МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР ______________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}, \\ x^2+9y^2-4x-18y=12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2\geqslant \left|x^2+18x\right|^{\log_{12}13}-18x.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=8$, $BD=17$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1\leqslant x\leqslant 24$, $1\leqslant y\leqslant 24$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x+11}{4x+3}\leqslant ax+b\leqslant -8x^2-30x-17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4};-\frac{3}{4}\right)$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB=1$, $BD=2$, $CD=3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5

$f(ab)=f(a)+f(b) \Rightarrow f(t\cdot\frac{1}{t})=f(1)=f(t)+f(\frac{1}{t}) \Rightarrow$

$1\le x,y\le 24$

$f(\frac{1}{t})=f(1)-f(t)$

$f(\frac{x}{y})=f(x\cdot\frac{1}{y})=$

$f(1)=f(1\cdot 1)=f(1)+f(1)\Rightarrow f(1)=0\Rightarrow$

$f(\frac{1}{t})=-f(t)$

$=f(x)+f(\frac{1}{y})=$

$=f(x)-f(y)<0\Rightarrow$

$f(y)>f(x)$

$\forall p\in \mathbb{P}\; f(p)=\left[\frac{p}{4}\right]\Rightarrow f(2)=0;\; f(3)=0;\; f(5)=1;\; f(7)=1;$

$f(11)=2;\; f(13)=3;\; f(17)=4;\; f(19)=4;$

$f(23)=5$. Также

$f(4)=f(2\cdot2)=0;\; f(6)=f(2\cdot3)=0;\; f(8)=f(2\cdot4)=0$

$f(9)=f(3\cdot3)=0;\; f(10)=f(2\cdot5)=1;$

$f(12)=f(3\cdot4)=0;\; f(14)=f(2\cdot7)=1;$

$f(15)=f(3\cdot5)=1;\; f(16)=f(2\cdot8)=0;$

$f(18)=f(2\cdot9)=0;\; f(20)=f(2\cdot10)=1;$

$f(21)=f(3\cdot7)=1;\; f(22)=f(2\cdot11)=2;$

$f(24)=f(2\cdot12)=0.$

Из всего что написано справа след., что подходят след. пары:

все п., где $f(x)=0$, а $f(y)\neq 0$, таких $11\cdot13=143$;

все п., где $f(x)=1$, а $f(y)>1$, таких $7\cdot6=42$;

$(11;13);(11;17);(11;19);$ $(11;23);(22;13);(22;17);(22;19);(22;23);(13;17);(13;19);(13;23);$ $(17;23);(19;23)$.

Всего $143+42+13=198$

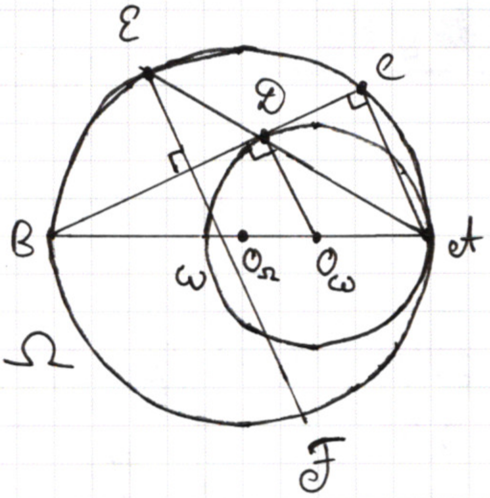
Ответ: 198.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

№4

$CD = 8;\ BD = 17$

$R_\Omega,\ R_\omega,\ \angle AFE,\ S_{AEF}$ — ?



$\angle BCA = 90^\circ$ (опир. на диам.)

$BD \perp DO_\omega$

$$\begin{cases} \cos(\angle ABC) = \dfrac{BD}{2R_\Omega - R_\omega} = \dfrac{BD + DC}{2R_\Omega} \\ (2R_\Omega - R_\omega)^2 = BD^2 + R_\omega^2 \end{cases}$$

$$\frac{17}{2R_\Omega - R_\omega} = \frac{17+8}{2R_\Omega} \Rightarrow 2R_\Omega \cdot 17 = 2R_\Omega \cdot 17 + 2R_\Omega \cdot 8 - R_\omega \cdot 17 - R_\omega \cdot 8 \Rightarrow$$

$$R_\omega \cdot 25 = R_\Omega \cdot 16 \rightarrow R_\omega = \frac{16}{25} R_\Omega$$

$$4R_\Omega^2 - 4R_\Omega R_\omega = BD^2 = 17^2 = 4R_\Omega^2 - 4R_\Omega^2 \cdot \frac{16}{25}$$

$$\frac{36}{25} R_\Omega^2 = 17^2 \Rightarrow \quad \frac{6}{5} R_\Omega = 17 \Rightarrow R_\Omega = \frac{85}{6} \Rightarrow R_\omega = \frac{16}{25} \cdot \frac{85}{6} = \frac{136}{15}.$$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

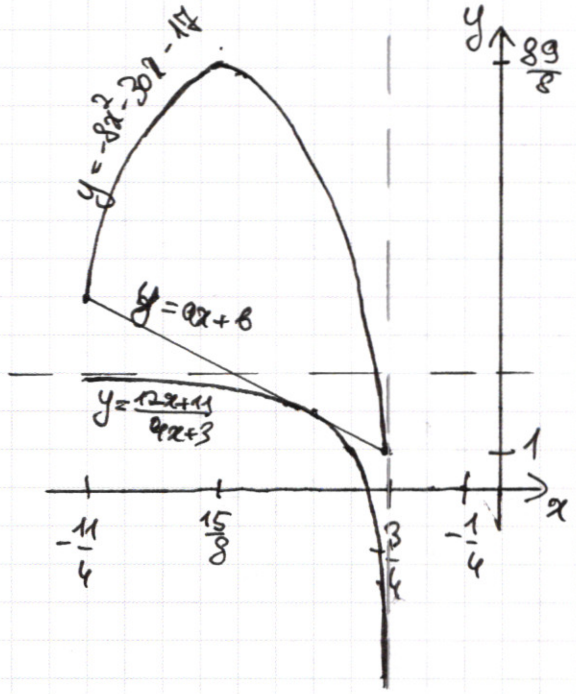
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6



$\frac{12x+11}{4x+3}=3+\frac{0,5}{x+\frac{3}{4}}$

$-8x^2-30x-17$ — параб., ветви вниз

$x_в=\frac{30}{2(-8)}=-\frac{7,5}{4}$

$y_в=-8\cdot\frac{225}{64}+30\cdot\frac{15}{8}-17=$

$=\frac{89}{8}$

$x=-\frac{11}{4}: -8\left(\frac{121}{16}\right)-30\left(-\frac{11}{4}\right)-17=5$

$x=-\frac{3}{4}: -8\cdot\frac{9}{16}-30\left(-\frac{3}{4}\right)-17=1$

прямая $ax+b$, прох. через эти точки: $a=-2$; $b=-\frac{1}{2}$

пусть $f(x)=\frac{12x+11}{4x+3}=3+\frac{0,5}{x+\frac{3}{4}}$ уравн. кас. в $x_0=-\frac{5}{4}$.

$y_{кас}=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$; $f'(x)=-\frac{1}{2}\left(x+\frac{3}{4}\right)^{-2}=-\frac{1}{2\left(x+\frac{3}{4}\right)^2}$

$y_{кас}=-\frac{1}{2\left(-\frac{5}{4}+\frac{3}{4}\right)^2}\left(x+\frac{5}{4}\right)+3-1=-2\left(x+\frac{5}{4}\right)+2=-2x+2-\frac{5}{2}=-2x-\frac{1}{2}$,

то есть выбранная $ax+b$ совпадает с касательной ⟹ других $ax+b$, удв. условию, быть не может. (каждая прямая для левого условия является высшей для правого) ⟹ единственная пара $(a;b)$ — $\left(-2;-\frac{1}{2}\right)$

ответ: $\left(-2;-\frac{1}{2}\right)$.

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

№2

$$\begin{cases} x-2y\geq 0 \\ xy-x-2y+2\geq 0 \\ (x-2y)^2=xy-x-2y+2 \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\geq 2y \\ (x-2)(y-1)\geq 0 \\ (x-2y)^2=(x-2)(y-1) \\ (x+3y)^2=(x+3)(6y+4) \end{cases}$$

$\ominus \Rightarrow (x+3y)^2-(x-2y)^2=5y(2x+y)=$

$=-10+5x+5xy+20y$

$5y(2x+y)=5y(x+4)+5(x+2)$

$y(x+y-4)=x+2$

$y^2+(x-4)y-(x+2)=0$

$y=\frac{4-x\pm\sqrt{x^2-8x+16+4x+8}}{2}=\frac{4-x\pm\sqrt{x^2-4x+24}}{2}$

$9y^2-18y+x^2-4x-12=0$

$y=\frac{9\pm\sqrt{81-9x^2+36x+108}}{9}=1\pm\frac{\sqrt{-9x^2+36x+189}}{9}$

$x\geq 4-x\pm\sqrt{x^2-4x+24}\Rightarrow 2x-4\geq\pm\sqrt{x^2-4x+24}$

$x\geq 2:\ \ 2x-4\geq\sqrt{x^2-4x+24}=\sqrt{(x-2)^2+20}\Rightarrow x\geq 2+2\sqrt{\frac{5}{3}}$

$x\leq 2:\ \ 2x-4\geq-\sqrt{x^2-4x+24}\Rightarrow x\geq 2-2\sqrt{\frac{5}{3}}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\cancel{\sin(2\alpha)+}\ \sin(2\alpha+2\beta)=$

$=\sin(2\alpha)\cos(2\beta)+\cos(2\alpha)\sin(2\beta)=$

$=2\sin(\alpha)\cos(\alpha)\cos(2\beta)+2\sin(\beta)\cos(\beta)\sin(2\beta)$

$\sin(2\alpha)=2\sin(\alpha)\cos(\alpha)=$

$=\sin(\alpha)\cos(\alpha)+\cos(\alpha)$

$\sin(\alpha)$

$\sqrt{1-\frac{1}{5}}=\sqrt{\frac{4}{5}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin(2\alpha)=\sin((2\alpha+2\beta)+2\beta)+\sin(2\alpha)=$

$=\sin(2\alpha+2\beta)\cos(2\beta)+\cos(2\alpha+2\beta)\sin(2\beta)+\sin(2\alpha)=$

$=-\frac{\cos(2\beta)}{\sqrt{5}}+\frac{2\sin(2\beta)}{\sqrt{5}}+\sin(2\alpha)=-\frac{4}{5}$

$\frac{12x+11}{4x+3}=-8x^2-30x-17=$

$=\cancel{-8(x+\frac{7}{8})(x+\frac{23}{8})}$

$x=-\frac{3}{4}$:

$\frac{-9+11}{-3+3}=\frac{2}{0}$

$-8\cdot\frac{9}{16}+\frac{45}{2}-17=\frac{36}{2}-17=1$

$x=-\frac{11}{4}$: $\frac{-33+11}{-11+3}=\frac{-22}{-8}=\frac{11}{4}=2{,}75$

$-8\cdot\frac{121}{16}+\frac{165}{2}-17=22-17=5$

$\frac{12x+11+(4x+3)(8x^2+30x+17)}{4x+3}=0$

$\begin{cases}32x^3+120x^2+68x+24x^2+90x+51+12x+11=0\\ 4x\neq -\frac{3}{4}\end{cases}$

$32x^3+144x^2+170x+62=0$

$8x^2+30x+17=0$

$x=\frac{-30\pm\sqrt{900-4\cdot8\cdot17}}{16}=$

$=\frac{-30\pm16}{16}$

$x=-\frac{14}{16}=-\frac{7}{8}$

$x=-\frac{46}{16}=-\frac{23}{8}$

$\times\begin{array}{r}17\\32\end{array}$ $+\begin{array}{r}34\\51\end{array}$ 544

$900-544=$

$=300-44=$

256

$\times\begin{array}{r}17\\8\end{array}$ 56 136

$8x+$

$(x+\frac{7}{8})(8x+23)=$

$=8x^2+23x+7x+\frac{23\cdot7}{8}$

$x=\frac{-15\pm\sqrt{225-136}}{8}=$

$=\frac{-15\pm\sqrt{89}}{8}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases}$$

$x^2+6xy+9y^2-6xy-4x-18y=12$

$(x+3y)^2=12+4x+6xy+18y=4(3+x)+6y(x+3)=$

$=(x+3)(6y+4)$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\geq 2 \\ y\geq 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x\leq 2 \Rightarrow 2\geq x\geq 2y \Rightarrow \\ y\leq 1 \Rightarrow 2\geq 2y \Rightarrow \end{cases} \\ 1\geq y \end{array}\right.$$

ХП $\begin{cases} x-2y\geq 0 \\ xy-x-2y+2\geq 0 \\ (x-2y)^2=xy-x-2y+2=y(x-2)-(x-2)= \end{cases}$

$=(x-2)(y-1)$

$$\begin{cases} x\geq 2y \\ (x-2)(y-1)\geq 0 \\ (x+3y)^2=(x+3)(6y+4) \\ (x-2y)^2=(x-2)(y-1) \end{cases} \ominus \Rightarrow (x+3y)^2-(x-2y)^2= =5y(2x+y)=$$

$5y(2x+y)=10+5x+5xy+20y=5y(x+4)+5(x+2)$

$5y(x+y-4)=5(x+2)$

$xy+y^2-4y=x+2$

$y^2+(x-4)y-(x+2)=0$

$y=\frac{4-x\pm\sqrt{x^2-8x+16+4x+8}}{2}=\frac{4-x\pm\sqrt{x^2-4x+24}}{2}$

$x^2+\cancel{6xy}+9y^2+x^2-4xy+4y^2=12+4x+\cancel{6xy}+18y+xy-x-2y+2$

$2x^2+13y^2-5xy-3x-16y-14=0$

$9y^2-18y+x^2-4x-12=0$

$y=\frac{9\pm\sqrt{81-9x^2+36x+108}}{9}=1\pm\frac{\sqrt{-9x^2+36x+189}}{9}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\cancel{16x^2(2x+9)+(2x+9)85}$

$f(ab)=f(a)+f(b)$

$\forall p \in P \; f(p)=\left\lfloor \frac{p}{4} \right\rfloor$

$1 \le x, y \le 24$

$f\left(\frac{x}{y}\right)<0$

$f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right)=$

$\cancel{=f(x)+f(y)}$

$=f(x)-f(y)+f(1)=$

$=f(x)-f(y)$

$f\left(x\cdot\frac{1}{x}\right)=f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=f(1) \Rightarrow$

$\cancel{f(x)=f(1)-f\left(\frac{1}{x}\right)}$

$f\left(\frac{1}{x}\right)=f(1)-f(x)$

$f(1)+f(1)=f(1) \Rightarrow f(1)=0$

$f\left(\frac{x}{y}\right)<0 \Rightarrow f(y)>f(x)$

$143+50+5=$

$=148+50=198$

$f(2)=\left\lfloor \frac{2}{4} \right\rfloor=0 \quad f(4)=f(2\cdot 2)=$

$=f(2\cdot 2)=f(2)+f(2)=0$

$f(3)=\left\lfloor \frac{3}{4} \right\rfloor=0$

$f(5)=1 \quad f(6)=f(2\cdot 3)=0$

$f(7)=1 \quad f(8)=0=f(2\cdot 4)$

$f(9)=f(3\cdot 3)=0$

$f(10)=f(2\cdot 5)=f(2)+f(5)=1$

$f(11)=2$

$f(12)=f(3\cdot 4)=f(3)+f(4)=0$

$f(13)=3$

$f(14)=f(2)+f(7)=1$

$f(15)$

$tg(\alpha)=\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$

$\begin{cases} 2x-4\ge 0 \\ 4(x-2)^2 \ge (x-2)^2+20 \end{cases}$

$(x-2)^2 \ge \frac{20}{3} \quad 2-\sqrt{\frac{20}{3}}=2-2\sqrt{\frac{5}{3}}$

$-\frac{20}{3} \le x-2$

$x-2 \le -\sqrt{\frac{20}{3}}$

$x-2 \ge \sqrt{\frac{20}{3}}$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

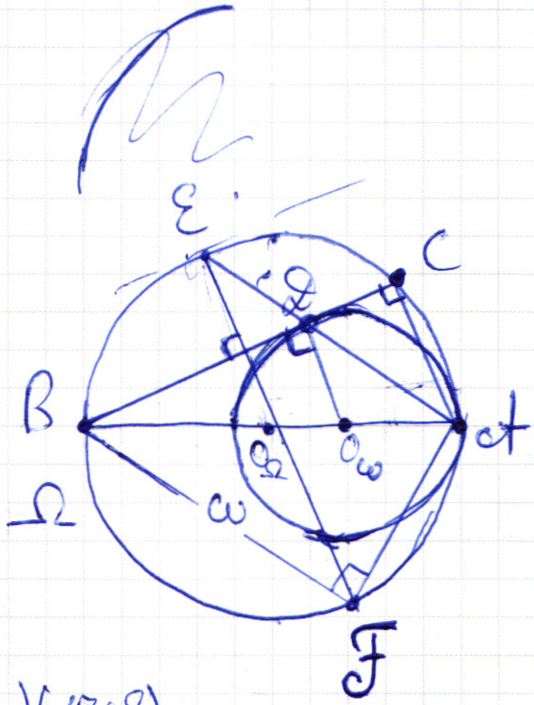
Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$CD = 8;\ BD = 17$

$R_\Omega;\ R_\omega;\ \angle AFE;\ S_{AEF}$ — ?

$\cancel{(R_\Omega + R_\omega)^2 = BD^2 + R_\omega^2}$

$\cancel{R_\Omega^2 + 2R_\omega R_\Omega - BD^2 = 0}$



$$\begin{cases} (2R_\Omega - R_\omega)^2 = BD^2 + R_\omega^2 \\ \cos(\angle ABC) = \dfrac{BD}{2R_\Omega - R_\omega} = \dfrac{BD + DC}{2R_\Omega} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4R_\Omega^2 - 4R_\Omega R_\omega - 17^2 = 0 \\ \dfrac{17}{2R_\Omega - R_\omega} = \dfrac{17+8}{2R_\Omega} \end{cases}$$

$(2R_\Omega - R_\omega)(17+8)$

$\cancel{2R_\Omega \cdot 17} = \cancel{2R_\Omega \cdot 17} - R_\omega \cdot 17 + 2R_\Omega \cdot 8 - R_\omega \cdot 8$

$R_\omega \cdot 25 = R_\Omega \cdot 16$

$R_\omega = R_\Omega \cdot \frac{16}{25}$

$\frac{4\cdot 4}{5\cdot 5} \quad \frac{17\cdot 5}{3\cdot 4}$

$4R_\Omega^2 - 4\cdot R_\Omega^2 \cdot \frac{16}{25} - 17^2 = 0$

$\cancel{4R_\Omega^2(4}\ \frac{36}{25} R_\Omega^2 = 17^2$

$\frac{6}{5} \cdot R_\Omega = 17 \qquad R_\Omega = \frac{17\cdot 5}{6} = \frac{85}{6} \Rightarrow R_\omega = \frac{16}{25} \cdot \frac{85}{6} = \frac{4\cdot 17}{15} = \frac{68}{15}$

$R_\omega = \frac{4\cdot 4^2}{5\cdot 5} \cdot \frac{17\cdot 5}{2\cdot 3} = \frac{17\cdot 8}{15} = \frac{136}{15}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

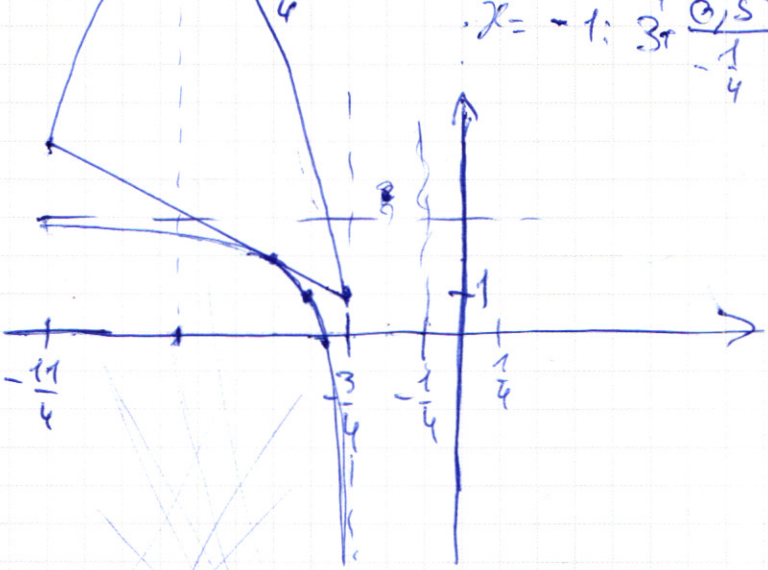
$\frac{12x+11}{4x+3} = 3+\frac{2}{4x+3} = 3+\frac{0.5}{x+\frac{3}{4}}$

$\cancel{x=-\frac{2}{4}:\ 3+\frac{0.5}{\frac{1}{4}} = 5}$

$x=-1:\ 3+\frac{0.5}{-\frac{1}{4}} = 3-2 = 1$

$-\frac{(-30)}{2(-8)} = -\frac{15}{8} = -\frac{7.5}{4}$

2



$-8\cdot\frac{225}{64} - 30\left(-\frac{15}{8}\right) - 17 =$

$= -\frac{225}{8} + \frac{2\cdot 225}{8} - 17 = \frac{225}{8} - 17$

$= \frac{225-136}{8} =$

$= \frac{89}{8}$

$a\left(-\frac{11}{4}\right)+b = 5$

$a\left(-\frac{3}{4}\right)+b = 1$

$a(-2) = 4$

$a = -2$

$a\left(-\frac{11}{4}\right) - a\left(-\frac{3}{4}\right) = 4$

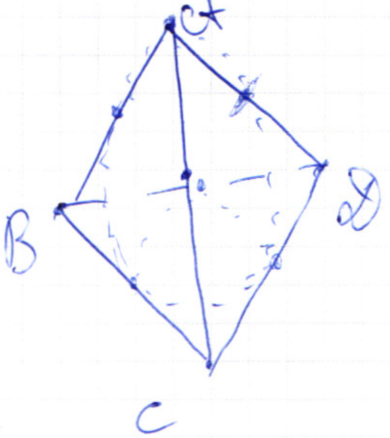
$\cancel{-2a = 4 \quad a = -2}$

$-2\left(-\frac{3}{4}\right)+b = 1$

$\frac{3}{2}+b = 1 \quad b = -\frac{1}{2}$

$a\left(-\frac{5}{4}\right) \ (-2)\left(-\frac{5}{4}\right) - \frac{1}{2} =$

$= \frac{5}{2} - \frac{1}{2} = 2.$



☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)