightarrow$~~

~~$\Rightarrow \sin 2 = 0$~~

$$D/4 = \frac{1}{5}\cos^2 2\alpha - \frac{1}{5} + \sin^2 2\alpha = \frac{1}{5}\cdot(-\sin^2 2\alpha) + \sin^2 2\alpha =$$

$$= \frac{4}{5}\sin^2 2\alpha$$

$$\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt5} \pm \frac{2}{\sqrt5}\cdot\sin 2\alpha$$

$$\cos 2\beta = \frac{-\frac{1}{\sqrt5} - \left(-\frac{1}{\sqrt5} \pm \frac{2}{\sqrt5}\sin 2\alpha\right)\cdot\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{-\frac{1}{\sqrt5} + \left(\frac{1}{\sqrt5} \mp \frac{2}{\sqrt5}\sin 2\alpha\right)\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} =$$

$$= \frac{-\frac{1}{\sqrt5} + \frac{\cos 2\alpha}{\sqrt5} \pm \frac{2}{\sqrt5}\sin 2\alpha\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}$$

$\frac{12x+11}{4x+3} \leq \cancel{a}x + 6 \quad \leq -8x - 30 - 17$

5, 3; 7 + 8 = 136; 225 − 136 = 89

77 + 361 601 42 123 =

202136 = 236

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\frac{34}{4}$ $\quad 136$ $\qquad$ №1 $\qquad$ $15+11+15=165$

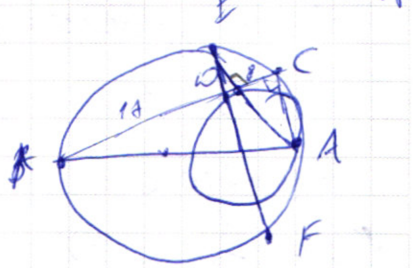
$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5} \Rightarrow \cos(2\alpha+2\beta) = \pm\frac{2}{\sqrt5} \\ \sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5} \end{cases}$$

$$\sin(2\alpha+4\beta) = \sin((2\alpha+2\beta)+2\beta) = \sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta + \cos(2\alpha+2\beta)\cdot\sin 2\beta = -\frac{\cos 2\beta}{\sqrt5} \pm \frac{2}{\sqrt5}\sin 2\beta$$

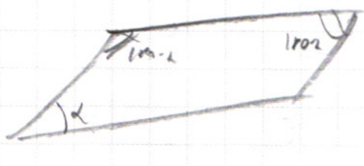
Получаем:

$$a^{x\,\prime} = \ln a \cdot a^x \qquad 144+81=225 \qquad 165-121=44 \qquad 134 \quad 29$$

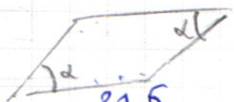
$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5} \\ -\frac{\cos 2\beta}{\sqrt5} \pm \frac{2}{\sqrt5}\sin 2\beta + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5} \end{cases}$$



$$\begin{cases} \sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5} \\ -\frac{\cos 2\beta}{\sqrt5} \pm \frac{2}{\sqrt5}\sin 2\beta + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5} \end{cases}$$



$$\begin{cases} \sin 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5} \\ \left[\begin{array}{l} -\frac{1}{\sqrt5}\left(\cos 2\beta + \frac{2}{\cancel{\sqrt5}}\sin 2\beta\right) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5} \\ -\frac{1}{\sqrt5}(\cos 2\beta - 2\sin 2\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5} \end{array}\right. \end{cases}$$



$385-88=297$ $\quad 24$

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5} \\ \left[\begin{array}{l} -\frac{1}{\sqrt5}\cdot\sqrt5\left(\frac{1}{\sqrt5}\cos 2\beta + \frac{2}{\sqrt5}\sin 2\beta\right) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5} \\ -\frac{1}{\sqrt5}\cdot\sqrt5\left(\frac{1}{\sqrt5}\cos 2\beta - \frac{2}{\sqrt5}\sin 2\beta\right) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5} \end{array}\right. \end{cases}$$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$$\begin{cases} \sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5} \\ \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5} \Rightarrow \cos(2\alpha + 2\beta) = \pm\frac{2}{\sqrt5} \\ \sin((2\alpha + 2\beta) + 2\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5} \\ \sin(2\alpha + 2\beta)\cdot\cos 2\beta + \cos(2\alpha + 2\beta)\cdot\sin 2\beta + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5} \\ \left[\begin{array}{l} -\frac{1}{\sqrt5}\cos 2\beta + \frac{2}{\sqrt5}\sin 2\beta + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5} \\ -\frac{1}{\sqrt5}\cos 2\beta - \frac{2}{\sqrt5}\sin 2\beta + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5} \end{array} \right. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin 2\alpha \cos 2\beta + \sin 2\beta \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5} \\ \left[\begin{array}{l} -\frac{1}{\sqrt5}\cos 2\beta + \frac{2}{\sqrt5}\sin 2\beta + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5} \\ -\frac{1}{\sqrt5}\cos 2\beta - \frac{2}{\sqrt5}\sin 2\beta + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5} \end{array} \right. \end{cases}$$

Заметим, что ~~[illegible]~~ $\cos\alpha \neq 0$, а $tg\,\alpha$ определен

$$\cos 2\beta = \frac{-\frac{1}{\sqrt5} - \sin 2\beta \cdot \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}$$

$$\sin^2 2\beta = 1 - \cos^2 2\beta$$

Значений $(tg\,\alpha)$, было 2, но если $\sin 2\alpha = 0$, то ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~

$tg\,\alpha = 0.$

$$\sin^2 2\beta = 1 - \left(\frac{-\frac{1}{\sqrt5} - \sin 2\beta \cdot \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}\right)^2$$

$$\sin^2 2\beta = 1 - \frac{\frac{1}{5} + \frac{2}{\sqrt5}\sin 2\beta\cos 2\alpha + \sin^2 2\beta\cos^2 2\alpha}{\sin^2 2\alpha}$$

$$\sin^2 2\beta \cdot \sin^2 2\alpha = \sin^2 2\alpha - \frac{1}{\sqrt5} - \frac{2}{\sqrt5}\sin 2\beta\cos 2\alpha - \sin^2 2\beta\cos^2 2\alpha$$

$$\sin^2 2\beta(\sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha) + \frac{2}{\sqrt5}\sin 2\beta\cos 2\alpha + \frac{1}{5} - \sin^2 2\alpha = 0$$

$$\sin^2 2\beta + \frac{2}{\sqrt5}\sin 2\beta\cos 2\alpha + \frac{1}{5} - \sin^2 2\alpha = 0$$

$$D/4 = \frac{\cos^2 2\alpha}{5} - \frac{1}{5} + \sin^2 2\alpha = \frac{1}{5}(\cos^2 2\alpha - 1) + \sin^2 2\alpha =$$

$$= -\frac{1}{5}\cancel{\cos^2\alpha}\sin^2 2\alpha + \sin^2 2\alpha = \frac{4}{5}\sin^2 2\alpha$$

$$\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt5}\cos 2\alpha \pm \frac{2}{\sqrt5}\sin 2\alpha$$

1

$$\begin{cases}\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt5}\cos 2\alpha + \frac{2}{\sqrt5}\sin 2\alpha \\ \cos 2\beta = \dfrac{-\frac{1}{\sqrt5} - \left(-\frac{1}{\sqrt5}\cos 2\alpha + \frac{2}{\sqrt5}\sin 2\alpha\right)\cdot\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} =\end{cases}$$

$$= \frac{-\frac{1}{\sqrt5} + \frac{1}{\sqrt5}\cos^2 2\alpha - \frac{2}{\sqrt5}\sin 2\alpha\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}$$

$$\left[\begin{array}{l} -\frac{1}{\sqrt5}\cdot\dfrac{-\frac{1}{\sqrt5} + \frac{1}{\sqrt5}\cos^2 2\alpha - \frac{2}{\sqrt5}\sin 2\alpha\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} + \frac{2}{\sqrt5}\cdot \\ \cdot\left(-\frac{1}{\sqrt5}\cos 2\alpha + \frac{2}{\sqrt5}\sin 2\alpha\right) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5} \\ -\frac{1}{\sqrt5}\cdot\dfrac{-\frac{1}{\sqrt5} + \frac{1}{\sqrt5}\cos^2 2\alpha - \frac{2}{\sqrt5}\sin 2\alpha\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} - \frac{2}{\sqrt5}\cdot \\ \cdot\left(-\frac{1}{\sqrt5}\cos 2\alpha + \frac{2}{\sqrt5}\sin 2\alpha\right) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}\end{array}\right.$$

$$\frac{\frac{1}{5} - \frac{1}{5}\cos^2 2\alpha + \frac{2}{5}\sin 2\alpha\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} - \frac{2}{5}\cos 2\alpha + \frac{4}{5}\sin 2\alpha +$$

$$+ \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$$

$$\frac{1}{5} - \frac{1}{5}\cos^2 2\alpha + \frac{2}{5}\cancel{\sin 2\alpha\cos 2\alpha} - \frac{2}{5}\cancel{\cos 2\alpha\sin 2\alpha} + \frac{4}{5}\sin^2 2\alpha +$$

$$+ \sin^2 2\alpha = -\frac{4}{5}\sin 2\alpha$$

$$-\frac{1}{5}\sin^2 2\alpha + \frac{4}{5}\sin^2 2\alpha + \sin^2 2\alpha + \frac{4}{5}\sin 2\alpha = 0. \quad = \sin 2\alpha\left(\frac{4}{5} + \frac{8}{5}\sin 2\alpha\right) = 0$$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1 (продолжение)

получим $\left[\begin{array}{l}\sin 2\alpha = 0 \text{ ; данный случай уже рассмотрен} \Rightarrow tg\alpha = 0. \\ \sin 2\alpha = -\frac{1}{2} \Rightarrow tg\alpha = -tg\left(\frac{\pi}{12}\right)\end{array}\right.$

$\cdot\ \cancel{\frac{1}{5}} - \cancel{\frac{1}{5}}\cos^2 2\alpha + \frac{2}{5}\sin 2\alpha\cos 2\alpha + \frac{2}{5}\cos 2\alpha\sin 2\alpha - \cancel{\frac{4}{5}\sin^2 2\alpha} +$

$+ \cancel{\sin^2 2\alpha} = -\frac{4}{5}\sin 2\alpha$

$\frac{4}{5}\sin 2\alpha\cos 2\alpha + \frac{4}{5}\sin 2\alpha = 0$

$\left[\begin{array}{l}\sin 2\alpha = 0 \\ \cos 2\alpha = -1 \Rightarrow \cancel{tg\alpha} \quad 2\alpha = \pi + 2\pi k \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} + \pi k \Rightarrow tg\alpha = 0. \\ \qquad k \in \mathbb{Z}\end{array}\right.$

② $\begin{cases}\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}\cos 2\alpha - \frac{2}{\sqrt{5}}\sin 2\alpha \\ \cos 2\beta = \dfrac{-\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}}\cos^2 2\alpha + \frac{2}{\sqrt{5}}\sin 2\alpha\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}\end{cases}$

$-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\dfrac{-\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}}\cos^2 2\alpha + \frac{2}{\sqrt{5}}\sin 2\alpha\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}\right) + \frac{2}{\sqrt{5}}\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\cos 2\alpha - \frac{2}{\sqrt{5}}\sin 2\alpha\right) =$

$\cancel{\sin}\frac{4}{5} + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$\frac{1}{5} - \frac{1}{5}\cos^2 2\alpha - \frac{2}{5}\sin 2\alpha\cos 2\alpha - \frac{2}{5}\cos 2\alpha\sin 2\alpha -$

$-\frac{4}{5}\sin^2 2\alpha + \sin^2 2\alpha = -\frac{4}{5}\sin^2 2\alpha$

~~$2\sin^2 2\alpha - \frac{4}{5}\sin 2\alpha\cos 2\alpha = 0.$~~

~~$2tg^2 2\alpha - \frac{4}{5}tg 2\alpha \quad 2tg^2 2\alpha - \frac{4}{5}tg 2\alpha = 0.$~~

~~$\left[\begin{array}{l}tg 2\alpha = 0 \\ tg 2\alpha =\end{array}\right.$~~

$\frac{1}{5}\sin^2 2\alpha - \frac{4}{5}\sin 2\alpha\cos 2\alpha - \frac{4}{5}\sin^2 2\alpha + \sin^2 2\alpha + \frac{4}{5}\sin 2\alpha = 0$

$\sin 2\alpha\left(\frac{2}{5}\sin 2\alpha - \frac{4}{5}\cos 2\alpha + \frac{4}{5}\right) = 0$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №3 (Нумеровать только чистовики)

№1 (продолжение)

$$\left[\begin{array}{l} \sin 2\alpha = 0 \quad \text{рассмотрено} \\ \frac{2}{5}\sin 2\alpha - \frac{4}{5}\cos 2\alpha = -\frac{4}{5} \end{array}\right.$$

$$\sin 2\alpha - 2\cos 2\alpha = -2$$

$$\sqrt{5}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\sin 2\alpha - \frac{2}{\sqrt{5}}\cos 2\alpha\right) = -2$$

$$\sin\left(2\alpha - \arccos\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = -\frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2\alpha = \arccos\frac{1}{\sqrt{5}} + \arcsin\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ 2\alpha = \pi - \arccos\frac{1}{\sqrt{5}} - \arcsin\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\left(\frac{\arccos\frac{1}{\sqrt{5}} + \arcsin\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)}{2}\right)$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi - \arccos\frac{1}{\sqrt{5}} + \arcsin\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)}{2}\right)$$

Аналогично рассматривается случай, когда

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\cos 2\beta - \frac{2}{\sqrt{5}}\sin 2\beta + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$$

Ответ: $\operatorname{tg}\alpha = 0$; $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\left(\frac{\arccos\frac{1}{\sqrt{5}} + \arcsin\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)}{2}\right)$

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi - \arccos\frac{1}{\sqrt{5}} + \arcsin\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)}{2}\right)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} \\ (x-2)^2+9(y-1)^2=12+4+9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} \\ (x-2)^2+9(y-1)^2=25 \end{cases}$$

Рассмотрим $(x-2)\cdot(y-1)=xy-2y-x+2$ – в точности равно подкоренному выражению

Замена: Пусть

$$\begin{cases} a=x-2 \\ b=y-1 \end{cases} \Rightarrow x-2y=a-2b \ ; \quad xy-2y-x+2=ab$$

$$\begin{cases} a-2b=\sqrt{ab} \\ a^2+9b^2=25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-2b\geq 0 \\ a^2-4ab+4b^2=ab \\ a^2+9b^2=25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a-2b\geq 0 \\ a^2+4b^2=5ab \\ a^2+9b^2=25 \end{cases} \Rightarrow a^2-5ab+4b^2=0 \quad D=25b^2-16b^2=9b^2$$

$$a_{1,2}=\frac{5b\pm 3b}{2}$$

(№2 продолжение)

$$\begin{cases} a-2b\geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} a=4b \\ a=b \end{array}\right. \\ a^2+9b^2=25 \end{cases}$$

Заметим, что $b\neq 0$ т.к. если $b=0$, то $a=0$, но тогда $a^2+9b^2=25$ не выполняется.

① $\begin{cases} a=b \\ a-2b\geq 0 \\ a^2+9b^2=25 \Rightarrow 10b^2=25 \Rightarrow b^2=\dfrac{5}{2} \Rightarrow b=\pm\dfrac{\sqrt5}{\sqrt2} \end{cases}$

Если $b=\dfrac{\sqrt5}{\sqrt2}$, то $a=\dfrac{\sqrt5}{\sqrt2}$, но тогда $a-2b=\dfrac{\sqrt5}{\sqrt2}-\dfrac{2\sqrt5}{\sqrt2}<0 \Rightarrow$
$\Rightarrow b=\dfrac{\sqrt5}{\sqrt2}$ не подходит.

$b=-\dfrac{\sqrt5}{\sqrt2}$; $a=-\dfrac{\sqrt5}{\sqrt2}$

② $\begin{cases} a-2b\geq 0 \\ a=4b \\ a^2+9b^2=25 \end{cases} \Rightarrow 16b^2+9b^2=25 \Rightarrow b=\pm 1$

Если $b=-1$, то $a=-4$, но тогда $a-2b=-4+2<0 \Rightarrow$
$\Rightarrow b=-1$ не подходит $\Rightarrow b=1$; $a=4$

Обратная замена:

① $\begin{cases} a=-\dfrac{\sqrt5}{\sqrt2} \\ b=-\dfrac{\sqrt5}{\sqrt2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-2=-\dfrac{\sqrt5}{\sqrt2} \\ y-1=-\dfrac{\sqrt5}{\sqrt2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2-\dfrac{\sqrt5}{\sqrt2} \\ y=1-\dfrac{\sqrt5}{\sqrt2} \end{cases}$

② $\begin{cases} a=4 \\ b=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-2=4 \\ y-1=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=6 \\ y=2 \end{cases}$

Ответ: $\left(2-\dfrac{\sqrt5}{\sqrt2}; 1-\dfrac{\sqrt5}{\sqrt2}\right)$; $(6;2)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13}-18x$$

Заметим, что по ограничениям логарифма $x^2+18x>0 \Rightarrow$
$\Rightarrow$ модуль $|x^2+18x|$ раскрывается со знаком „+“

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geq (x^2+18x)^{\log_{12}13}-18x$$

Пусть $x^2+18x=t$; $t>0$

$$5^{\log_{12}t}+t \geq t^{\log_{12}13}$$

$$12^{\log_{12}5\cdot\log_{12}t}+t \geq t^{\log_{12}13}$$

$$t^{\log_{12}5}+t \geq t^{\log_{12}13}$$

$$t\left(t^{\log_{12}5-1}-t^{\log_{12}13-1}+1\right)\geq 0$$

$$t\left(t^{\log_{12}\frac{5}{12}}-t^{\log_{12}\frac{13}{12}}+1\right)\geq 0;\ t>0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t^{\log_{12}\frac{5}{12}}-t^{\log_{12}\frac{13}{12}}+1\geq 0$$

$$\left(\frac{5}{12}\right)^{\log_{12}t}-\left(\frac{13}{12}\right)^{\log_{12}t}+1\geq 0$$

Пусть $\log_{12}t = a$

$$\left(\frac{5}{12}\right)^{a}-\left(\frac{13}{12}\right)^{a}+1\geq 0$$

№3 (продолжение)

$5^a - 13^a + 12^a \geq 0$

$5^a + 12^a \geq 13^a$

Рассмотрим $f(a) = 5^a + 12^a - 13^a$

$f'(a) = 5^a \cdot \ln 5 + 12^a \cdot \ln 12 - \ln 13 \cdot 13^a < 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow f(a) \downarrow \Rightarrow$ у ур-ния $5^a + 12^a - 13^a = 0$ не более 1 кор. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Заметим, что $a = 2$ подходит: $25 + 144 - 169 = 0$. Что $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ при $a \leq 2$ верно, что $5^a - 13^a + 12^a \geq 0$.

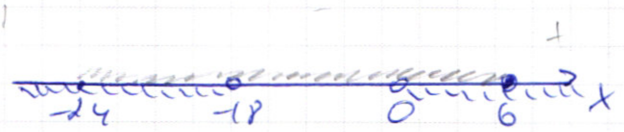
Обратная замена:

$a \leq 2 \Rightarrow \log_{12} t \leq 2 \Rightarrow \begin{cases} t \leq 12^2 \\ t > 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} x^2 + 18x \leq 12^2 \\ x^2 + 18x > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + 18x - 144 \leq 0 \\ x(x+18) > 0 \end{cases} \quad D/4 = 81 + 144 = 225 = 15^2 \Rightarrow x_{1,2} = -9 \pm 15$$

$$\begin{cases} (x + 9 - 15)(x + 9 + 15) \leq 0 \\ x(x+18) > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x - 6)(x + 24) \leq 0 \\ x(x+18) > 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} x \in [-24; 6] \\ x \in (-\infty; -18) \cup (0; +\infty) \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow x \in [-24; -18) \cup [0; 6]$. Ответ: $x \in [-24; -18) \cup (0; 6]$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5

$$\begin{cases} 1 \le x \le 24 \\ 1 \le y \le 24 \\ f\left(\frac{x}{y}\right) < 0 \end{cases}$$

$f(ab) = f(a) + f(b) \Rightarrow$

$\Rightarrow f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$

$f(p) = \left[\frac{p}{4}\right]$

$f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) < 0$

$f(p) = \left[\frac{p}{4}\right]$

$f(p) = f(1) + f(p) \Rightarrow f(1) = 0$

$f(1) = f\left(t \cdot \frac{1}{t}\right) = f(t) + f\left(\frac{1}{t}\right) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow f\left(\frac{1}{t}\right) = -f(t) \Rightarrow f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) = f(x) - f(y)$

$f(x) - f(y) < 0 \Rightarrow f(x) < f(y)$

Рассмотрим все простые числа $1 \le p \le 24$:

$\{2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23\}$

при $p = \{2; 3\}$ $\left[\frac{p}{4}\right] = 0$

при $p = \{5; 7\}$ $\left[\frac{p}{4}\right] = 1$

при $p = \{11\}$ $\left[\frac{p}{4}\right] = 2$

при $p = \{13\}$ $\left[\frac{p}{4}\right] = 3$

при $p = \{17; 19\}$ $\left[\frac{p}{4}\right] = 4$

при $p = 23$ $\left[\frac{p}{4}\right] = 5$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Рассмотрим функции от всех составных аргументов $\in [1;24]$

$f(4)=f(2)+f(2)=0$, т.к. $f(2)=\left[\frac{2}{5}\right]=0$.

$f(6)=f(3)+f(2)=0$

$f(8)=3f(2)=0$

$f(9)=2f(3)=0$

$f(10)=f(5)+f(2)=1$

$f(12)=f(3)+2f(2)=0$

$f(14)=f(2)+f(7)=1$

$f(15)=f(5)+f(3)=1$

$f(16)=4f(2)=0$

$f(18)=f(2)+2f(3)=0$

$f(20)=2f(2)+f(5)=1$

$f(21)=f(3)+f(7)=1$

$f(22)=f(11)+f(2)=2$

$f(24)=f(3)+3f(2)=0$.

$f(x)<f(y)$

при $y=23$, т.е. единств. значении $\exists$ 23 икс: $f(x)<f(y)$, т.к. $f(23)$ - max.

при y: $f(y)=4$, т.е. 2 значения $\exists$ 21 знач x: $f(x)<f(y)$

при y: $f(y)=3$, т.е. 1 знач $\exists$ 20 знач x: $f(x)<f(y)$

при y: $f(y)=2$, т.е. 2 знач $\exists$ 18 знач x: $f(x)<f(y)$

при y: $f(y)=1$, т.е. 7 знач $\exists$ 11 знач x: $f(x)<f(y)$

при y: $f(y)=0$ $\varnothing$ знач x: $f(x)<f(y)$, т.к. $f(y)=0$ - минимум.

Ответ: $23+2\cdot 21+3\cdot 20+2\cdot 18+7\cdot 11=238$

для каждого отд. случая с $f(y)=const$ учитываем кол-во подх. y на кол-во подх. x, т.к. для $\forall y$: $f(x)<f(y)$; отдельные случаи складывали в силу независимости.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6

$$\frac{12x+11}{4x+3} \le ax+b \le -8x^2-30x-17$$

Построим графики функций, ограничивающих $ax+b$:

$f(x)=\frac{12x+11}{4x+3}$ $\qquad \frac{12x+11}{4x+3}=0 \Rightarrow x=-\frac{11}{12}$

асимптот: $x=-\frac{3}{4}$ $\qquad f\left(-\frac{11}{4}\right)=\frac{-33+11}{-11+3}=\frac{-22}{-8}=\frac{11}{4}$

$y=3$

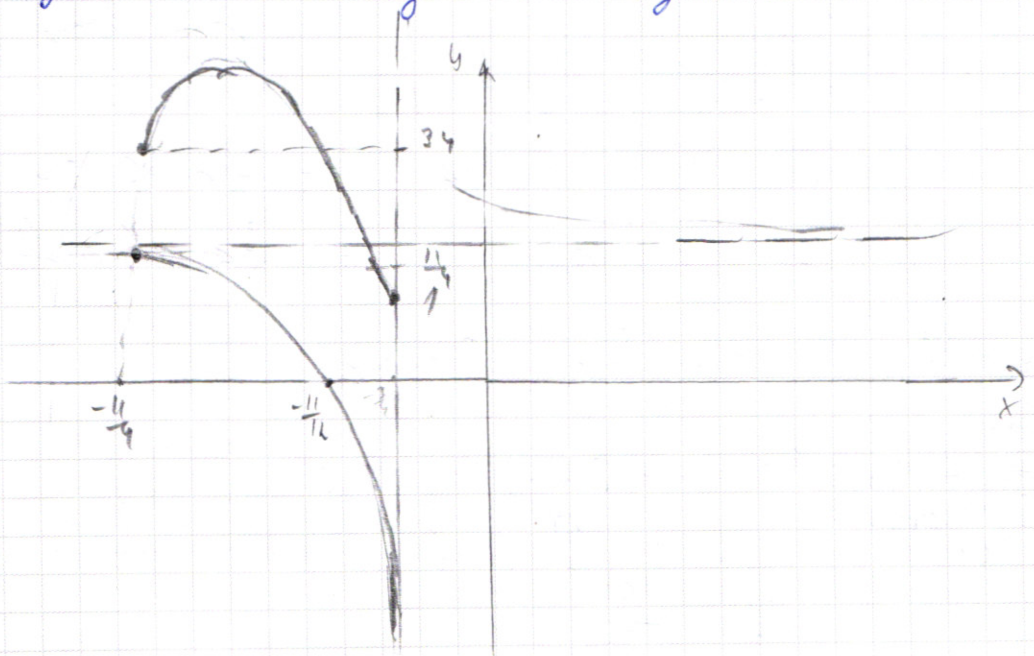
$g(x)=-8x^2-30x-17$ $\qquad -8x^2-30x-17=0$

$x_в=\frac{30}{-16}=-\frac{15}{8}$ $\qquad 8x^2+30x+17=0 \quad \frac{D}{4}=15^2-8\cdot17=89$

$x_{1,2}=\frac{-15\pm\sqrt{89}}{8}$; $x=\frac{-15-\sqrt{89}}{8}<-\frac{11}{4}$

$y_в=-8\cdot\left(\frac{-15}{8}\right)^2-30\cdot\frac{-15}{8}-17=-\frac{225}{8}+\frac{2\cdot225}{8}-17=$

$=\frac{225}{8}-17=\frac{225-136}{8}=\frac{89}{8}$



$g(-\frac{11}{4}) = -8\cdot\left(\frac{11}{4}\right)^2 + \frac{30\cdot 11}{4} - 17 =$

$= -8\cdot\frac{121}{16} + \frac{15\cdot 11}{2} - 17 = \frac{-121}{2} + \frac{15\cdot 11}{2} - 17 = \frac{165-121+34}{2} =$

$= 34$

$g(-\frac{3}{4}) = -8\cdot\frac{9}{16} + \frac{30\cdot 3}{4} - 17 = -\frac{9}{2} + \frac{45}{2} - 17 =$

$= 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ нам подходят ~~внутри точки от~~ все прямые $ax+b$, ~~то~~ проходящие через точки $(-\frac{11}{4}; 34)$ и $(-\frac{3}{4}; 4)$ до ~~От~~ прямой ~~проходящей касающейся параболы сверху~~, до касания с гиперболой ~~прямой, касающейся гиперболы сверху~~ снизу.

~~Рассмотрим касание с параболой:~~

~~$-8x^2-30x-17 = ax+b$~~

~~$+8x^2+30x+17+ax+b=0$~~

~~$8x^2+x(30+a)+17+b=0$~~

~~$D=0$ для касания $\Rightarrow D=(30+a)^2-4\cdot 8(17+b)=0$ при этом касание должно произойти при $x\in[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4})\Rightarrow$~~

~~$\Rightarrow \begin{cases} -\frac{30+a}{16}\in[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}) \\ (30+a)^2 = 4(17+b) \end{cases} \Rightarrow 30+a = \pm 2\sqrt{17+b} \Rightarrow \begin{cases} 30+a = 2\sqrt{17+b} \\ -\frac{30+a}{16}\in[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}) \end{cases}$~~

$ax+b$: $\begin{cases} (-\frac{11}{4}; 34)\in ax+b \\ (-\frac{3}{4}; \frac{11}{4})\in ax+b \end{cases}$ $-\begin{cases} -\frac{11}{4}a+b=34 \\ -\frac{3}{4}a+b=\frac{11}{4} \end{cases}$

Заметим, что ~~$\frac{3}{4}$~~ $-\frac{11}{4}a+\frac{3}{4}a = 34-\frac{11}{4}$

прямая $y=\frac{-125}{8}x-\frac{251}{32}$ в точке $-8a = 4\cdot 34-11 = 125$

[illegible] касается к графику $y=\frac{12x+11}{4x+13}$ $a=-\frac{125}{8} \Rightarrow b=\frac{11}{4}a-\frac{125\cdot 3}{32}$

$b=-\frac{251}{32}$

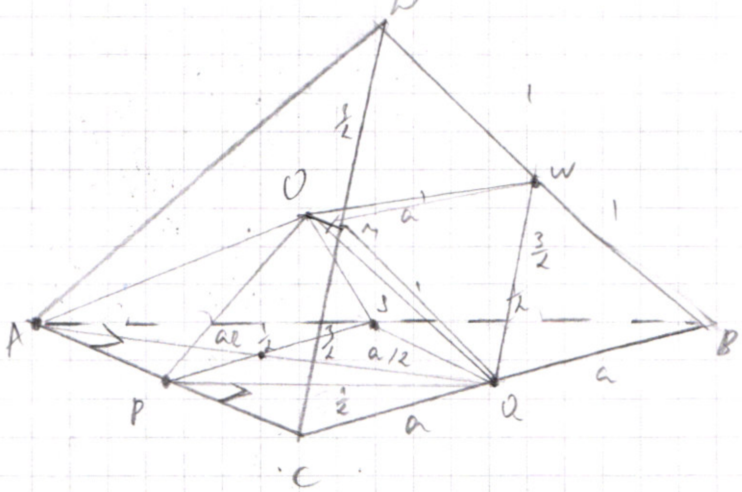
Ответ: $a=\frac{-125}{8}$ $b=-\frac{251}{32}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№7



Пусть O - центр сферы; $PA = PC$; $CQ = QB$; $AS = SB$

Рассмотрим $APQS$: $AP \parallel SQ$; $AS \parallel PQ$, т.к. SQ; PQ - ср. линии $\triangle ABC$.

По условию точки A, P, Q, S лежат на сфере $\Rightarrow$ точка O проецируется в центр описанной окр. около $APQS$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ около $APQS$ можно описать окружность $\Rightarrow$ $APQS$ - прямоугольник $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle BAC = 90°$. Пусть $BC = 2a \Rightarrow CQ = QB = a \Rightarrow MW = a$, где MW - ср. лин $\triangle COB$; $WQ = \frac{3}{2} \Rightarrow MQ = 1$

~~Рассмотрим $\triangle APQS$:~~