МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФР ______________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}; \quad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3y - 2x = \sqrt{3xy - 2x - 3y + 2}, \\ 3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 4. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geqslant |x^2 + 6x|^{\log_4 5} - x^2.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = \frac{5}{2}$, $BD = \frac{13}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $3 \leqslant x \leqslant 27$, $3 \leqslant y \leqslant 27$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{4x - 3}{2x - 2} \geqslant ax + b \geqslant 8x^2 - 34x + 30$$

выполнено для всех x на промежутке $(1; 3]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $PQRS$, вершина P которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра PQ. Известно, что $QR = 2$, $QS = 1$, $PS = \sqrt{2}$. Найдите длину ребра RS. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. $\begin{cases} \sin(2a+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \sin(2a+4\beta) + \sin 2a = -\frac{8}{17} \end{cases}$

$\begin{cases} \sin(2a+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ 2\sin\left(\frac{4a+4\beta}{2}\right)\cdot\cos\frac{2a+4\beta-2a}{2} = -\frac{8}{17} \end{cases}$ $\begin{cases} \sin(2a+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ 2\sin(2a+2\beta)\cdot\cos 2\beta = -\frac{8}{17} \end{cases}$

$\Rightarrow \cos 2\beta = \frac{-8}{17}\cdot\frac{1}{2}\cdot(-\sqrt{17}) = \frac{4}{\sqrt{17}}$

$\Rightarrow \sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}$ или $\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

Пусть $\sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}} \Rightarrow 2\beta = \arcsin\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin(2a+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin\left(2a + \arcsin\frac{1}{\sqrt{17}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\left[\begin{array}{l} 2a + \arcsin\frac{1}{\sqrt{17}} = \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right) + 2\pi n, \ n\in Z \\ 2a + \arcsin\frac{1}{\sqrt{17}} = \pi - \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right) + 2\pi n, \ n \in Z \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} 2a = -2\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right) + 2\pi n, \ n\in Z \\ 2a = \pi + 2\pi n, \ n\in Z \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} a = -\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right) + \pi n, \ n\in Z \\ a = \frac{\pi}{2} + \pi n, \ n \in Z \ - \operatorname{tg} a \text{ не определён} \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \operatorname{tg} a$ - может быть равен $\operatorname{tg}\left(-\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)\right) \Rightarrow$

$\operatorname{tg} a = -\operatorname{tg}\left(\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)\right) = -\frac{1}{4}$

Аналогично $\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}} \Rightarrow 2\beta = \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right)$

$\sin\left(2a + \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right)\right) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$$\left[\begin{array}{l} 2a + \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right) = \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right) + 2\pi n, \; n \in Z \\ 2a + \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right) = \pi - \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right) + 2\pi n, \; n \in Z \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} a = \pi n, \; n \in Z \\ a = \frac{\pi}{2} - \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right) + \pi n, \; n \in Z \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} tg\, a = 0 \\ tg\, a = tg\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right)\right) = ctg\, 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}} \cdot (-\sqrt{17}) = \end{array}\right.$$
$= -4$

Мы получили 3 значения $tg\, a$: $0; -4; -\frac{1}{4}$

Поскольку сказано, что этих значений не менее трёх каждое из них является ответом.

Ответ: -4 ; $-\frac{1}{4}$; 0

2. $$\begin{cases} 3y - 2x = \sqrt{3xy - 2x - 3y + 2} \\ 3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3y - 2x = \sqrt{(3y-2)(x-1)} \\ x^2 - 2x + y^2 - \frac{4}{3}y = \frac{4}{3} \end{cases} \qquad \begin{cases} 3y - 2x = \sqrt{(3y-2)(x-1)} \\ (x-1)^2 + (y-\frac{2}{3})^2 = \frac{25}{9} \end{cases}$$

$a = x - 1 \Rightarrow 2a + 2 = 2x$

$b = y - \frac{2}{3} \Rightarrow 3b + 2 = 3y$

$$\begin{cases} 3b - 2a = \sqrt{3ab} \\ a^2 + b^2 = \frac{25}{9} \end{cases} \qquad \begin{cases} 3ab \geq 0 \\ 3b - 2a \geq 0 \\ 9b^2 - 12ab + 4a^2 = 3ab \\ a^2 + b^2 = \frac{25}{9} \end{cases}$$

$$\begin{cases} ab \geq 0 \\ b \geq \frac{2}{3}a \\ 9(b - \frac{4}{3}a)(b - \frac{1}{3}a) = 0 \\ a^2 + b^2 = \frac{25}{9} \end{cases}$$

Решим систему графически. Введем пр. декартову систему координат Ob и Oa

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

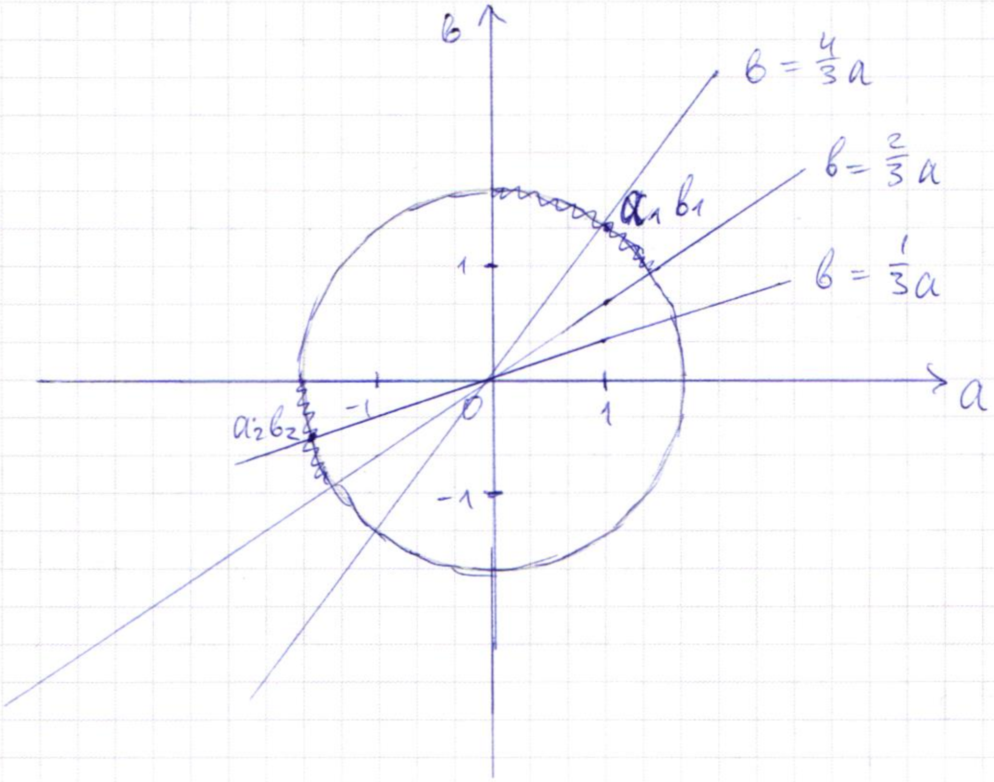
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



Мы получили два решения $(a_1; b_1)$ $(a_2; b_2)$

$a_1 = 1$ $b_1 = \frac{4}{3}$

$\begin{cases} a_2^2 + b_2^2 = \frac{25}{9} \\ b_2 = \frac{1}{3}a_2 \end{cases}$ $\begin{cases} a_2^2 + \frac{1}{9}a_2^2 = \frac{25}{9} \\ b_2 = \frac{1}{3}a_2 \end{cases}$ $\begin{cases} a_2^2 = \frac{5}{2} \\ b_2 = \frac{1}{3}a_2 \end{cases}$ $\begin{cases} a_2 = -\sqrt{\frac{5}{2}} \\ b_2 = -\frac{1}{3}\sqrt{\frac{5}{2}} \end{cases}$

$x = a + 1$

$y = b + \frac{2}{3}$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 1+1 \\ y = \frac{4}{3} + \frac{2}{3} \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\sqrt{\frac{5}{2}} + 1 \\ y = -\frac{1}{3}\sqrt{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3} \end{cases} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\sqrt{\frac{5}{2}} + 1 \\ y = \dfrac{2-\sqrt{\frac{5}{2}}}{3} = \dfrac{2-\frac{\sqrt{10}}{2}}{3} = \dfrac{4-\sqrt{10}}{6} \end{cases} \end{array}\right.$

Ответ: $(2; 2)$ $\left(-\sqrt{\frac{5}{2}} + 1; \frac{4-\sqrt{10}}{6}\right)$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

3. $3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5} - x^2$

Необходим. условие *

$x^2+6x>0$

$x(x+6)>0 \Rightarrow x \in (-\infty;-6) \cup (0;+\infty)$

$3^{\log_4(x^2+6x)} + x^2+6x \geq (x^2+6x)^{\log_4 5}$

$3^{\log_4(x^2+6x)} + 4^{\log_4(x^2+6x)} \geq 5^{\log_4(x^2+6x)}$

Пусть $t = \log_4(x^2+6x)$

$3^t + 4^t \geq 5^t$

$f(t) = 3^t + 4^t$ – выпуклая возрастающая функция

$g(t) = 5^t$ – выпуклая возрастающая функция

$\Rightarrow$ $f(t) = g(t)$ – имеет 1 решение

при $t = 2$

$3^t + 4^t \geq 5^t$

$t \in (-\infty; 2]$

$\log_4(x^2+6x) \leq 2$

$x^2+6x \leq 16$

$x^2+6x-16 \leq 0$

$x \in [-8; 2]$

С учётом услов. * $x \in [-8;-6) \cup (0;2]$

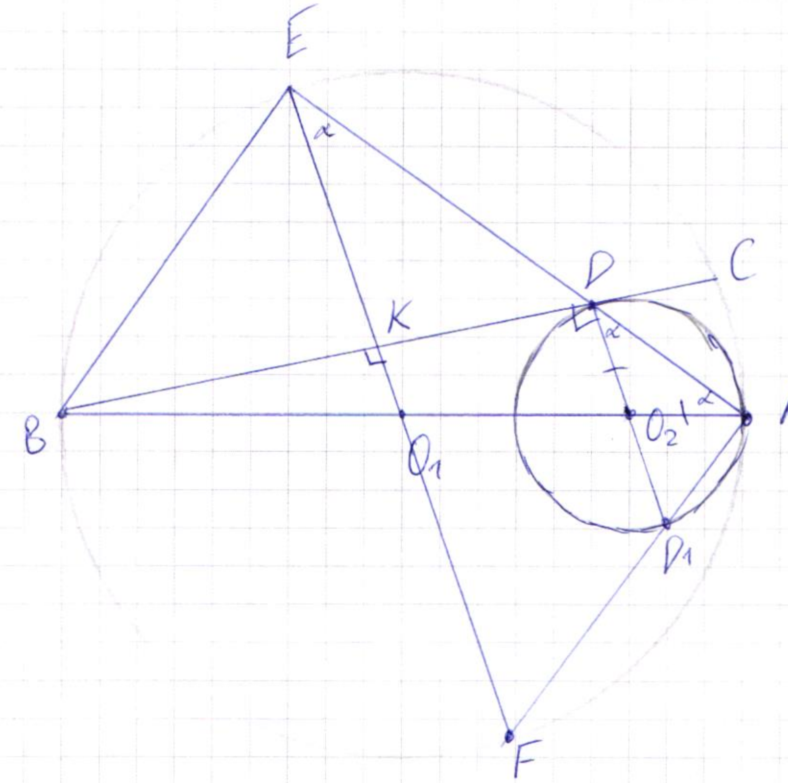
Ответ: $[-8;-6) \cup (0;2]$

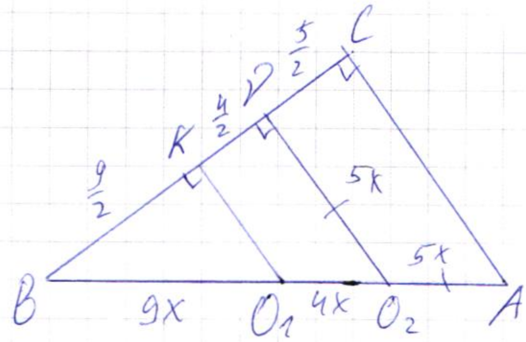
☐ черновик ☑ чистовик Страница № 4

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

№4

$CD=\frac{5}{2}$ $BD=\frac{13}{2}$ $BC=9$





I Докажем, что $EO_1 \perp BC$

Пусть $\angle O_2AD=\alpha \Rightarrow \angle O_2DA=\alpha$ т.к. $\triangle O_2DA$ - равнобедр. $O_2D=O_2A$

Аналогично $\angle O_1AE=\angle O_1EA=\alpha$ $\Rightarrow \angle O_2DA=\angle O_1EA \Rightarrow$

$\Rightarrow O_1E \parallel O_2D$ (т.к. смежные углы равны) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ ~~O_2D~~ $O_1E \perp BC$ т.к. $O_2D \perp BD$ (D - точка касания) $\Rightarrow F \in O_1E$

II $DO_2 \cap AF = DO_2 \cap \omega = D_1$ т.к. $DD_1 \parallel EF$ и EF - диаметр.

III $EK \perp BC$; BC - хорда $\Rightarrow BK=KC=\frac{BC}{2}=\frac{9}{2}$

IV По т. Фалеса в $\triangle BAC$ прямые KO_1 и DO_2 ($KO_1 \parallel DO_2 \parallel AC$) делят AB в таком же соотношении как и BC $\Rightarrow$ $BO_1=9x$ $O_1O_2=4x$ $O_2A=5x$

V $\triangle BDO_2$ $BD^2=BO_2^2-DO_2^2=144x^2=\left(\frac{13}{2}\right)^2$

$x=\frac{13}{2\cdot 12}=\frac{13}{24} \Rightarrow AB=EF=18x=\frac{13}{24}\cdot 18=\frac{13\cdot 3}{4}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

IV $\Delta ADD_1 \sim \Delta AEF$ ($\angle ADD_1 = \angle AEF = \alpha$ и $\angle A$ - общий)

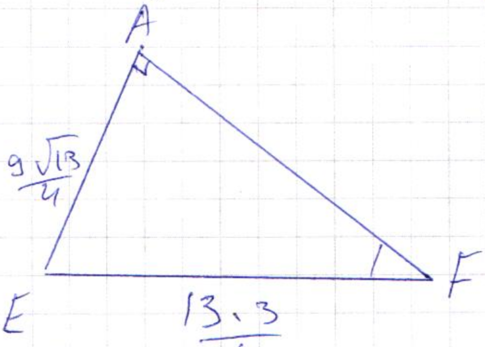
по двум углам $\Rightarrow \dfrac{AD}{AE} = \dfrac{DD_1}{EF} = \dfrac{2\cdot 5x}{2\cdot 9x} = \dfrac{5}{9}$

$\Rightarrow AD = 5y \quad DE = 4y \quad AE = 9y$

V $AD\cdot DE = BD\cdot DC$ т.к. отрезки хорд

$20y^2 = \dfrac{13}{2}\cdot\dfrac{5}{2}$

$y^2 = \dfrac{13}{4\cdot 4} \quad y = \dfrac{\sqrt{13}}{4} \quad AE = 9\cdot\dfrac{\sqrt{13}}{4}$



$\angle AFE = \arcsin\left(\dfrac{9\sqrt{13}}{4}\cdot\dfrac{4}{13\cdot 3}\right) = \arcsin\left(\dfrac{3}{\sqrt{13}}\right)$

$\sin\angle AFE = \dfrac{3}{\sqrt{13}} \Rightarrow \cos\angle AFE = \dfrac{2}{\sqrt{13}} = \sin\angle AEF$

$S_{\Delta AEF} = \dfrac{1}{2}AE\cdot EF\cdot\sin\angle AEF = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{9\sqrt{13}}{4}\cdot\dfrac{13\cdot 3}{4}\cdot\dfrac{2}{\sqrt{13}} = \dfrac{9\cdot 13\cdot 3}{16} = \dfrac{351}{16}$

$O_2A = 5x = \dfrac{5\cdot 13}{24} = \dfrac{65}{24}$

$BO_1 = 9x = \dfrac{9\cdot 13}{24} = \dfrac{3\cdot 13}{8} = \dfrac{39}{8}$

Ответ: $AO_2 = \dfrac{65}{24} \quad BO_1 = \dfrac{39}{8} \quad \angle AFE = \arcsin\left(\dfrac{3}{\sqrt{13}}\right)$

$S_{\Delta AEF} = \dfrac{351}{16}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6 $\frac{4x-3}{2x-2} \geq ax+b \geq 8x^2-34x+30$

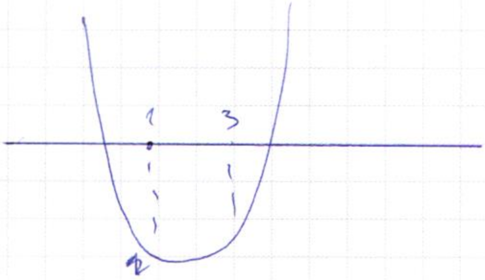
выполн. для всех $x \in (1;3]$

I

$ax+b \geq 8x^2-34x+30$

$8x^2-34x-ax+30-b \leq 0$

$f(x) = 8x^2-34x-ax+30-b$



Чтобы $f(x)$ было ≤ 0 при $x \in (1;3]$

$\begin{cases} f(1) \leq 0 \\ f(3) \leq 0 \end{cases}$

$\begin{cases} 8-34-a+30-b \leq 0 \\ 8\cdot 9-34\cdot 3-3a+30-b \leq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 4 \leq a+b \\ 0 \leq 3a+b \end{cases}$

II $\frac{4x-3}{2x-2} \geq ax+b$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 4x-3 \geq (ax+b)(2x-2) \\ 2x-2 > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 4x-3 \leq (ax+b)(2x-2) \\ 2x-2 < 0 \end{cases} \end{array}\right.$ $\begin{array}{l} \begin{cases} 4x-3 \geq 2ax^2+2xb-2ax-2b \\ x>1 \end{cases} \\ \begin{cases} (4x-3) \leq (ax+b)(2x-2) \\ x<1 \end{cases} \end{array}$

Случай $x<1$ не нужен т.к. $x \in (1;3]$

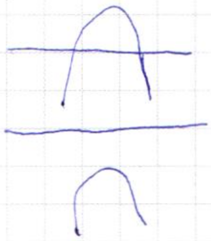
$$2ax^2+2xb-2ax-2b-4x+3\le 0$$

$$g(x)=2ax^2+x(2b-2a-4)+3-2b\le 0$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=0\\ x(2b-4)+3-2b\le 0\end{cases} \\ \begin{cases} a>0\\ g(1)\le 0\\ g(3)\le 0\end{cases} \\ \begin{cases} a<0 \\ \left[\begin{array}{l} D<0 \\ \begin{cases}3\le x_в\\ g(1)\le 0\\ g(3)\le 0\end{cases} \\ \begin{cases} x_в\le 1\\ g(1)\le 0\\ g(3)\le 0\end{cases}\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\begin{cases}a=0\\ 2b(x-1)\le 4x-3\end{cases}$$

$$\begin{cases}a>0\\ 2a+2b-2a-4+3-2b\le 0\\ 18a+3(2b-2a-4)+3-2b\le 0\end{cases}$$



$g(x)$ – парабола $x_в$ – вершина параболы

Задача 5

$$\left.\begin{array}{l} f(ab)=f(a)+f(b)\\ f(p)=[p/4]\end{array}\right\} \Rightarrow$$ для любого составного числа $k=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_n^{\alpha_n}$

$$f(k)=\alpha_1\cdot f(p_1)+\alpha_2\cdot f(p_2)\ \dots\ +\alpha_n f(p_n)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. $\begin{cases} \sin(2a+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \sin(2a+4\beta) + \sin 2a = -\frac{8}{17} \end{cases}$

$tg\, a$

$\begin{cases} \sin 2a \cdot \cos 2\beta + \sin 2\beta \cdot \cos 2a = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \sin 2a \cdot \cos 4\beta + \sin 4\beta \cdot \cos 2a + \sin 2a = -\frac{8}{17} \end{cases}$

$2\sin\frac{2a+2a+4\beta}{2} \cdot \cos\frac{4\beta}{2} = 2\sin(2a+2\beta)\cdot\cos 2\beta$

$= -\frac{8}{17} = 2 \cdot -\frac{1}{\sqrt{17}} \cdot \cos 2\beta$

$\cos 2\beta = +\frac{8}{17} \cdot \frac{\sqrt{17}}{2} = \frac{4}{\sqrt{17}}$

$\sin 2a \cdot (2\cos^2 2\beta - 1) + 2\sin 2\beta \cdot \cos 2\beta \cdot \cos 2a$

$+\sin 2a = -\frac{8}{17}$

$\sin 2a\,(2 \cdot \frac{16}{17} - 1) + 2\sin 2\beta \cdot \frac{4}{\sqrt{17}} \cdot \cos 2a$

$+\sin 2a = -\frac{8}{17}$

$\frac{32}{17}\sin 2a + \cancel{2}\sin 2\beta\,\frac{8}{\sqrt{17}} \cdot \cos 2a = -\frac{8}{17}$

$\cancel{\sin 2\beta = \frac{-\frac{8}{17} - \frac{32}{17}\sin 2a}{\frac{8}{\sqrt{17}} \cdot \cos 2a}}$

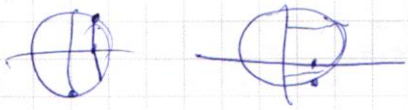
$\sin 2\beta \cdot \cos 2a = \left(-\frac{8}{17} - \frac{32}{17}\sin 2a\right) \cdot \frac{\sqrt{17}}{8}$

$\sin 2\beta \cdot \cos 2a = -\frac{1}{\sqrt{17}} - \frac{4}{\sqrt{17}}\sin 2a$

$\sin(2a+2\beta) = \sin 2a \cdot \frac{4}{\sqrt{17}} + \cancel{\cos 2\beta}\, \sin 2\beta \cdot \cos 2a$

$= -\frac{1}{\sqrt{17}} = \sin 2a \cdot \frac{4}{\sqrt{17}} + -\frac{1}{\sqrt{17}} - \frac{4}{\sqrt{17}}\sin 2a$

$=$



$$\begin{cases} \sin(2a+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ 2\sin(2a+2\beta)\cdot\cos 2\beta = -\frac{8}{17} \end{cases}$$

≥ 3

$\cos 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}$ $\quad \sqrt{1-\cos^2 2\beta} = \sqrt{\frac{17-16}{17}} = \frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2a \cdot \frac{4}{\sqrt{17}} + \cos 2a \cdot \frac{1}{\sqrt{17}} = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$4\cdot\sin 2a + \cancel{1}\cos 2a = -1$

$i = 16+1$ $\quad tg 2\beta = \frac{1}{4}$

$\sin\left(2a + \arcsin\frac{1}{\sqrt{17}}\right) = -1$

$\cancel{2a + \arcsin\frac{1}{\sqrt{17}} = \frac{3\pi}{2} + 2\pi n}$

$\cancel{2a = \frac{3\pi}{2} - \arcsin\frac{1}{\sqrt{17}} + 2\pi n}$

$\cancel{a = \frac{3\pi}{4} - \frac{\arcsin\frac{1}{\sqrt{17}}}{2} + \pi n}$

$\cancel{\sin 2a \cdot \frac{4}{\sqrt{17}} + \cos 2a \cdot \left(\frac{-1}{\sqrt{17}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{17}}}$

$\cancel{4\sin 2a - \cos 2a = -1}$

$\cancel{\sin(2a\ \ldots}$

$\cancel{\frac{4}{\sqrt{17}}\ldots}$ $\quad \sin\left(2a + \arcsin\frac{1}{\sqrt{17}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$$\left[\begin{array}{l} 2a + \arcsin\frac{1}{\sqrt{17}} = \left(\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right)\right) + 2\pi n \\ 2a + \arcsin\frac{1}{\sqrt{17}} = \pi - \left(\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right)\right) + 2\pi n \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} 2a = -2\arcsin\frac{1}{\sqrt{17}} + 2\pi n \\ 2a = \pi + 2\pi n \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} a = -\arcsin\frac{1}{\sqrt{17}} + \pi n \\ a = \frac{\pi}{2} + \pi n \end{array}\right.$$

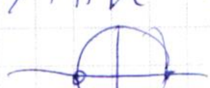
$\sin\left(2a - \arcsin\frac{1}{\sqrt{17}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$$\left[\begin{array}{l} 2a + \arcsin\frac{1}{\sqrt{17}} = \arcsin -\frac{1}{\sqrt{17}} + 2\pi n \\ 2a + \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right) = \pi - \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right) + 2\pi n \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} a = \pi n \\ a = \frac{\pi}{2} + \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right) + \pi n \quad \frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{1}{\sqrt{17}} \end{array}\right.$$

$tg\, a = 0$

$tg\, a = -\frac{1}{4};\ 4$



☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2. $\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2} \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \end{cases}$ $\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3y(x-1)-2(x-1)} \end{cases}$

$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{(3y-2)(x-1)} \\ (3x^2-6x+3)+\left(3y^2-4y+\frac{4}{3}\right)=4+3+\frac{4}{3} \end{cases}$

$3(x-1)^2+3\left(y^2-2\cdot\frac{2}{3}y+\frac{4}{9}\right)=4+3+\frac{4}{3}$

$3(x-1)^2+3\left(y-\frac{2}{3}\right)^2=\frac{25}{3}$

$(x-1)^2+\left(y-\frac{2}{3}\right)^2=\frac{25}{9}$

$a=x-1 \qquad 2x=2a+2$

$b=y-\frac{2}{3} \qquad 3y=3b+2 \qquad 3y-2$

$\begin{cases} 3b+2-2a-2=\sqrt{a\cdot 3b} \\ a^2+b^2=\frac{25}{9} \end{cases}$

$\begin{cases} 3b-2a=\sqrt{3ab} \\ a^2+b^2=\frac{25}{9} \end{cases}$ $\quad ab\geq 0 \quad 3b-2a\geq 0$

$(3b)^2-2\cdot 3ab+4a^2=3ab \qquad 3b\geq 2a \quad b\geq\frac{2}{3}a$

$9b^2-26ab+4a^2=3ab$

$9b^2-15ab+4a^2=0$

$D=225a^2-4\cdot4\cdot9a^2=81a^2$

$b_{1,2}=\frac{15a\pm 9a}{18} \qquad b=\frac{24a}{18}=\frac{4}{3}a$

$b=\frac{6a}{18}=\frac{1}{3}a$

$\begin{cases} 9\left(b-\frac{4}{3}a\right)\left(b-\frac{1}{3}a\right)=0 \\ a^2+b^2=\frac{25}{9} \end{cases}$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

3. $3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5} - x^2$

Усл. $*$

$\begin{cases} x^2+6x>0 \end{cases}$ $\quad x(x+6)>0$ $\quad -6 \quad 0$

$x \in (-\infty;-6)\cup(0;+\infty)$

$3^{\log_4(x^2+6x)} + x^2+6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5}$

$3^{\log_4 a} + a \geq |a|^{\log_4 5}$

$3^{\log_4 a} + a \geq a^{\log_4 5}$

$4^{\log_4 3 \log_4 a} + a \geq a^{\log_4 5} = a^{\log_a 5 \cdot \log_4 a}$

$a^{\log_4 3} + a \geq a^{\log_4 5}$

$a^{\log_4 3} - a^{\log_4 5} + a \geq 0$

$a^{\log_4 3} \cancel{- a^{\log_4 3 \cdot \log_3 5} + a \geq 0}$ $\qquad a=1$ - подходит

$\frac{-6}{2} = -3$

$a^{\log_4 3} - a^{\log_4(3\cdot\frac{5}{3})} + a \geq 0$

min

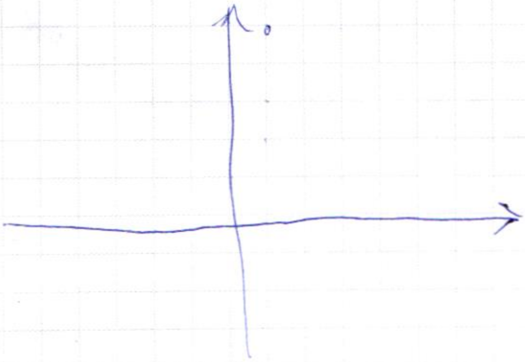
$a^{\log_4 3} - a^{\log_4 3 + \log_4 \frac{5}{3}} + a \geq 0$

$a^{\log_4 3}\left(1 - a^{\log_4 \frac{5}{3}}\right) + a \geq 0$

$a \geq a^{\log_4 3}\left(a^{\log_4 \frac{5}{3}} - 1\right)$

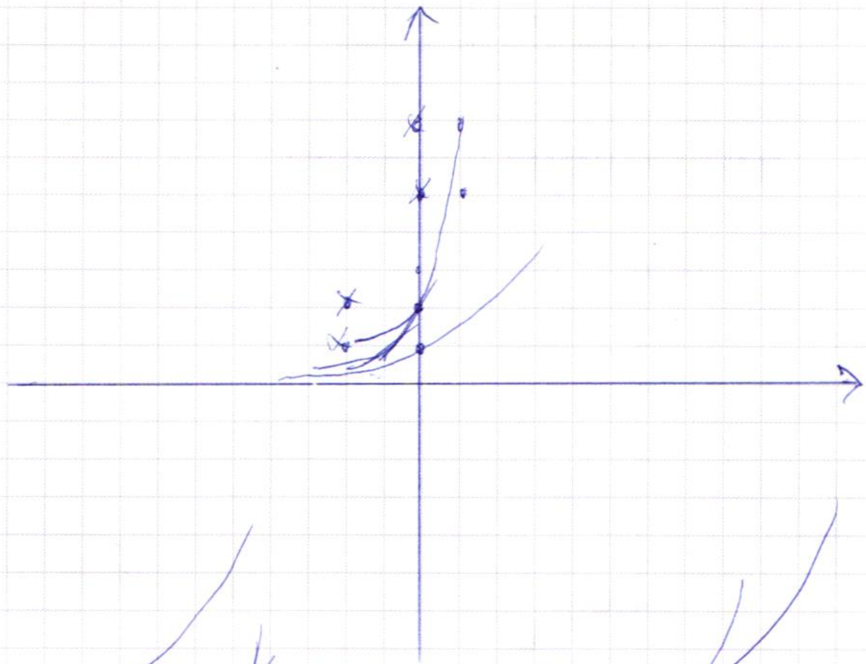
$\cancel{1 \geq \log_4 3 \; \log_a \left(a^{\log_4 \frac{5}{3}} - 1\right)}$

$3^{\log_4 a} + 4^{\log_4 a} \geq 5^{\log_4 a}$

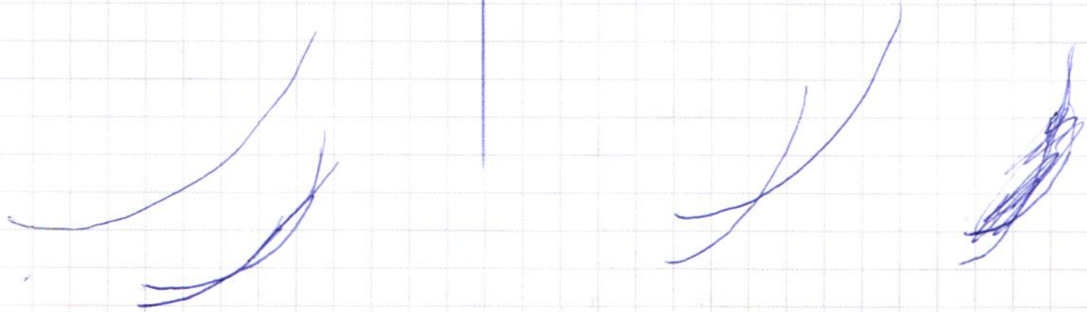


☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)



$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$



$t \in (-\infty; 2]$

$t \le 2$

$\log_4 (x^2+6x) \le 2$

$(x^2+6x) \le 16$

$x^2+6x-16 \le 0$

$x \in [-8; 2]$

Сщг * $x \in [-8; -6) \cup (0; 2]$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

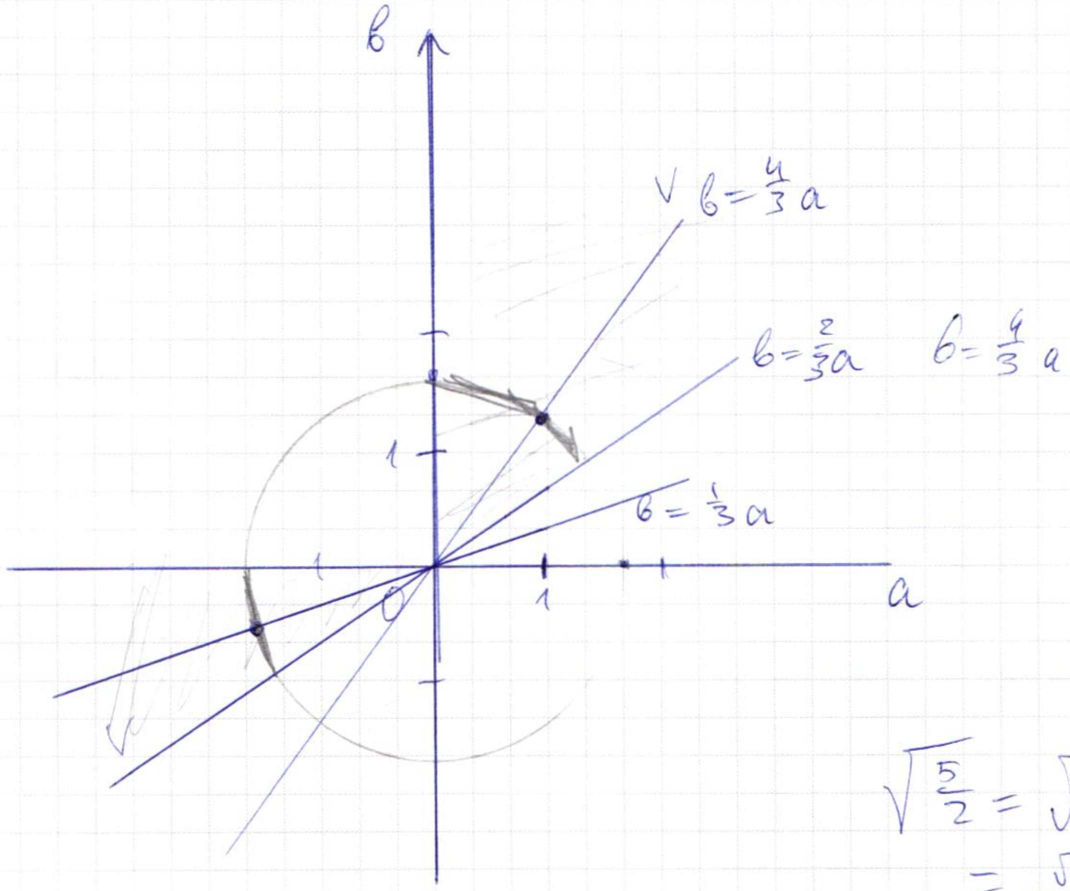
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$\sqrt{\frac{5}{2}}=\sqrt{\frac{10}{4}}=\frac{\sqrt{10}}{2}$

$a^2+b^2=\frac{25}{9}$ $\quad a^2+\frac{16}{9}a^2=\frac{25}{9}$

$b=\frac{4}{3}a$ $\quad a^2\left(\frac{25}{9}\right)=\frac{25}{9}$

$a^2=1$ $\quad a=1 \quad b=\frac{4}{3}$

$x=a+1=2 \quad y=b+\frac{2}{3}=2$

$a^2+b^2=\frac{25}{9}$

$b=\frac{1}{3}a$ $\quad a^2+\frac{1}{9}a^2=\frac{25}{9}$

$\frac{10}{9}a^2=\frac{25}{9}$ $\quad a^2=\frac{25}{10}=\frac{5}{2}$

$a=\pm\sqrt{\frac{5}{2}}$

$a=-\sqrt{\frac{5}{2}} \quad b=-\frac{1}{3}\sqrt{\frac{5}{2}}$

$x=-\sqrt{\frac{5}{2}}+1 \quad y=-\frac{1}{3}\sqrt{\frac{5}{2}}+\frac{2}{3}=\frac{-\left(\sqrt{\frac{5}{2}}-2\right)}{3}$

☒ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

МФТИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

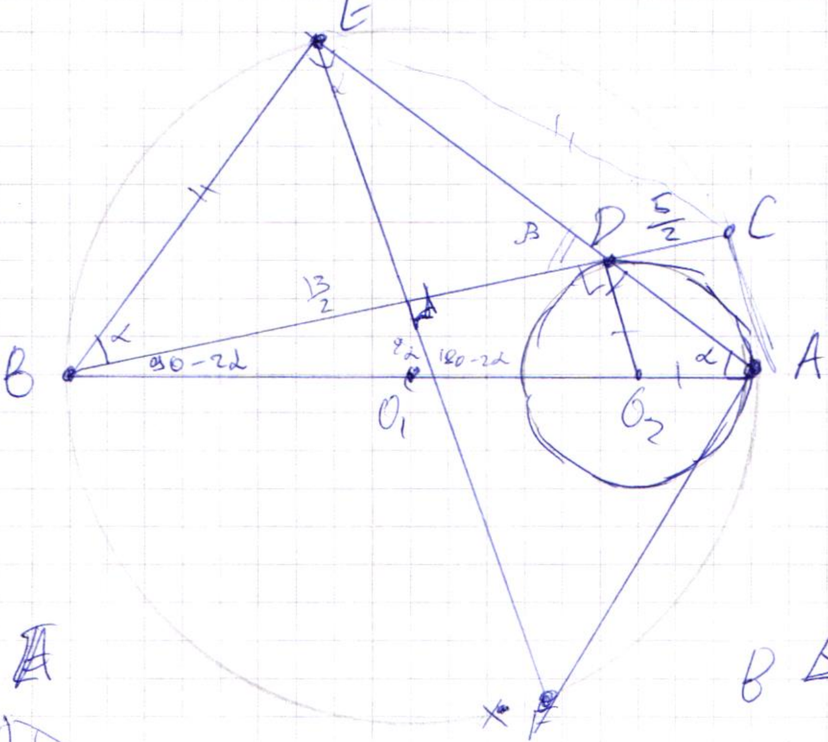
ШИФР

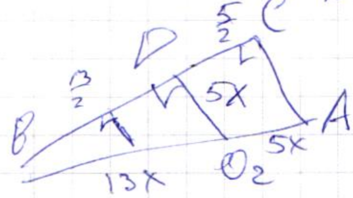
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$CD = \frac{5}{2}$ $BD = \frac{13}{2}$

$169+25=194$

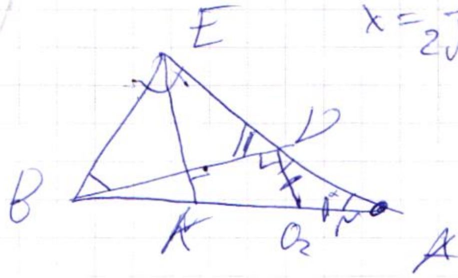


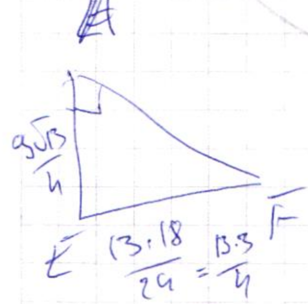


$x^2(13^2+25) = \frac{13^2}{4}$

$x^2 = \frac{169}{4 \cdot 194}$

$x = \frac{13}{2\sqrt{194}}$





$\frac{13 \cdot 18}{24} = \frac{13 \cdot 3}{4}$

$\alpha+\beta=90$

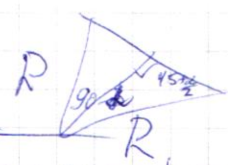
$\frac{ED}{BE} = \frac{BD}{AB} = \frac{BE}{AE}$

$BE^2 = AE \cdot ED$

$\frac{9\sqrt{13}}{4} \cdot \frac{4}{13 \cdot 3} = \frac{3}{\sqrt{13}}$

$\cos = \frac{2}{\sqrt{13}}$

$\frac{AD}{AE} = \frac{AO_2}{AK}$



$AE = \sqrt{2R^2 - 2R^2 \cdot \cos(90-\alpha)} = \sqrt{2R^2(1-\sin\alpha)}$

$\frac{1}{2} \cdot \frac{9\sqrt{13}}{4} \cdot \frac{13 \cdot 3}{4} \cdot \frac{2}{\sqrt{13}}$

$AD = \sqrt{2R^2(1-\cos\alpha)}$

$= \frac{9 \cdot 13 \cdot 3}{16}$

$= 27 \cdot 13$

$AK = \frac{AO_2 \cdot AE}{AD} = \frac{r \cdot R\sqrt{(1-\sin\alpha}}{r\sqrt{1-\cos\alpha}}$

$\times 27$ 13

$\times 27$ 13 81 27 351

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

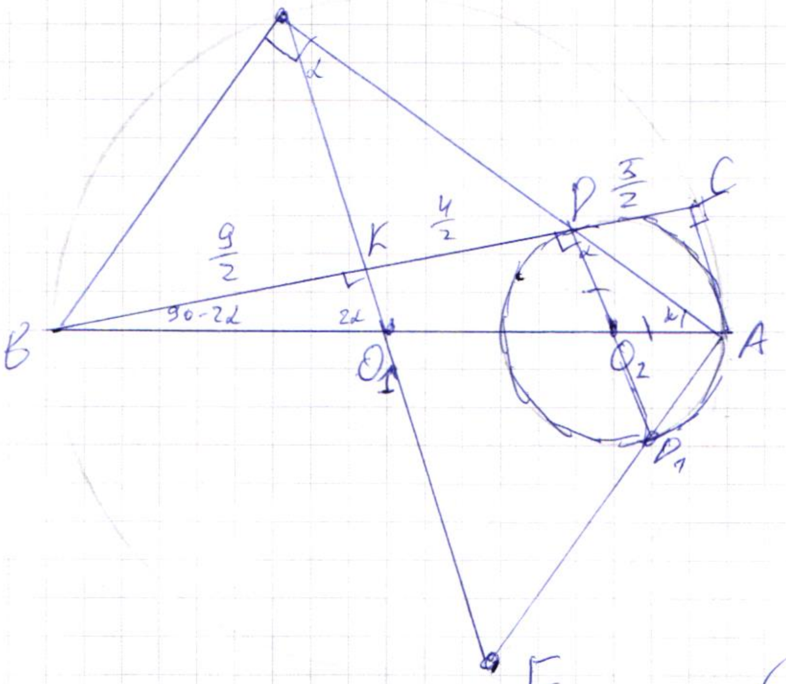
(Нумеровать только чистовики)

$S_\Delta = \frac{1}{2} \cdot \frac{9\sqrt{13}}{4} \cdot \frac{9 \cdot 13}{\sqrt{194}} \cdot \sqrt{\frac{7}{104}}$

$= \frac{1}{8} \cdot \frac{81 \cdot 13\sqrt{13}}{\sqrt{194}\ \sqrt{104}}$

$\frac{194}{16 \cdot 13} = \frac{194}{208} = \frac{97}{104}$

$\cos\angle AFE = \sqrt{\frac{208-194}{208}} = \sqrt{\frac{14}{208}} = \sqrt{\frac{7}{104}}$

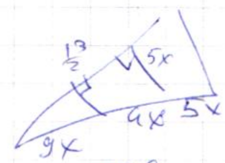


$BD = \frac{13}{2}$ $CD = \frac{5}{2}$

$\frac{BK}{KC} = 1$

$BK = \frac{\frac{13}{2}+\frac{5}{2}}{2} = \frac{9}{2}$

$\left(\frac{13}{2}\right)^2 =$



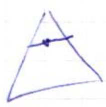
$(169+25)x^2 = \frac{169}{4}$ $x = \frac{13}{2 \cdot 12}$

$x^2 = \frac{169 \cdot \cancel{13}}{4 \cdot 194}$

$x = \frac{13}{2\sqrt{194}}$ $= \cancel{18}$

$18x = \frac{13 \cdot 18}{2\sqrt{194}} = \frac{9 \cdot 13}{\sqrt{194}}$

$BD \cdot DC = AD \cdot DE$

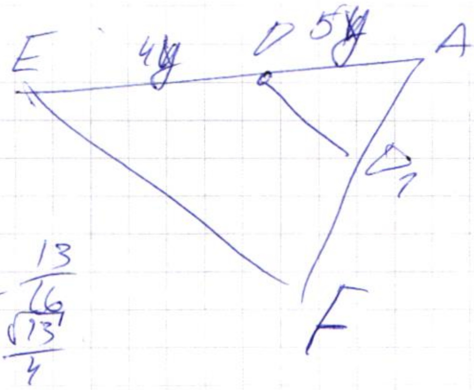


$\frac{13}{2} \cdot \frac{5}{2} = AD \cdot DE$

$\frac{65}{4} = AD \cdot DE$ $\frac{AD}{AE} = \frac{DD_1}{EF} = \frac{5x \cdot 2}{9x \cdot 2} = \frac{5}{9}$

~~$\frac{65}{4} = 5 \cdot 9y^2$ $AD = 5y$ $AE = 9y$~~

~~$\frac{13}{4 \cdot 9} = y^2$ $y = \frac{\sqrt{13}}{6}$~~

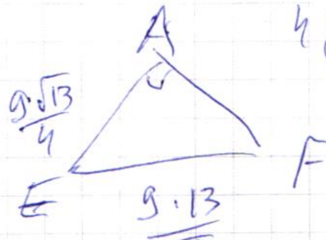


$AD \cdot DE = \frac{65}{4}$

$20y^2 = \frac{65}{4}$

$4y^2 = \frac{13}{4}$ $y^2 = \frac{13}{16}$

$y = \frac{\sqrt{13}}{4}$



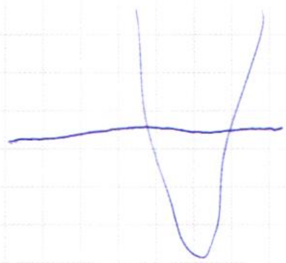
$\sin\angle AFE = \frac{9\sqrt{13} \cdot \sqrt{194}}{4 \cdot 9 \cdot 13} = \frac{\sqrt{194}}{4\sqrt{13}} =$

a

$ax+b \geqslant 8x^2-34x+30$

$8x^2-34x-ax+30-b \leqslant 0$

$x \in (1;3]$



$f(1)\leqslant 0 \qquad 8-34-a+30-b\leqslant 0$

$f(3)\leqslant 0 \qquad 8\cdot 9-34\cdot 3-3a+30-b\leqslant 0$

$$\begin{cases} 4\leqslant a+b \\ 0\leqslant 3a+b \end{cases} \qquad \begin{aligned} -4&\leqslant 2a \\ a&\geqslant -2 \end{aligned}$$

$$\frac{4x-3}{2x-2} \geqslant ax+b$$

$$\left[\begin{cases} 2x-2<0 \\ 4x-3\geqslant (ax+b)(2x-2) \end{cases}\right.$$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{4x-3}{2x-2} \geq ax+b \geq 8x^2-34x+30$$

$f(ab) = f(a) + f(b)$ $\quad f(p) = [\frac{p}{4}]$

$3 \leq x \leq 27$

$3 \leq y \leq 27$ $\quad f(x/y) < 0$

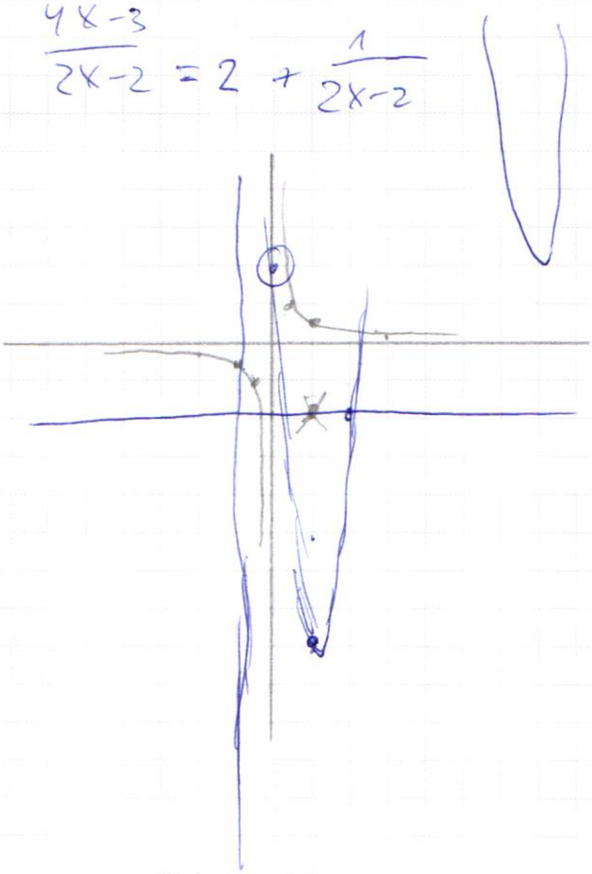
$f(1) = f(1) + f(1)$

$y = 8x^2 - 34x + 30$

$x_{1,2} = \frac{34}{2 \cdot 8} = \frac{17}{8}$

$\frac{4x-3}{2x-2} = 2 + \frac{1}{2x-2}$

$\frac{15}{4}$ $\quad \frac{1}{2}$ $\quad D = 17^2 - 4 \cdot$



$8 - 34 + 30$

$8 \cdot 4 - 34 \cdot 2 + 30 = -6$

$8 \cdot 9 - 34 \cdot 3 + 30$

$= 72 + 30 - 102 = 0$

$2 + \frac{1}{2(x-1)}$

$\frac{1}{\cancel{2x}}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)