МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР ______________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}; \qquad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy - x - 2y + 2}, \\ x^2 + 9y^2 - 4x - 18y = 12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geqslant \left|x^2 + 18x\right|^{\log_{12} 13} - 18x.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = 8$, $BD = 17$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 24$, $1 \leqslant y \leqslant 24$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x + 11}{4x + 3} \leqslant ax + b \leqslant -8x^2 - 30x - 17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}\right)$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB = 1$, $BD = 2$, $CD = 3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2 $\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} \\ (x-2)^2+(3y-3)^2=25 \end{cases}$ 2·3

ОДЗ: $xy-x-2y+2\geq 0$

$x^2-4x+4+9y^2-18y+9=25$

① ~~x-2a~~ $x^2-4xy+4y^2=xy-x-2y+2$

$x(y-1)-2(y-1)=(y-1)(x-2)$

$x-2+2(y-1)$

$\begin{cases} (x-2)-2(y-1)=\sqrt{(y-1)(x-2)} \\ (x-2)^2+9(y-1)^2=25 \end{cases}$ $(x-2)=a$, $(y-1)=b$

$\begin{cases} a-2b=\sqrt{ab} \\ a^2+9b^2=25 \end{cases}$! $\begin{cases} a^2-4ab+4b^2=ab \\ a^2+9b^2=25 \end{cases}$ $\begin{cases} a^2-5ab+4b^2=0 \\ a^2+9b^2=25 \end{cases}$

• $a^2-5b\cdot a+4b^2=0$. решим отн-но a.

$D=25b^2-16b^2=9b^2$, $\sqrt{D}=3|b|$ $\left[\begin{array}{l} a_1=\frac{5b+3b}{2}=4b \\ a_2=\frac{5b-3b}{2}=b \end{array}\right.$

① $a=4b$: $9b^2+16b^2=25$, $b^2=1$

$b=1 \Rightarrow a=4$; $b=-1 \Rightarrow a=-4$

② $a=b$: $10b^2=25$

$b^2=\frac{25}{10}=\frac{5}{2}$

$b=\sqrt{\frac{5}{2}}=a$, $b=-\sqrt{\frac{5}{2}}=a$.

Обратная замена:

① $(a=4, b=1)$: $\begin{cases} x-2=4 \\ y-1=1 \end{cases}$ $\begin{cases} x=6 \\ y=2 \end{cases}$, проверим: $12-6-4+2\geq 0$ верно

Проверим равносильность возведения в квадрат: $(a-2b)\geq 0$

$4-2\geq 0$, верно

② $a=-4, b=-1$. $(a-2b)\geq 0$; $-4+2\geq 0$ неверно

эти значения не подходят

③ $b=a=\sqrt{\frac{5}{2}}$: $a-2b\geq 0$ $\sqrt{\frac{5}{2}}-2\sqrt{\frac{5}{2}}\geq 0$, нет

эти значения не подходят

④ $b=a=-\sqrt{\frac{5}{2}}$ $(a-2b)\geq 0$, $-\sqrt{\frac{5}{2}}+2\sqrt{\frac{5}{2}}\geq 0$, верно

$\sin 4\beta = 2\cdot\frac{1}{\sqrt5}\cdot\frac{2}{\sqrt5} = \frac{4}{5}$ $\quad \cos 4\beta = 2\cos^2 2\beta - 1 = 2\cdot\frac{4}{5} - \frac{5}{5} = \frac{3}{5}$

$4(1-t^2) = t^2+2t+1$

$4-4t^2 = t^2+2t+1$

$5t^2+2t-3$

$(x^2+13x)^{\log_{12}5} + (x^2+13x) \geq (x^2+13x)^{\log_{12}13}$

$\sin 2\alpha \cos 2\beta + \sin 2\beta \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5}$

$t^{\log_{12}5} + t$

$\sin 2\alpha \cdot \frac{2}{\sqrt5} + \frac{1}{\sqrt5}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin 2\alpha \cdot 2 + \cos 2\alpha = -1$

$2\cdot 2\sin 2\alpha +$

$4 \to 60$

$tg(2\alpha) = tg(\alpha+\alpha)$

$2\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1$ $\quad \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ $\quad \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{2\cos^2\alpha - 1} = \frac{2 tg\alpha}{2-1}$

$\sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha = 1$

$2\sin 2\alpha = -(1+\cos 2\alpha)$, $\quad 4\sin^2 2\alpha = (\cos 2\alpha + 1)^2$

$4(1-\cos^2 2\alpha) = \cos^2 2\alpha + 2\cos 2\alpha + 1$

$5\cos^2 2\alpha + 2\cos 2\alpha - 3 = 0$

$(17-8)(17+8)$

$289 - 64$

$17 \cdot 17$

$t^{\log_{12}5} + t \geq t^{\log_{12}13}$

$\sin 2\alpha \cdot \frac{3}{5} + \frac{4}{5}\cos 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$t^{\log_{12}5}\left(1 + t^{1-\log_{12}5} - t^{\log_{12}13 - \log_{12}5}\right) \geq 0$

$1 + \frac{t}{t^{\log_{12}5}} - \frac{t^{\log_{12}13}}{t^{\log_{12}5}} = \frac{t^{\log_{12}5} + t - t^{\log_{12}13}}{t^{\log_{12}5}}$

$t^{\log_{12}5} + t - t^{\log_{12}13} \geq 0$

$\sin(2(\alpha+\beta)) = -\frac{1}{\sqrt5}$, $\quad \sin(2(\alpha+2\beta)) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - 7$

$2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$; $\quad 2\sin(\alpha+2\beta)\cos(\alpha+2\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$\sin(x+y) = \sin x\cos y + \sin y \cos x$

$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \sin y \cos x$ $\quad +$ $\quad \sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$2\sin\left(\frac{2\alpha+4\beta+2\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{2\alpha+4\beta-2\alpha}{2}\right) = -\frac{4}{5}$, $\quad 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos(2\beta) = -\frac{4}{5}$

125×75

625

875

9375

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$a=b=-\sqrt{\frac{5}{2}}$ $\begin{cases} x-2=-\sqrt{\frac{5}{2}} \\ y-1=-\sqrt{\frac{5}{2}} \end{cases}$ $\begin{cases} x=2-\sqrt{\frac{5}{2}} \\ y=1-\sqrt{\frac{5}{2}} \end{cases}$

Ответ: $(6,2)$; $\left(2-\sqrt{\frac{5}{2}}, 1-\sqrt{\frac{5}{2}}\right)$ (Ответ на систему №2)

№1 (Продолжение) ② Пусть $\sin 2\beta=-\sqrt{\frac{1}{5}}$, $\cos 4\beta=2\cos^2 2\beta-1=2\cdot\frac{4}{5}-\frac{1}{1}=\frac{3}{5}$

$\sin 4\beta=2\sin 2\beta\cos 2\beta=2\cdot\frac{-1}{\sqrt5}\cdot\frac{2}{\sqrt5}=-\frac{4}{5}$

$\sin 2\alpha=\frac{2}{\sqrt5}-\frac{1}{\sqrt5}\cos 2\alpha=-\frac{1}{\sqrt5}$, $2\sin 2\alpha-\cos 2\alpha=-1$

$2\sin 2\alpha=\cos 2\alpha-1$, $4\sin^2 2\alpha=(\cos 2\alpha-1)^2$

$4(1-\cos^2 2\alpha)=\cos^2 2\alpha-2\cos 2\alpha+1$ $\sin^2 2\alpha=1-\cos^2 2\alpha$

$5\cos^2 2\alpha-2\cos 2\alpha-3=0$ $\cos 2\alpha=\frac{2+8}{10}=1$, $\sin 2\alpha=0$ $\sqrt{1-\frac{9}{25}}$

Проверка: $\cos 2\alpha=1, \sin 2\alpha=0 \Rightarrow$ $\cos 2\alpha=\frac{2-8}{10}=-\frac{3}{5}$, $\sin 2\alpha=\pm\frac{4}{5}$

$tg 2\alpha=\frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}=0$

$\cos 2\alpha=-\frac{3}{5} \Rightarrow \sin 2\alpha=-\frac{4}{5}$ (в силу равносильности ④ корень не удовл)

$\Rightarrow tg 2\alpha=-\frac{4}{5}\cdot-\frac{5}{3}=\frac{4}{3}=tg 2\alpha$.

$\frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}=\frac{4}{3} \Rightarrow 6tg\alpha=-4tg^2\alpha+4$, $4tg^2\alpha+6tg\alpha-4=0$, $2tg^2\alpha+3tg\alpha-2=0$

$\left[\begin{array}{l} tg\alpha=\frac{-3-5}{4}=-2 \\ tg\alpha=\frac{1}{2} \end{array}\right.$

Ответ: $tg\alpha=\pm 2; \pm\frac{1}{2}, 0$

Начало решения №1 на странице №3.

$\frac{9}{2}+\frac{25}{2}=\frac{25+9}{2}=\frac{34}{2}=17$

$8\cdot\frac{5}{3}=\frac{40}{3}$

$65 | \frac{5}{17}$

$AB=17x=17\cdot\frac{5}{3}=\frac{85}{3}$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

№3 $5^{\log_{12}(x^2+18x)} + (x^2+18x) \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13}$ ООЗ: $x^2+18x>0$

$(x^2+18x)^{\log_{12}5} + (x^2+18x)^{\log_{12}12} \geq (x^2+18x)^{\log_{12}13}$

модуль однозначно раскрывается с плюсом по ООЗ.

$(x^2+18x) =$ $(x^2+18x)^{\log_{12}5} = t$ $(x^2+18x) = t^{\frac{1}{\log_{12}5}}$

$2^3 = 8$ $\left(t^{\frac{1}{\log_{12}5}}\right)^{\log_{12}13} = t^{\frac{\log_{12}13}{\log_{12}5}}$

$t + t^{\frac{1}{\log_{12}5}} \geq t^{\log_5 13}$ $t^{\log_5 13}$

$t^{\log_5 5} + t^{\log_5 12} \geq t^{\log_5 13}$ $t^{\frac{\log_{12}12}{\log_{12}5}} = t^{\log_5 12}$

$t^{\frac{1}{\log_{12}5}} = \left(t^{\log_{12}5}\right)^{-1}$

$t^{\log_5 5} + \left(t^{\log_{12}5}\right)^{-1} \geq \left(t^{\log_{13}5}\right)^{-1}$

$5^{\log_5 t} + \left(5^{\log_{12}t}\right)^{-1} \geq \left(5^{\log_{13}t}\right)^{-1}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

(Начало)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1 $\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$, то есть $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin2\alpha$ равно $2\sin(2\alpha+2\beta)\cos(2\beta)=-\frac{4}{5}$. Зная, что $\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt5}$:

$\cos2\beta=-\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sin(2\alpha+2\beta)}=-\frac{2}{5}\cdot(-)\sqrt5=$

$=\frac{2}{\sqrt5}=\cos2\beta \Rightarrow \sin2\beta=\sqrt{1-\frac{4}{5}}=\pm\sqrt{\frac{1}{5}}$

(1) пусть $\sin2\beta=\frac{1}{\sqrt5}$, $\cos2\beta=\frac{2}{\sqrt5}$, $\cos4\beta=2\cos^2 2\beta-1=$
$=2\cdot\frac{4}{5}-\frac{1}{1}=\frac{8}{5}-\frac{5}{5}=\frac{3}{5}$

$\sin4\beta=2\sin2\beta\cos2\beta=2\cdot\frac{1}{\sqrt5}\cdot\frac{2}{\sqrt5}=\frac{4}{5}$

$$\begin{cases}\sin2\alpha\cdot\frac{2}{\sqrt5}+\frac{1}{\sqrt5}\cdot\cos2\alpha=-\frac{1}{\sqrt5}\\ \sin2\alpha\cdot\frac{3}{5}+\cos2\alpha\cdot\frac{4}{5}+\sin2\alpha=-\frac{4}{5}\end{cases}\qquad\begin{cases}2\sin2\alpha+\cos2\alpha=-1\\ 8\sin2\alpha+4\cos2\alpha=-4\end{cases}$$

(1) $2\sin2\alpha=-(\cos2\alpha+1)$; ! $4\sin^2 2\alpha=(\cos2\alpha+1)^2$; $4(1-\cos^2 2\alpha)=$
$=\cos^2 2\alpha+2\cos2\alpha+1$

$5\cos^2 2\alpha+2\cos2\alpha-3=0$ $\sqrt{D}=\sqrt{4+60}=8$

$\cos2\alpha=\frac{-2-8}{10}=-1$, $\cos2\alpha=\frac{-2+8}{10}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$, $\sin2\alpha=\pm\frac{4}{5}$

$\sin2\alpha=0$

$\sin2\alpha=\frac{4}{5}$ не подходит из-за неравносильности возведения в квадрат (лишний корень)

$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$.

имеем $\sin2\alpha=0$, $\cos2\alpha=-1$ и $\cos2\alpha=\frac{3}{5}$; $\sin2\alpha=-\frac{4}{5}$

(а) $\operatorname{tg}2\alpha=0 \Rightarrow \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}=0$, $\operatorname{tg}\alpha=0$

(б) $\operatorname{tg}2\alpha=-\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{3}=-\frac{4}{3}$

$\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}=-\frac{4}{3}$, $\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha-1}=\frac{4}{3}$

$6\operatorname{tg}\alpha=4\operatorname{tg}^2\alpha-4$, $4\operatorname{tg}^2\alpha-6\operatorname{tg}\alpha-4=0$

$2\operatorname{tg}^2\alpha-3\operatorname{tg}\alpha-2=0$, $\sqrt{D}=5$

$\operatorname{tg}\alpha=\frac{3+5}{4}=2$, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{3-5}{4}=-\frac{1}{2}$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

это чистовик

$-(8x^2+30x+17) = -($ ~~3x7~~

16. Левая часть: $\frac{12x+11}{4x+3} = f(x)$, $f'(x) = \frac{(12x+11)'(4x+3)-(12x+11)(4x+3)'}{(4x+3)^2} =$

$= \frac{12(4x+3)-4(12x+11)}{(4x+3)^2} = \frac{48x+36-48x-44}{(4x+3)^2} = -\frac{8}{(4x+3)^2}$

$\frac{12x+11}{4x+3}$: $12x+11 - (12x+9) = 2$, частное 3; $= \frac{(4x+3)3+2}{(4x+3)} = 3 + \frac{2}{4x+3}$

Правая: $-(8x^2+30x+17)$ $-8x^2-30x-17 = f(x)$

$f'(x) = -16x-30 = 0$, $16x = -30$, $x = -\frac{30}{16} = -\frac{15}{8}$

$+$ $-$; $-\frac{15}{8}$

$3 + \frac{2}{4x+3} \le ax+b \le -(8x^2+30x+17)$

$x \in [-\frac{11}{4}, -\frac{3}{4})$ => левая часть ~~2+2~~ $3 + \frac{2}{3-11} = 3 + \frac{2}{-8} = 3 - \frac{1}{4} = \frac{11}{4}$

$\in (-\infty, \frac{11}{4}]$

$4 \cdot -\frac{11}{4}$

$x = -\frac{3}{4}$ $\lim_{x \to -\frac{3}{4}}$ $\frac{2}{4x+3}+3 = \frac{12x+11}{4x+3} = \frac{12+\frac{11}{x}}{4+\frac{3}{x}} = \frac{12 - \frac{44}{3}}{4}$

$4x+3>0$

$x > -\frac{3}{4}$ $<$

правая часть: $\in [1; 5]$

$+$ $-$; $-\frac{11}{4}$, $-\frac{15}{8}$, $-\frac{3}{4}$

$\frac{11}{4} > \frac{15}{8}$

$22 > 15$

$f(-\frac{11}{4}) = -(8 \cdot \frac{121}{16} - 30 \cdot \frac{11}{4} + 17) = -(\frac{121}{2} - \frac{15 \cdot 11}{2} + \frac{17 \cdot 2}{2}) = 5$

$f(-\frac{3}{4}) = -(8 \cdot \frac{9}{16} - 30 \cdot \frac{3}{4} + 17) = -(\frac{9}{2} - \frac{15 \cdot 3}{2} + \frac{17 \cdot 2}{2}) =$

$9 + 34 - 45$

$= 1$

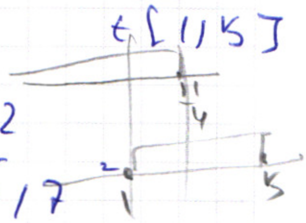
$15 \cdot 11 = 165$; $121 + 34 = 155$

$3 + \frac{2}{4x+3} \le ax+b \le -(8x^2+30x+17)$

$(-\infty, \frac{11}{4}]$; $> \frac{11}{4}$; $\in [1; 5]$

$\frac{155}{2} - \frac{165}{2} = -\frac{10}{2}$

$-\left(\frac{34+9-45}{2}\right) = -\left(\frac{43-45}{2}\right) = 1$



$-\frac{11}{4}a+b$

$\frac{4x}{Ra} = 4 \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{6}{8/5}$, 17

$-\frac{3}{4}a+b$

$\cos\alpha = \frac{5}{\sqrt{34}} = \frac{8x}{AD} \Rightarrow AD = \frac{8x\sqrt{34}}{5} = \frac{8\sqrt{34}}{5} \cdot \frac{5}{3} = \frac{8\sqrt{34}}{3}$

$180 - 4\alpha + 2\alpha = 180$

$125 \cdot 75 = 625 + 875 = 9375$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3 ООЗ: $x^2+18x>0$. На ООЗ модуль раскрывается с (+)

Пусть $5^{\log_{12}(x^2+18x)} = t$, $5^{\log_{12}(x^2+18x)} = 5^{\log_5 t}$, $\log_{12}(x^2+18x) = \log_5 t$

$x^2+18x = 12^{\log_5 t}$, $(x^2+18x)^{\log_{12}13} = 13^{\log_5 t}$

Имеем $t+12^{\log_5 t} \geq 13^{\log_5 t}$, $5^{\log_5 t}+12^{\log_5 t} \geq 13^{\log_5 t}$

$\log_5 t = a$, $5^a+12^a \geq 13^a$, $a=2$ → решение.

$a>2$ не явл. решением

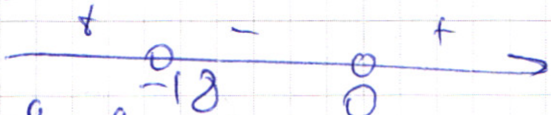
$a=2$: $\log_5 t = \log_5 5^2$, $t=25$, $5^{\log_{12}(x^2+18x)} = 5^2$, $\log_{12}(x^2+18x) = \log_{12} 12^2$

$x^2+18x-144=0$, $\sqrt{D}=\sqrt{900}=30$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-18-30}{2} = -24 \\ x_2 = \frac{-18+30}{2} = \frac{12}{2} = 6 \end{cases}$$

$x=-24$, $x=6$ → решения.

ООЗ: $x(x+18)>0$

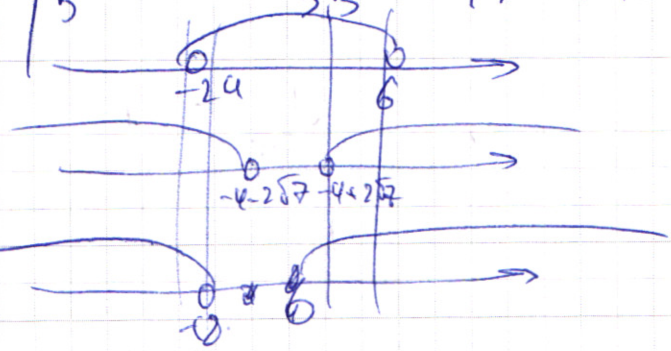


$x\in(-\infty,-18)\cup(0,+\infty)$

$5^a+12^a \geq 13^a$, $a<-1$ не явл-ся решением.

$a\in(0,2)$ → решения. $\begin{cases} \log_5 t<2 \\ \log_5 t>1 \end{cases}$ → $t\in(5;25)$

$$\begin{cases} 5^{\log_{12}(x^2+18x)} < 5^2 \\ 5^{\log_{12}(x^2+8x)} > 5^1 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2+18x<144 \\ x^2+8x-12>0 \end{cases} \quad \begin{cases} (x+24)(x-6)<0 \\ (x-(-4-2\sqrt{7}))(x-(-4+2\sqrt{7}))>0 \end{cases}$$



$x\in(-24,-18)\cup(-4+2\sqrt{7},6)$

$x\in[-24,-18)\cup(-4+2\sqrt{7};6]$

Ответ.

$5^{\log_{12}(x^2+18x)} = 5^{\log_5 t}$ $\qquad$ $\log_{12}(x^2+18x) = \log_{12} 12^{\log_5 t}$

$\parallel$ $\qquad$ $(x^2+18x) = 12^{\log_5 t}$

t $\qquad$ $(x^2+18x)^{\log_{12} 13} = \left(12^{\log_5 t}\right)^{\log_{12} 13}$

$t + 12^{\log_5 t} \geq 13^{\log_5 t}$

$5^{\log_5 t} + 12^{\log_5 t} \geq 13^{\log_5 t}$ $\quad - \cancel{12} \quad 13^{\log_5 t}$

$5^a + 12^a \geq 13^a$ $\qquad$ $a=2\ \vee$ $\quad \frac{1}{25} + \frac{1}{144} = \frac{1}{169}$ $\quad 25^a + 144^a$

$\cancel{5^{2a} + 2\cdot 5^a \cdot 12^a + 12^{2a} \geq 13^{2a}}$ $\qquad 5^{\log_5(13^a - 12^a)}$

$5^a \geq 13^a - 12^a$ $\qquad 5^a \geq 5$

$\log_5 5^a - \cancel{\log_5 (13^a - 12^a) \geq 0}$

$5^a + 12^a - 13^a \geq 0 /$ $\qquad 5^a \ln 5 + 12^a \ln 12 - 13^a \ln 13 \geq 0$

$125 + 144\cdot 12 \geq 169 \cdot 13$

$t + \left(12^{\log_t 5}\right)^{-1} \geq 13^{\log_5 t}$

$t + 12$

$\left(5^{\log_t 5}\right)$ $\qquad 5^{\log_5 t} = \left(5^{\log_t 5}\right)^{-1}$

$5^a + 12^a$ $\qquad 13^a$ $\qquad (13^a \ln 13)' = 13^a \ln 13 + 0$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4

$CD = 8,\ BD = 17$

Решение. $\angle ACB = 90^\circ$ (опирается на диаметр) ~~...~~

т.к. $\frac{CA}{AB} = \frac{CD}{DB}$ (пропорц. отрезки биссектрисы) $= \frac{8x}{17x}$. $AB^2 = CB^2 + AC^2$

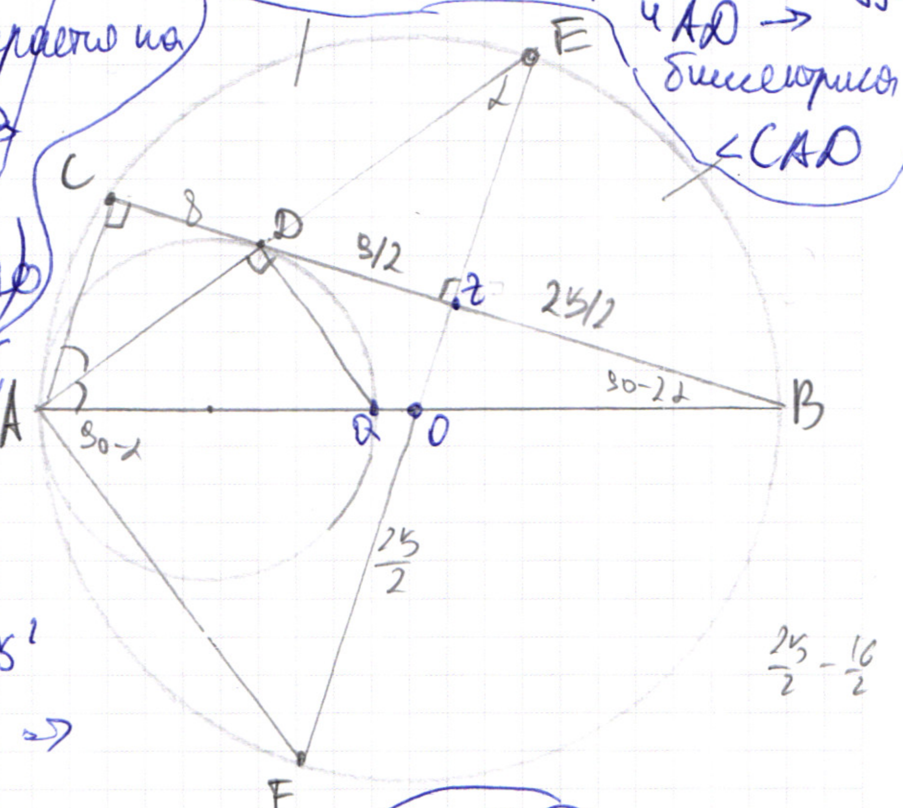
$(17x)^2 = (8x)^2 + 25^2$

$289x^2 - 64x^2 = 25^2,\ 225x^2 = 25^2$

$15x = 25,\ x = \frac{25}{15} = \frac{5}{3} \Rightarrow$

$AQ = 17x = \frac{17\cdot 5}{3} \Rightarrow R_Q = \frac{AQ}{2} = \frac{17\cdot 5}{6} = \frac{85}{6} = R_Q.$ $\angle CAD = \alpha = \angle DAB \Rightarrow$

$\smile COB \to$ р/б, $EO \perp CB \Rightarrow \triangle COZ = \triangle ZOB$ и $\angle COZ = \angle EOB \Rightarrow \angle CAD = \angle DAB$, т.к. опираются на те же дуги. и $AD \to$ биссектриса $\angle CAD$



$\smile CEB = 4\alpha,\ \smile AC = 180 - 4\alpha,\ \smile AF = 2\alpha. \Rightarrow \smile FB = 360 - (2\alpha) - (180 - 4\alpha) - 4\alpha$ (дуги)

$= 360 - 2\alpha - 180 + 4\alpha - 4\alpha = 180 - 2\alpha = \smile FB \Rightarrow$

$\angle FAB = 90 - \alpha,\ \angle EAB = \alpha \Rightarrow \angle EAF = 90^\circ \to EF$ — диаметр $= AB$

~~$AQ\ OE = 8\cdot 17$~~, $\cos 2\alpha = \cos CAB = \frac{AC}{AB} = \frac{8x}{2R_Q} = \frac{4x}{R_Q} = \frac{4}{1}\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{6}{85} = \frac{8}{17} = \cos 2\alpha.$

$2\cos^2\alpha = \frac{8}{17} + \frac{17}{17},\ 2\cos^2\alpha = \frac{25}{17},\ \cos^2\alpha = \frac{25}{34},\ \cos\alpha = \frac{5}{\sqrt{34}}$

~~$AQ = 8\cdot 17 - 40\cdot 85 = \frac{72\cdot 17 - 40\cdot 85}{9}$~~ $\cos\alpha = \frac{5}{\sqrt{34}} = \frac{AC}{AD} = \frac{8x}{AD} \Rightarrow$

$AD = \frac{8x\sqrt{34}}{5} = \frac{8\sqrt{34}}{5}\cdot\frac{5}{3} = \frac{8\sqrt{34}}{3},\ \cos\alpha = \frac{AD}{AQ} = \frac{5}{\sqrt{34}} \Rightarrow AQ = \frac{AD\sqrt{34}}{5} =$

$= \frac{8\sqrt{34}}{3}\cdot\frac{1}{5}\cdot\sqrt{34} = \frac{8\cdot 34}{15} = AQ \Rightarrow R_\omega = \frac{34\cdot 4}{15} = \frac{136}{15} = R_\omega$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

$\angle AFE = 90 - \alpha$, $\sin(90-\alpha) = \cos\alpha = \sin\angle AFE = \frac{5}{\sqrt{34}} \Rightarrow$

$\angle AFE = \arcsin\frac{5}{\sqrt{34}}$

$\cos\alpha = \frac{AE}{EF} \Rightarrow AE = EF\cos\alpha = 25\cdot\frac{5}{\sqrt{34}} = \frac{125}{\sqrt{34}}$

$\sin\alpha = \sqrt{1-\frac{25}{34}} = \sqrt{\frac{9}{34}} = \frac{3}{\sqrt{34}}$

$S_{AFE} = AE\,EF\sin\alpha\,\frac{1}{2} = \frac{125}{\sqrt{34}}\cdot 25\cdot\frac{3}{\sqrt{34}}\cdot\frac{1}{2} = \frac{75\cdot 125}{2\cdot 34}$

$S_{\Delta AFE} =$

Ответ: $R_\Omega = \frac{85}{8}$, $R_\omega = \frac{136}{15}$,

$\angle AFE = \arcsin\frac{5}{\sqrt{34}}$

$S_{\Delta AFE} = \frac{9375}{68} = 137\frac{59}{68}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6 Оценим левые и правые части.

Левая. $12x+11 \,|\, 4x+3$, $-(12x+9) \,|\, 3$, остаток 2. $\frac{(4x+3)3+2}{4x+3} = 3 + \frac{2}{4x+3}$

$x \in [-\frac{11}{4}, -\frac{3}{4}) \Rightarrow 3 + \frac{2}{4x+3} \in (-\infty, \frac{11}{4}]$

Правая: $f(x) = -8x^2-30x-17$, $f'(x) = -16x-30$, $x = -\frac{30}{16} = -\frac{15}{8}$

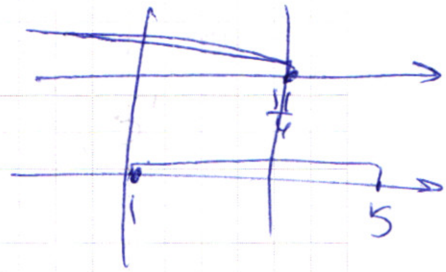
$-\frac{11}{4}$ $+$ $\nearrow$ $-\frac{15}{8}$ $-$ $\searrow$ $-\frac{3}{4}$

$f(-\frac{11}{4}) = -(8\cdot\frac{121}{16} - \frac{30\cdot 11}{4} + 17) = 5$

$f(-\frac{3}{4}) = 1$

Правая часть $\in [1, 5]$

$$\underbrace{3 + \frac{2}{4x+3}}_{(-\infty, \frac{11}{4}]} \le ax+b \le \underbrace{-8x^2-30x-17}_{[1,5]}$$



Подходит промеж-к $[1, \frac{11}{4}]$, ~~что есть~~

В пересечении [illegible]

~~Расс~~ Рассмотрим следующие значения:

(Не успел доделать)

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 7 (Нумеровать только чистовики)

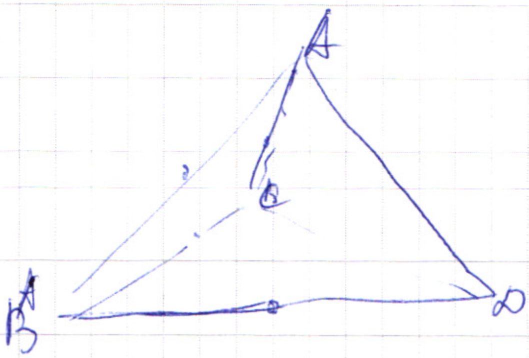
$5^a + 12^a \geq 13^a$ $\quad a \geq 2 \quad$ $5^a + 12^a - 13^a \geq 0$

$5+12-13$

$1+1-1 \geq 0$

$\frac{1}{5} + \frac{1}{12} - \frac{1}{13}$

$a > 2 \to \varnothing$



125

$\begin{array}{r} 144 \\ \times\ 12 \\ \hline 288 \\ +\ 144 \\ \hline 1728 \end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{r} 169 \\ \times\ 13 \\ \hline 507 \\ +\ 169 \\ \hline 2107 \end{array}$

$t^{\log_{12}5} + t^{\log_{12}12} \geq t^{\log_{12}13}$ $\quad t^{\log_{12}5} \geq t^{\log_{12}12}\left(t^{\log_{12}\frac{13}{12}} - 1\right)$

$t^{\log_{12}\frac{12}{5}}\left(t^{\log_{12}\frac{13}{12}} - 1\right) \leq 1$

$\left(\frac{12}{5}\right)^a\left(\left(\frac{13}{12}\right)^a - 1\right) \leq 1, \quad \frac{12^a}{5^a}\left(\frac{13^a - 12^a}{12^a}\right) \leq 1$

$\frac{12^a(13^a - 12^a)}{5^a \cdot 12^a} - \frac{1}{1} \leq 0$

$\cancel{8}$ $\quad 12^a(13^a - 12^a) - 5^a \cdot 12^a \leq 0$

$12^a(13^a - 12^a - 5^a) \leq 0 \quad t^{\log_{12}13 - \log_{12}12}$

$\left(\frac{13}{12}\right)^a - \left(\frac{13}{12}\right)^a \leq \left(\frac{5}{12}\right)^a$ $\quad t^{\frac{1}{\log_5}\frac{1}{\log_{12}5}}$

$(x^2+18x)^{\log_{12}5} + (x^2+18x)^{\log_{12}12} \geq (x^2+18x)^{\log_{12}13}$

$(x^2+18x)^{\log_{12}5} = t \quad (x^2+18x)^{\log_{12}12} = t^{\frac{\log_{12}12}{\log_{12}5}} \quad t$

$(x^2+18x) = t^{\frac{1}{\log_{12}5}}$

$t^{\log_5 5} + t^{\log_5 12} \geq t^{\log_5 13}$

$t^{\log_5 5} + \left(t^{\log_{12}5}\right)^{-1} \geq \left(t^{\log_{13}5}\right)^{-1}$

$t + t^{(\log_5(3\cdot 4))} \geq t^{\log_5 13}, \quad t + t^{\log_5 3}\cdot t^{\log_5 4}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$12x+11 \,|\, 4x+3$

$-\,12x+9 \,|\, 3$

2

$\frac{3(4x+3)+2}{4x+3} = 3 + \frac{2}{(4x+3)}$

$4x+3>0$

$x>-\frac{3}{4}$

$f'(x) = \cancel{12x+11} \quad 12(4x+3) - (12x+11)4 = 48x+36-48x-44$

$\frac{-8}{(4x+3)^2}$

$-\frac{11}{4}$ $\quad -\frac{3}{4}$

$\frac{12+\frac{11}{x}}{4+\frac{3}{x}}$

$3+\frac{2}{3-11} = 3-\frac{1}{4}$

$3+$

$10 \quad 9 \quad 8$

$9 \quad 3 \quad 6$

$4 \quad 2 \quad 4$

8

$1 \quad 4$

$18x$

$\frac{144}{4}$ $\quad \frac{144}{36}$

$(x^2+18x)^{\log_{12}13} = (\cancel{x^2+18x})^{\log_{x^2+18x}7} \cdot 7^{\log_{12}12}$

$(x^2+18x) = 7^{\frac{\log_{13}12}{\log_{12}13}} = 7^{\log_{13}12}$

$7^{\log_{13}5} + 7^{\log_{13}12} \ge 7^{\log_{13}13}$

$\log_{12}(x^2+8x) = 5^{\log_5 7} \quad \log_{12}(x^2+8x) = \log_{12} 12^{\log_5 7}$

$x^2+8x = 12^{\log_5 7}$

$7 + 12^{\log_5 7} \ge 13^{\log_5 7}$

$5^{\log_5 7} + 12^{\log_5 7} = 13^{\log_5 7}$

$(x^2+18x) = 7$

$7^{\log_{12}5} + 7^{\log_{12}12} \ge 7^{\log_{12}13}$

$5^a + 12^a = 13^a$

$7^{\log_{12}5}\left(1 + 7^{\log_{12}\frac{12}{5}}\right) \ge 7^{\log_{12}13}$

$1 + 7^{\log_{12}\frac{12}{5}} \ge 7^{\log_{12}\frac{13}{5}}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

$\log_{12} 5 - \log_{12} 12$

$$t^{\log_{12} 5} + t^{\log_{12} 12} \geq t^{\log_{12} 13}$$

$\cancel{t} \; 1 + t^{\log_{12}\frac{12}{5}} \geq t^{\log_{12}\frac{13}{5}}$

$\log_{12}\frac{13}{5} - \log_{12}\frac{12}{5}$

$$t^{\log_{12}\frac{13}{5}} - t^{\log_{12}\frac{12}{5}} \leq 1$$

$\frac{13}{5} \; \frac{5}{12}$

$$t^{\log_{12}\frac{12}{5}}\left(t^{\log_{12}\frac{13}{12}} - 1\right) \leq 1$$

$\log_{12}\frac{13}{12}$

$\log_{12}\frac{13}{5} - \log_{12}\frac{12}{5}$

$$t^{\log_{12} 12 - \log_{12} 5}\left(t^{\log_{12} 13 - \log_{12} 12} - 1\right) \leq 1$$

$\log_{12}\frac{13}{12}$

$$t^{1-\log_{12} 5}\left(t^{\log_{12} 13 - 1} - 1\right) \leq 1$$

$t^{\log_t}$

$$t^{\log_{12} 5} + t^{\log_{12} 12} \geq t^{\log_{12} 13}$$

$t^{\log_{12} 5} \geq t^{\log_{12} 13}$

$1 + t^{\log_{12}\frac{12}{5}} \geq t^{\log_{12}\frac{12}{5}}$

$$t^{\log_{12} 5} \geq t\left(t^{\log_{12}\frac{13}{12}} - 1\right)$$

$5^{\log_{12}(x^2+13x)} = 5^{\log_5 t}$, $\log_{12}(x^2+13x) = \log_5 t$

$\log_{12}(x^2+13x) = \log_{12} 12^{\log_5 t} = \left(12^{\log_5 t}\right)^{\log_{12} 13}$

$$t + 12^{\log_5 t} \geq 13^{\log_5 t}$$

$\left(12^{\log_{12} 13}\right)^{\log_5 t}$

$$t^{\log_5 5} + t^{\log_5 12} \geq t^{\log_5 13}$$

$13^{\log_5 t}$

$$1 + t^{\log_5\frac{12}{5}} \geq t^{\log_5\frac{13}{5}}$$

$68 \cdot 3 = 180 + 24 = 204$

$9375 : 68 = 137$
68
257
204
535

$137 \times 68 = 1096 + 822 = 9316$

68×9

$68 \times 8 = 564$

$68 \times 7 = 476$

$9375 - 9316 = 59$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

(1) $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$

$-\frac{2}{\sqrt5}\cos 2\beta + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$\sin 2\alpha = \frac{2}{\sqrt5}\cos 2\beta - \frac{4}{5}$

$\frac{2}{\sqrt5}\cos 2\beta = \left(\frac{4}{5}+\sin 2\alpha\right)$

$\sin 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5}$

$$\begin{cases} 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5} \\ \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5} \end{cases}$$

$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - ?$

$\cos 2\beta = \cancel{\frac{4}{5}+\sin}$ $\left(\frac{4+5\sin 2\alpha}{\sqrt5}\right)\cdot\frac{\sqrt5}{2} = \frac{(5\sin 2\alpha+4)}{2\sqrt5}$

~~$\sin 2\beta =$~~

(13) $t^{\log_{12}5} + t \geq t^{\log_{12}13}$

$(x^2+18x)^{\log_{12}13} = \cancel{t} \Rightarrow \cancel{(x^2+18x)} = (x^2+18x)^{\log_{(x^2+18x)}t}$

$\log$

$5^{\log_{12}(x^2+18x)} = 5^{\log_5 t}$, $\log_{12}(x^2+18x) = \log_5 t$

$t + 12^{\log_5 t} \geq 13^{\log_5 t}$ "t

$\log_{12} 12^{\log_5 t}$

$12^{\log_{12}t} + 12^{\log_5 t} \geq 13^{\log_5 t}$

$x^2+18x = 12^{\log_5 t}$

$-\frac{2}{\sqrt5}\cos 2\beta + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$\left(12^{\log_5 t}\right)^{\log_{12}13} = \left(12^{\log_{12}13}\right)^{\log_5 t} = 13^{\log_5 t}$

$\sin 2\alpha\cos 2\beta + \cancel{\cos}\cos 2\alpha\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt5}$

$$\begin{cases} ax+b \leq \frac{11}{4} \\ ax+b \geq 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} ax < \frac{11}{4} - b \\ ax \geq 1-b \end{cases}$$

$1 - \frac{3}{2\sqrt5} = \frac{4}{\sqrt5}$

$s^2 + c^2 = 1$

$tg^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2}$

$tg(2\alpha) = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{2\cos^2\alpha - 1} = \frac{2 tg\alpha}{2 - \frac{1}{\cos^2\alpha}} = \frac{2 tg\alpha}{2 - tg^2\alpha - 1} = \frac{2 tg\alpha}{1 - tg^2\alpha}$

$9 +$ $\quad 2\sin(2\alpha + 2\beta)\cos(2\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{\sqrt5}$

$2 - \frac{1}{\sqrt5}\cos 2\beta + \sin 2\alpha = -\frac{4}{\sqrt5}$

$\frac{1}{5} + \frac{1}{12}$

$-\frac{112}{8} \Big| \frac{4}{2}$

$4 \cdot 28$

$13^a = 5^a + 12^a$

$\log_{12}(x^2 + 8x) > \log_{12} 12$

$\frac{1}{25} + \frac{1}{144} = \frac{1}{169}$

$169^2 = 25 \cdot 144$

$\log_5 t > \log_5 5^1$

$\log$

$64 + 48 = 112$

$13^a - 5^a - 12^a \le 0$

$\frac{1}{13} - \frac{1}{5} - \frac{1}{12} \le 0$

$x_1, x_2 = \frac{-8 \pm \sqrt{4 \cdot 28}}{2}$

$\frac{1}{\sqrt5} - \frac{1}{\sqrt{12}} > \frac{1}{\sqrt{13}}$

$5 \cdot 12 - 13 \cdot 12 - 13 \cdot 5 \le 0$

$60 - 13 \cdot 12 - 13 \cdot 5 \le 0$

$= -4 \pm \sqrt{28}$

$-4 \pm 2\sqrt7$

$\log_5 t < \log_5 5^2$

$\log_5 t + \cancel{\log_5} 1$

$\begin{cases} t < 25 \ \cancel{\log} \\ t > 1 \end{cases}$

$2\sqrt7 \cancel{>} 4$

> 16

$5^{\log}$

$5^{\log_{12}(x^2 + 18x)} < 5^2$

$\log_{12}(x^2 + 18x) < \log_{12} 144$

$x^2 + 18x < 144$

$\cancel{\log x}$

$(x^2 + 18x)^{\log_{12} 5} = \cancel{t}\,(x^2 + 18x)^{\log_{(x^2+18x)} t}$, $\quad \log_{12} 5 = \log_{(x^2 + 18x)} t$

$= t$

$t^{\log_{12} 5} + t^{\log_{12} 12} \geq t^{\log_{12} 13}$ $\quad t^{\log_{12} 5}\left(1 + t^{\log_{12} 12 - \log_{12} 5} - t^{\log_{12} 13 - \log_{12} 5}\right) \geq 0$

$5^{\log_{12}(x^2 + 18x)} + (x^2 + 18x) \geq (x^2 + 18x)^{\log_{12} 13}$

$t^{\log_{12} 5} + t \geq t \cdot t^{\log_{12} 1}$, $\quad t^{\log_{12} 1} / t^{\log_{12} 5 - \log_{12} 1} + t^{\cancel{\log_{12}}}$

$(x^2 + 18x)$

$\log_{12}(12 + 1) = (1 + \log_{12} 1) = (x^2 + 18x) \cdot (x^2 + 18x)^{\log_{12} 1}$

$t^{\log_{12} 5}\left(1 + t^{1 - \log_{12} 5} - t^{\log_{12} 13 - \log_{12} 5}\right) \geq 0$

(1) $(x^2 + 18x) = t$, $\quad t^{\log_{12} 5} + t \geq t^{\log_{12} 13}$, $\quad = t \cdot t^{\log_{12} 1}$

$t^{\log_{12}(12+1)} = t^{1 + \log_{12} 1}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)