МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}; \qquad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy - x - 2y + 2}, \\ x^2 + 9y^2 - 4x - 18y = 12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geqslant \left|x^2 + 18x\right|^{\log_{12} 13} - 18x.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = 8$, $BD = 17$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 24$, $1 \leqslant y \leqslant 24$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x + 11}{4x + 3} \leqslant ax + b \leqslant -8x^2 - 30x - 17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}\right)$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB = 1$, $BD = 2$, $CD = 3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

© МФТИ, 2022

МФТИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geqslant |x^2+18x|^{\log_{12}13} - 18x$

Пусть $x^2+18x = t$, $t>0$!

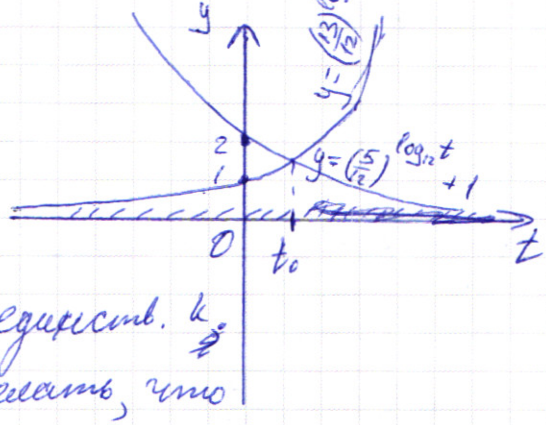
$5^{\log_{12}t} + t \geqslant |t|^{\log_{12}13}$, учитывая, что $t>0$:

$t^{\log_{12}5} + t \geqslant t^{\log_{12}13}$. Т.к. $t>0$, поделим на t:

$t^{\log_{12}\frac{5}{12}} + 1 \geqslant t^{\log_{12}\frac{13}{12}}$, либо получаем:

$\left(\frac{5}{12}\right)^{\log_{12}t} + 1 \geqslant \left(\frac{13}{12}\right)^{\log_{12}t}$. Схематично изобразим данное неравенство на коорд. пл-ти:

Пусть $\log_{12}t = k$:



$\left(\frac{5}{12}\right)^k + 1 \geqslant \left(\frac{13}{12}\right)^k$, так как функция слева убывает, а справа возрастает, то к равенство достигается при лишь единств. k, ~~ту~~ Находим подбором, что несложно сделать, что

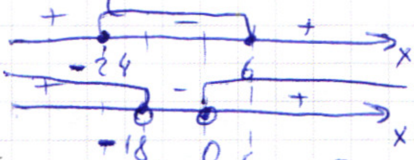
$k \leqslant 2$, т.е. $\log_{12}t \leqslant 2$

$\log_{12}t \leqslant \log_{12}144$

Т.к. $y = \log_{12}t$ — возрастающ. ф-ция, $\Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} t \leqslant 144 \\ t>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+18x \leqslant 144 \\ x^2+18x>0 \end{cases}; \begin{cases} x^2+18x-144 \leqslant 0 \\ x(x+18)>0 \end{cases}$

$\begin{cases} (x-6)(x+24) \leqslant 0 \\ x(x+18)>0 \end{cases}$

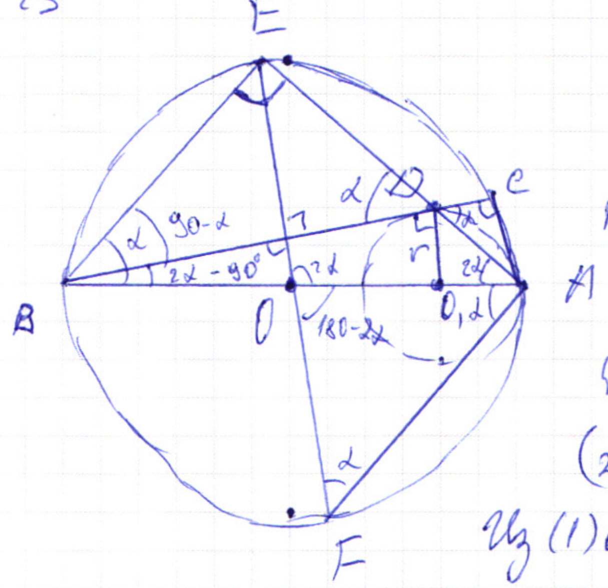


т.е. $x \in [-24; -18) \cup (0; 6]$

Ответ: $x \in [-24; -18) \cup (0; 6]$.

BC = 25

№4



∆-ки ABC и BO_1D – подобны => (O и O_1 – центры окр. Ω и ω)

$$\Rightarrow \frac{AC}{r} = \frac{BC}{BD} = \frac{2R}{2R-r} = \frac{25}{17} \quad (1),$$ где R и r – радиусы Ω и ω

по т. Пифагора из данных ∆-ков имеем:

$$4R^2 = 625 + AC^2$$
$$(2R-r)^2 = 289 + r^2$$

Из (1) выр => $AC = \frac{25}{17} r$;

$34R = 50R - 25r \Rightarrow r = \frac{16R}{25}$ } =>

$$\Rightarrow 4R^2 - \frac{64}{25}R^2 = 289 \Rightarrow R = \frac{85}{6};\ r = \frac{136}{15};\ AC = \frac{40}{3}$$

Из ∆-ка DCA по т Пифагора:

$$AD = \sqrt{DC^2 + AC^2} = \sqrt{64 + \frac{1600}{9}} = \frac{8\sqrt{34}}{3}$$

по св-ву хорд в окр.: $ED \cdot DA = BD \cdot DC$

$$\frac{8\sqrt{34}}{3} \cdot ED = 136 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ED = \frac{3\sqrt{17}}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{34}}{2}$$

Тогда $AE = ED + AD = \frac{25\sqrt{34}}{6}$

по т синусов в ∆-ке EFA: $2R = \frac{AE}{\sin\angle EFA} \Rightarrow \sin\angle EFA =$

$$= \cancel{\frac{\frac{85}{3}}{2\frac{5\sqrt{34}}{6}}}\ \cancel{\frac{2R}{AE}}\ \frac{AE}{2R} = \frac{5\sqrt{34}}{34} \Rightarrow \angle EFA = \arcsin\frac{5\sqrt{34}}{34}$$

Пусть $\angle CDA = \alpha$, тогда: $\angle AO_1D = 2\alpha = \angle EOA \Rightarrow \cancel{\angle EFA = \alpha}$

$\angle FOA = 180^\circ - 2\alpha$

$\angle EOB = 180^\circ - 2\alpha \Rightarrow \angle OBC = 2\alpha - 90^\circ$

$\angle EDB = \alpha = \angle CDA$, $\angle E = 90^\circ$ (т.к. опир. на диам.); $\angle EBC = 90^\circ - \alpha$ } =>

$\Rightarrow \angle EBC = \angle EFA = \alpha \Rightarrow \angle BAF = \alpha \Rightarrow EA = BF \Rightarrow EABF$ – прямоуг

$\Rightarrow EF$ – диам. $= AB = \frac{85}{3} \xRightarrow{\text{по т Пиф во AFE}} AF = \frac{5\sqrt{113}}{3\sqrt{2}} \Rightarrow S_{AFE} =$

$= \frac{1}{2} AF \cdot EF \cdot \sin\angle EFA = \frac{2125\sqrt{7684}}{1224}$. Ответ: $R = \frac{85}{6}$; $r = \frac{136}{15}$; $\angle EFA = \arcsin\frac{5\sqrt{34}}{34}$; S (см. выш.)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5

$f(ab)=f(a)+f(b)$

$f(p)=\left[\frac{p}{4}\right]$

$1\le x\le 24$

$1\le y\le 24$

$f(x/y)<0 \Rightarrow f(x)+f\left(\left[\frac{1}{y}\right]\right)<0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\frac{x}{4}\right]+\left[\frac{1}{y\cdot 4}\right]<0$

при $x\in[1;24]$; $\left(\frac{x}{4}\right)\in\left[\frac{1}{4};6\right]$; $\left[\frac{x}{4}\right]\in[0;6]$

при $y\in[1;24]$; $\left(\frac{1}{4y}\right)\in\left[\frac{1}{4};\frac{1}{96}\right]$; $\left[\frac{1}{4y}\right]\in\{0\}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \left(\left[\frac{x}{4}\right]+\left[\frac{1}{4y}\right]\right)\in[0;6] \Rightarrow \left[\frac{x}{4}\right]+\left[\frac{1}{4y}\right]<0$ - невыполнимое неравенство, т.е.

кол-во таких чисел $=0$!

Ответ: 0

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

№6

$$\begin{cases} \dfrac{12x+11}{4x+3} \le ax+b \\ -8x^2-30x-17 \geqslant ax+b \end{cases}$$

$x \in \left[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}\right]$

$ax+b$ – прямая, лежащая между параболой и гиперболой, согласно условию.

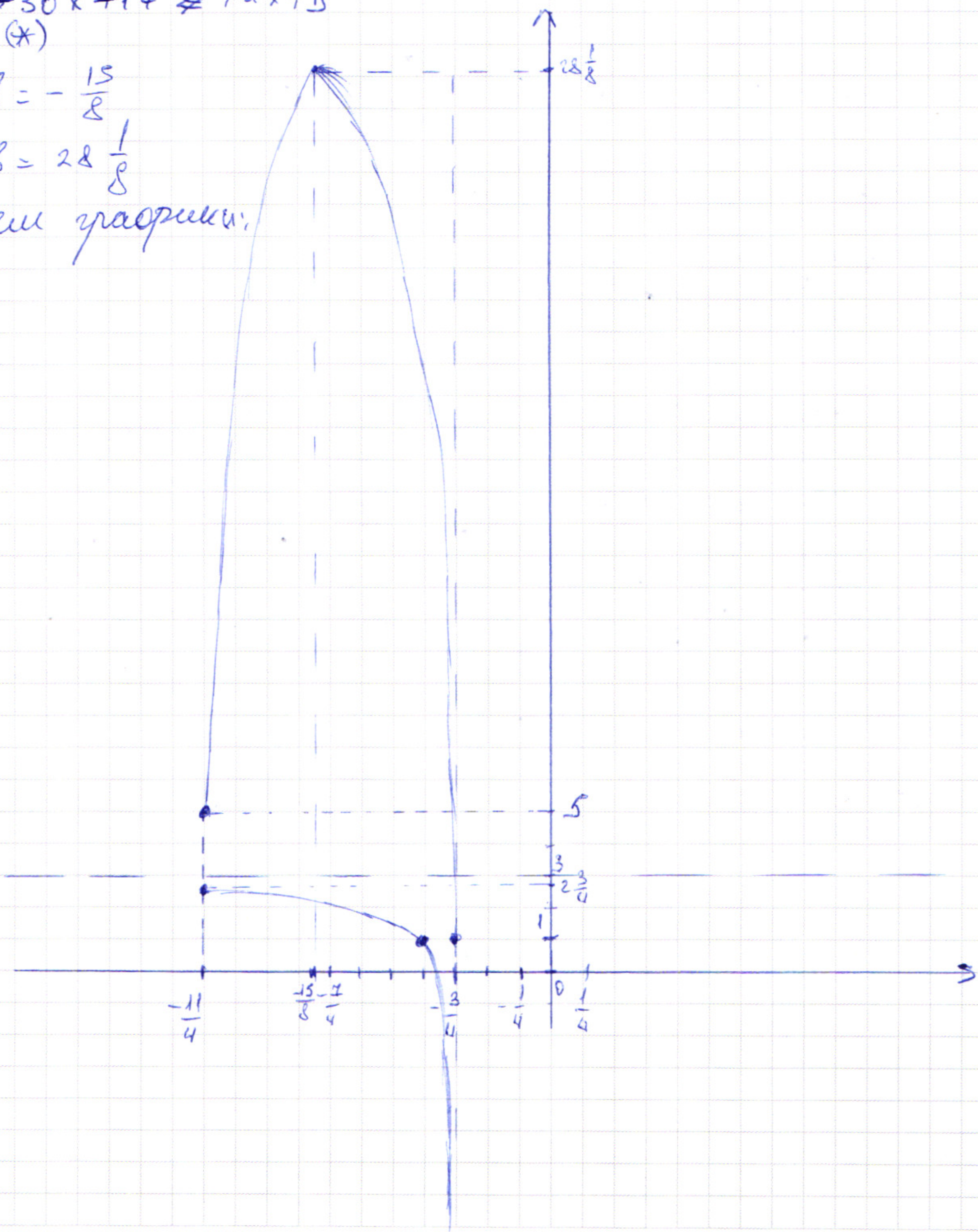
~~12x+7~~

$$\begin{cases} 3+\dfrac{2}{4x+3} \le ax+b \\ -8x^2-30x-17 \geqslant ax+b \end{cases}$$
(*)

(*) $x_в = -\frac{15}{8}$

$y_в = 28\frac{1}{8}$

Нарисуем графики:



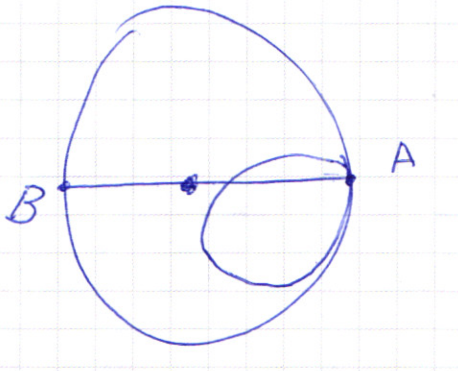
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

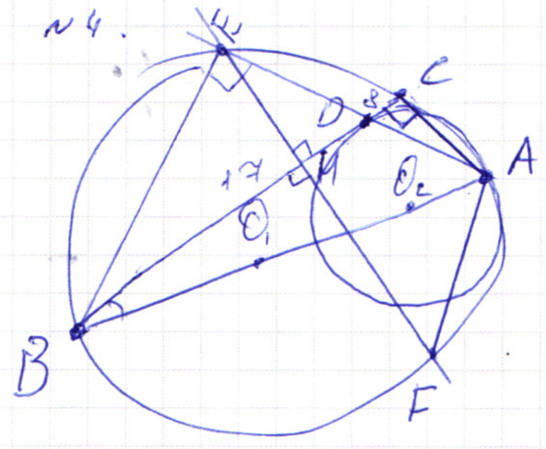
ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



№4.



$r, R - ?$

$\angle AFE - ?$

$S_{AEF} - ?$

$BC = 25.$

$CD = 8$

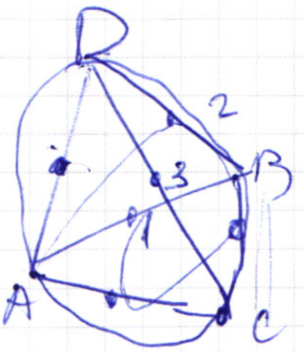
$BD = 17$

$$\begin{array}{r} \times 17 \\ 8 \\ \hline 136 \end{array}$$

x

$AC = \sqrt{x^2 - 625}$

$$\begin{array}{r} \times 17 \\ 17 \\ \hline +119 \\ 17 \\ \hline 289 \end{array}$$



$BD \cdot DC = ED \cdot AD$

$136 = ED \cdot AD$

$+136$

$AC^2 = AD^2 - 64$

$AC^2 = x^2 - 625$

$x^2 = EB^2 + AE^2$

$EB^2 = \cancel{289} \; ED^2 - 289$

$x^2 = ED^2 - 289 + AE^2$

$AD^2 - 64 = x^2 - 625.$

$\frac{136^2}{AD^2} - 289 + AE^2 =$

$ED \cdot AD = 136$

$ED = \frac{136}{AD}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

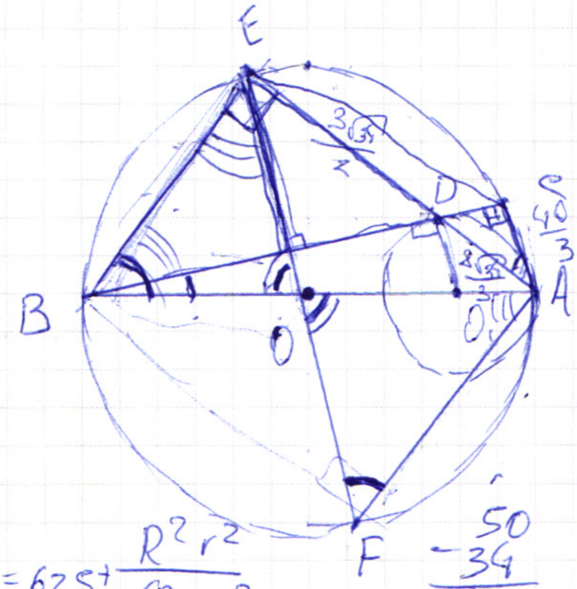
Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$BD = 17$

$DC = 8$

$BC = 25$



$\frac{1156 - 256}{900}$

$\frac{900}{289}$ $R^2 = 625$

$\frac{R}{R-r} = \frac{AC}{r} = \frac{25}{17}$

$\frac{R^2 r^2}{(R-r)^2}$, $\frac{30}{17} R = \frac{5}{25}$, $R = \frac{85}{6}$

$4R^2 = 625 + AC^2 = 625 + \frac{R^2 r^2}{(R-r)^2}$

$50 - 34 = 16$

$\frac{50 + 17}{33}$

$625 - 289 = 336$

$(2R - r)^2 = r^2 + 289$

$4R^2 - 4Rr + r^2 = r^2 + 289$

$4R^2 = 625 +$

$\frac{289}{6}$

$17 \cdot 8 = 136$

$625 + \frac{R^2 r^2}{(R-r)^2} = 289 + 4Rr$

$AC = \frac{25}{17} r$

$\frac{2R}{2R - r} = \frac{25}{17}$

$336 + \frac{R^2 r^2}{R^2 + 2Rr + R^2}$

$4R^2 = 625 + \frac{625}{289} r^2$

$4R^2 - 4Rr = 289$

$17R = 50R - 25r$

$25r = \frac{8R}{}$

$r = \frac{8R}{25}$

$4R^2 = 625 + \frac{625}{289} \cdot \frac{64}{625} \cdot R^2$

$4R^2 - 4R^2 \cdot \frac{8}{25} = 289$

$4 \cdot 289 = 1156$, $1156 - 64 = 1092$

$\frac{1092}{289} R^2 = \frac{625}{25 \cdot 25}$

$1092 - 102 = 72$

$4R^2 = 625 + \frac{64}{289} \cdot R^2$

$4R^2 - \frac{32}{25} R^2 = 289$

$100 - 32 = 68$

$\frac{68}{25} R^2 = 289$

$\frac{\sqrt{68}}{5} R = 17$

$R = \frac{85}{\sqrt{68}}$

$17 \cdot 5 = 85$

$r = 8 \cdot \frac{85}{\sqrt{68}} \cdot \frac{1}{25}$

$4R^2 = 625 + \frac{256}{289} R^2$

$r = \frac{136}{5\sqrt{68}}$

$4R^2 - \frac{64}{25} R^2 = 289$

100 $17 \cdot 17$

$R = \frac{85}{6}$

$\frac{36}{25} R = 17$

$25r = 33R$

$r = \frac{16 \cdot 85}{36 \cdot 25} = \frac{136}{15}$

$\frac{136}{15} \cdot \frac{85}{6}$ $\frac{68 \cdot 17}{9} + \frac{4 \cdot 85^2}{369}$

$r = \frac{16R}{25}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin 2\alpha \cos 2\beta + \sin 2\beta \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin 2\alpha \cos 2\beta(\cos 2\beta + \cos 2\alpha) = -\frac{2}{5}$

$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$(\sin(2\alpha+2\beta) + \sin(2\alpha - 2\beta)) \cdot \sin(2\alpha+2\beta) \cdot \sin(2\alpha - 2\beta) = -\frac{2}{5}$

$\left(-\frac{1}{\sqrt{5}} + (\underbrace{\sin 2\alpha - 2\beta}_{x})\right) \cdot + \frac{1}{\cancel{\sqrt{5}}} \cdot \sin 2\alpha - 2\beta = + \frac{2}{\sqrt{5}}$

$\sin 2\alpha \cancel{\cos 2}$

$\left(x - \frac{1}{\sqrt{5}}\right) \cdot x = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$\sin 2\alpha \cancel{2} \cos^2 2\beta + 2 \sin 2\beta \cos 2\beta + \sin 2\alpha = -\frac{2x}{5}$

$x^2 - \frac{x}{\sqrt{5}} - \frac{2}{\sqrt{5}} = 0$

$\sin 2\alpha \cos 2\beta(\cos 2\beta + \cos 2\alpha)$

$\sqrt{5}x^2 - x - 2 = 0$

$\sin 2\alpha \cdot 2\cos^2 2\beta + 2 \sin 2\alpha \cos 2\beta \cos 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$D = 1 + 8\sqrt{5}$

$\sin 2\alpha \cos 2\beta(\cos 2\alpha + \cos 2\beta) = -\frac{2}{5}$

$\frac{1}{2}(\underbrace{\sin(2\alpha + 2\beta)}_{x} + \underbrace{\sin(2\alpha - 2\beta)}_{y}) \cdot \frac{1}{2} \underbrace{\sin(2\alpha+2\beta)}_{x} \cdot \underbrace{\sin(2\alpha - 2\beta)}_{y} = -\frac{2}{5}$

$\begin{cases} (x+y) \cdot x^2 y = -\frac{2}{5} \\ x = -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}$

$x^2 y + xy^2 = -\frac{2}{5}$

$x = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\frac{1}{5}y - \frac{1}{\sqrt{5}}y^2 = -\frac{2}{5} \quad | \cdot 5$

$\sqrt{5}y^2 - y - 2 = 0$

$D = 1 + 8 \cdot \sqrt{5}$

$y = \frac{1 + \sqrt{1 + 8\sqrt{5}}}{2\sqrt{5}}$

$y = \frac{1 + \sqrt{1 + 8\sqrt{5}}}{2\sqrt{5}}$

$\frac{5,2}{4,46} > 0 \qquad \frac{1-4}{4,46}$

$2,23 \cdot 2 = 4,46$

$8 \cdot 2,23$

$2,23 \cdot 8 = 17,84$

$\sqrt{18,84} \approx 4,2$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} x-2y = \sqrt{xy - x - 2y + 2} \\ x^2 + 9y^2 - 4x - 18y = 12 \end{cases}$$

$x \geq 2y$

$xy - x - 2y + 2 \geq 0$

$x^2 - 4xy + 4y^2 = xy - x - 2y + 2$

$$\begin{cases} x^2 - 5xy + x + 2y + 4y^2 = 2 \quad | \cdot -1 \\ x^2 + 9y^2 - 4x - 18y = 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x^2 + 5xy - x - 2y - 4y^2 = -2 \\ x^2 - 4x - 18y + 9y^2 = 12 \end{cases} + \Rightarrow 5y^2 - 20y - 5x + 5xy = 10$$

$y^2 - 4y - x + xy = 10$

$x = \dfrac{y^2 - 4y - 10}{1-y}$

$y^2 - 4y - 10 = x(1-y)$

$D = 16 + 40 = 56 \quad y \neq 1$

$x - 2y = \sqrt{xy - x - 2y + 2}$

$\dfrac{y^2 - 4y - 10}{1-y} - 2y = \sqrt{\dfrac{y^3 - 4y^2 - 10y - y^2 + 4y + 10}{1-y} - 2y + 2}$ $\quad y = 1$

$\dfrac{y^2 - 4y - 10 - 2y + 2y^2}{1-y} = \sqrt{\dfrac{y^3 - 5y^2 - 6y + 10}{1-y} - 2y + 2}$

$-\,\dfrac{y^3 - 5y^2 - 6y + 10}{y^3 - y^2} \Big| \dfrac{y-1}{y^2}$, $\quad 6y^2 - 6y$

$y^3 - 5y^2 - 6y + 10, \; y = 1 \quad 1 - 5 - 6 + 10 = 0$

$$\begin{array}{l|l} y^3 - 5y^2 - 6y + 10 & y - 1 \\ -\,y^3 - y^2 & y^2 - 4y - 10 \\ \hline -4y^2 - 6y & \\ -\,-4y^2 + 4y & \\ \hline -10y + 10 & \end{array}$$

y^2

$\dfrac{3y^2 - 6y - 10}{1-y} = \sqrt{\dfrac{(y-1)(y^2 - 4y - 10)}{1-y} - 2y + 2}$

$\sqrt{-y^2 + 4y + 10 - 2y + 2} = \dfrac{3y^2 - 6y - 10}{1-y} \geq 0$

$D = 36 + 120 = 156$

$D = 4 + 48 = 52$

$\sqrt{-y^2 + 2y + 12}$

$-y^2 + 2y + 12 = \dfrac{(3y^2 - 6y - 10)^2}{(1-y)^2}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$R = \frac{85}{6}$

$V = \frac{136}{15}.$

$\frac{AC}{\frac{136}{15}} = \frac{25}{17}$

$\frac{AC \cdot \cancel{15}}{\cancel{136}} = \frac{25}{\cancel{17}} = \frac{40}{3}$

$AC = \frac{40}{3}$

$AD = \sqrt{\frac{1600}{9} + \frac{576}{9}}$

$\boxed{AD = \frac{8\sqrt{34}}{3}}$

$AD \cdot ED = 8 \cdot 17$

$\frac{\cancel{8}\sqrt{34}}{3} \cdot ED = \cancel{8\sqrt{34}}\ 8\sqrt{17}$

$ED = \frac{3\sqrt{17}}{\sqrt{2}}$

$AE = AD + ED = \frac{3\sqrt{17}}{\sqrt{2}} + \frac{8\sqrt{34}}{3} = \frac{9\sqrt{34}}{6} + \frac{16\sqrt{34}}{6} = \frac{25\sqrt{34}}{6}$

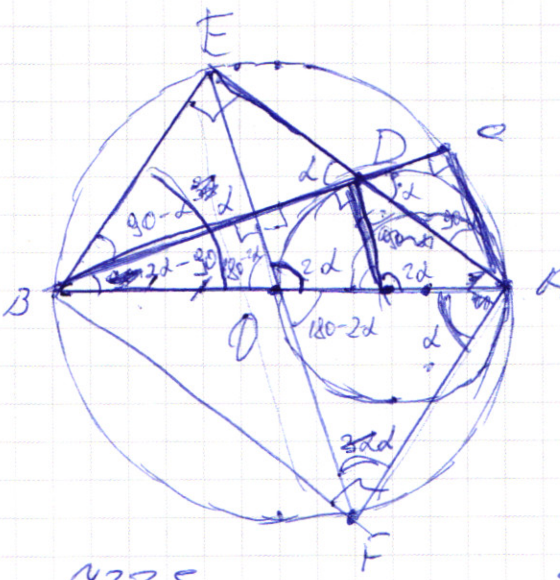
$\cancel{2R = \frac{25\sqrt{34}}{6}}$ $2R = \frac{AE}{\sin\alpha}$

$\sin\alpha = \frac{AE}{2R} = \frac{\frac{25\sqrt{34}}{6}}{2 \cdot \frac{85}{6}} = \frac{5\sqrt{34}}{34}$

$\alpha = \arcsin \frac{5\sqrt{34}}{34}.$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)



180 + α

180 =

$BF = AE$

$AF = BE$

$EF = \frac{85}{3}$

$AF = \sqrt{\frac{7225}{9} - \frac{625 \cdot 17}{18}} = \sqrt{\frac{5025}{18}} = \frac{5}{3} \cdot \sqrt{\frac{5 \cdot 41}{2}}$

$\frac{5\sqrt{113}}{3\sqrt{2}}$

$AF = \frac{5\sqrt{113}}{3\sqrt{2}}$

$S = \frac{5\sqrt{113}}{3\sqrt{2}} \cdot \frac{85}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{5\sqrt{34}}{34} = \frac{5}{6} \cdot \sqrt{226} \cdot \frac{85}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{5\sqrt{34}}{34}$

$S = \frac{2125\sqrt{7684}}{1224}$

$7225 \cdot 2 = 14450$

$14450 - 9425 = 5025$

$625 \cdot 17$: 4375, 625, 10625

10050

$5025 : 25 = 201$; $205 : 5 = 41$

$14450 - 10625 = 3825$

$3825 : 25 = 113$

$85 \cdot 85 = 7225$; $7225 \cdot 2 = 14450$

$85 \cdot 25 = 2125$

$226 \cdot 34 = 7684$

$36 \cdot 34 = 1224$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2+9y^2-4x-18y-12=0 \end{cases}$$

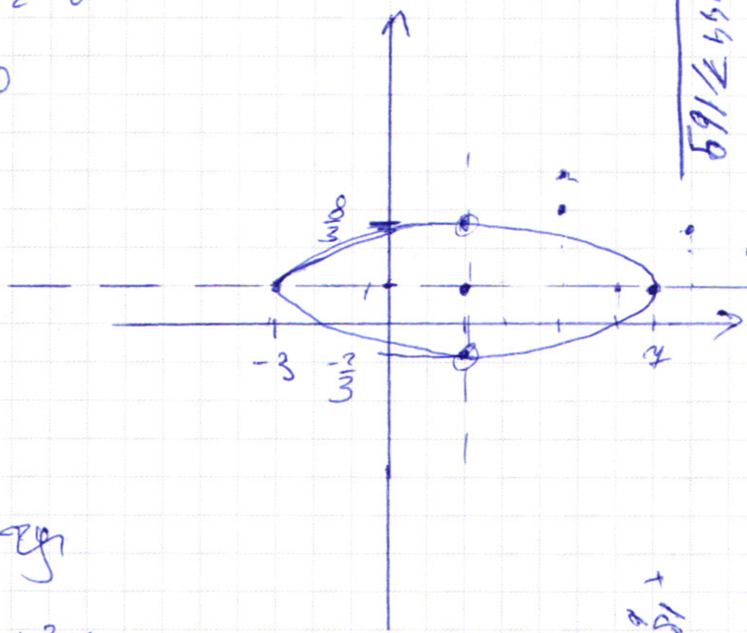
$x^2-4x+4-4+9y^2-18y+9-9-12=0$

$(x-2)^2-4+(3y-3)^2-9-12=0$

$-13 \quad -25$

$(x-2)^2+9(y-1)^2=25$

$(3y-3)^2$



$y=1$

$x=7$

$x=-3$

$x=2$

$(y-1)^2=\frac{25}{9}$

$y-1=\pm\frac{5}{3}$

$y=\frac{5}{3}+1=\frac{8}{3}$

$y=1-\frac{5}{3}=-\frac{2}{3}$

$x^2+4y^2-4xy=xy-x-2y+2$

$x^2-5xy+4y^2+x+2y-2=0$

$5y$

y^2-4y

$x=\frac{y^2-4y-10}{1-y}$

$D=16+40$

$\begin{array}{r|l} y^2-4y-10 & y-1 \\ y^2-y & y-3 \\ -3y-10 & \\ -3y+3 & \\ -13 & \end{array}$

$x=y-1+\frac{13}{y-1}$

$y\neq1$

$x=1-y+\frac{13}{y-1}$

$\left(\frac{13}{y-1}\right)'=13\cdot\left(\frac{1}{y-1}\right)'=13\cdot-\frac{1}{(y-1)^2}$

$130 \,|\, 15$, $120 \quad 8$, 10

$8\frac{10}{15}=8\frac{2}{3}$

$x=1-y+\frac{13}{y-1}$

$y=2$ $\quad -2+\frac{13}{2}=$

$y=2,5$ $\quad -1,5+\frac{13}{1,5}$

$y=3$

$y=\frac{8}{3}$

$-1+\frac{13}{1}=12$

$\sqrt{144+2}\ldots$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$\times\frac{15}{11}$, 15, $+15$, 165

№ 3

$-\frac{11}{4} - \frac{121}{2} + \frac{165}{2} - 17$

$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13} - 18x$

$165 - 121 = 44$ $\quad 22 - 17 = 5$

$x^2+18x+5^{\log_{12}(x^2+18x)} \geq 13^{\log_{12}(x^2+18x)}$

$x^2+18x>0$

$x(x+18)>0$

x^2+18x

$+ \quad -18 \quad - \quad 0 \quad +$

$t+5^{\log_{12}t} \geq 13^{\log_{12}t}$

$144 \cdot 4 = 576$, $576+324 = 900$

$t+t^{\log_{12}5} \geq t^{\log_{12}13}$ $\quad x^{\log_4 5} = 8$

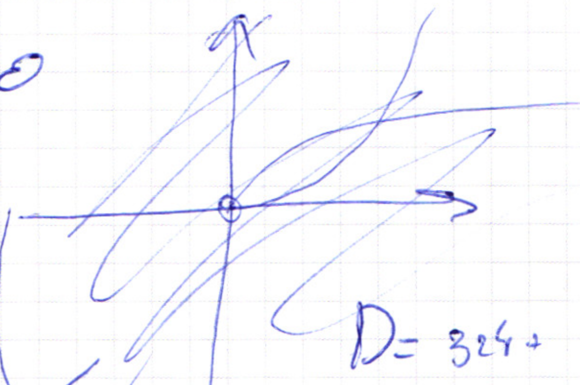
$t>0$

$t+t^{\log_{12}5} \geq t^{\log_{12}13}$

$t>0$

$\log_{12}$

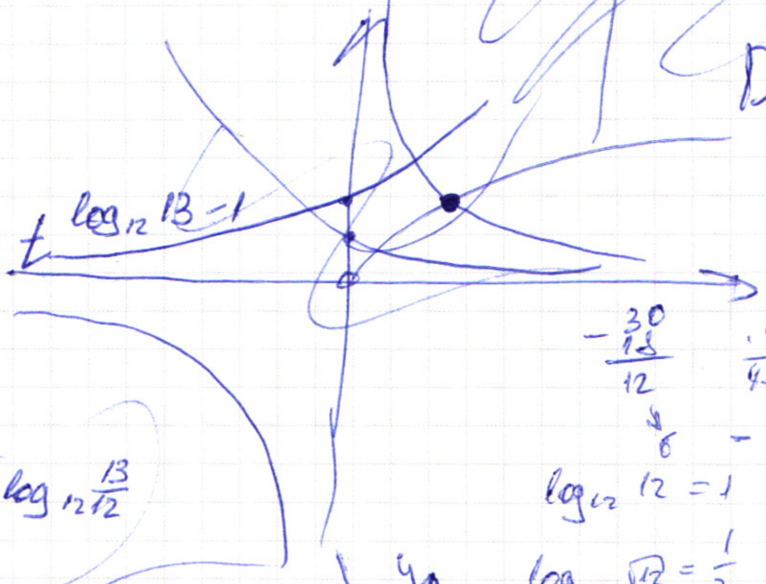
$t+t^{\log_{12}5-1} \geq t^{\log_{12}13-1}$



$t \quad t=$

$D=324+$

$t=1$



$1+t^{\log_{12}5-1} = t^{\log_{12}13-1}$

$3+\frac{2}{-1}$

$3-2$

1

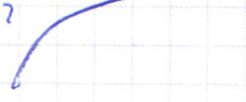
$1+t^0$

$-\frac{30}{18} = 12$, 6 $\quad \frac{18}{42}$, -21

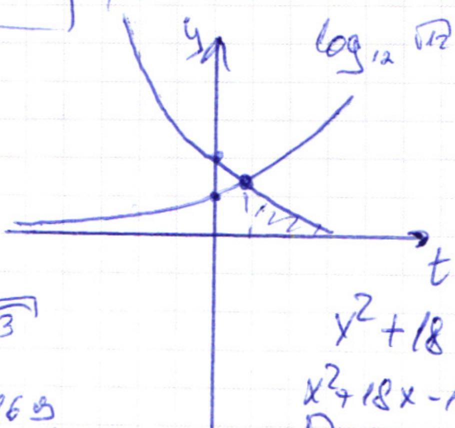
$1+t^{\log_{12}\frac{5}{12}} = t^{\log_{12}\frac{13}{12}}$

$\log_{12}12=1$

$\log_{12}\sqrt{12}=\frac{1}{2}$



$1+\frac{5}{12}^{\log_{12}t} = \left(\frac{13}{12}\right)^{\log_{12}t}$



$t=12$

$t=144$

$\frac{12+5}{12} = \frac{13}{12}$ $\quad t=\sqrt{12}$

$17=13$ $\quad \sqrt{5}+\sqrt{12}=\sqrt{13}$

$t=144$

$1+\frac{25}{144} = \frac{169}{144}$

$x^2+18x = 144$

$x^2+18x-144=0$

$D=900$

$x=\frac{-18+30}{2}=6$ $\quad x=\frac{-18-30}{2}=-24$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$ $tg\alpha - ?$

$\cancel{\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}}$

$\sin 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin 2\alpha\cos 4\beta + \sin 4\beta\cos 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$\sin 2\alpha\,(2\cos^2 2\beta - 1 + 1) + 2\sin 2\beta\cos 2\beta\,\cos 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$\cancel{2}\sin 2\alpha\cos^2 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\beta\cos 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$\sin 2\alpha\cos 2\beta\,(\cos 2\beta + \cos 2\alpha) = -\frac{2}{5}$

$0 \quad \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad + \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \frac{\sqrt{\pi}}{6} \quad \frac{2\sqrt{\pi}}{3} \quad \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \frac{1}{2}$

$\cos 2\beta + \cos 2\alpha = 2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\sin(2\alpha-2\beta)$

$\frac{\sqrt{\pi}}{3} + \frac{\sqrt{\pi}}{3} \quad \frac{2\sqrt{\pi}}{3} \quad \cos\ 0$

$2\pi \quad -\frac{1}{2} \quad -1$

$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$

$\sin^2(2\alpha+2\beta)\cdot\sin(2\alpha-2\beta)$

$\sin^2 x\sin y + \sin y\sin^2 x$

$\frac{\sqrt{\pi}}{3} \quad \frac{\sqrt{\pi}}{6} = \quad \cos\frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\cos\frac{1}{2}$

0

$= \frac{1+\sqrt{3}}{2} \quad 2\cdot 1\cdot 8,\frac{1}{2}$

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$

$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha$

$\frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right) = \sin\alpha\cos\beta$

$\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin(\alpha-\beta) = \sin^2\alpha\cos^2\beta - \sin^2\beta\cos^2\alpha$

$\cancel{2}\sin 2\alpha\cos 2\beta\cdot\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\sin(2\alpha-2\beta) = -\frac{2}{5}\ 1$

$\frac{1}{2}\left(\sin(2\alpha+2\beta)+\sin(2\alpha-2\beta)\right)\cdot\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\sin(2\alpha-2\beta) = -\frac{2}{5}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\frac{12x+11}{4x+3}$

$\sin(2\alpha-2\beta) = \frac{1-\sqrt{1+8\sqrt{5}}}{2\sqrt{5}}$

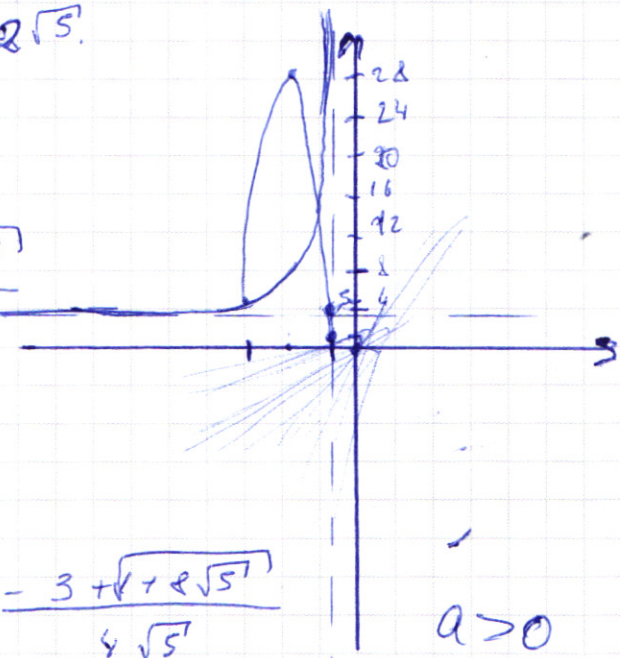
$12x+11 \;|\; 4x+3$, $12x+9$, 3, 2

$\sin 2\alpha \cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin 2\alpha \cos 2\beta - \cos 2\alpha \sin 2\beta = \frac{1-\sqrt{1+8\sqrt{5}}}{2\sqrt{5}}$

$\sin 2\alpha \cos 2\beta = \frac{-1-\sqrt{1+8\sqrt{5}}}{4\sqrt{5}}$

$\cos 2\alpha \sin 2\beta = \frac{-3+\sqrt{1+8\sqrt{5}}}{4\sqrt{5}}$



$\sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta = \frac{-1-\sqrt{1+8\sqrt{5}}}{4\sqrt{5}}$

$\cos 2\alpha \cdot \sqrt{1-\sin^2 2\beta} = \frac{-3+\sqrt{1+8\sqrt{5}}}{4\sqrt{5}}$

$\cos 2\beta = \frac{-1-\sqrt{1+8\sqrt{5}}}{4\sqrt{5}\cdot \sin 2\alpha}$

$\cos 2\alpha \cdot \sqrt{1-\left(\frac{+1+\sqrt{1+8\sqrt{5}}}{4\sqrt{5}\sin 2\alpha}\right)^2} = \frac{-3+\sqrt{1+8\sqrt{5}}}{4\sqrt{5}}$

$a>0$

$b<1$

$\cos 2\alpha \cdot \sqrt{\frac{80\sin^2 2\alpha - 1 - 1 - 8\sqrt{5} - 2\sqrt{1+8\sqrt{5}})}{80\sin^2 2\alpha}} = \frac{-3+\sqrt{1+8\sqrt{5}}}{4\sqrt{5}}$

$-y^2-12y+12 = \frac{9y^4+36y^2+100-36y^3-60y^2+120y}{}$

$\frac{-60}{36}$, 24

y^2-2y+1

$(-y^2+2y+12)(y^2-2y+1) = 9y^4-36y^3-24y^2+120y+100$

$x=-\frac{11}{4}$

$-y^4+2y^3-y^2+2y^3-4y^2+2y+12y^2-24y+12$

$3+\frac{2}{-11+3} = -\frac{1}{4}$, -8

$-y^4+4y^3-7y^2-22y+12 = 9y^4-36y^3-28y^2+120y+100$

$2\frac{3}{4}$

$10y^4-40y^3-17y^2+142y+88=0$

$10+40-17-142+88$

$\frac{17}{68}$, $\frac{7}{4}$

$x_B = \frac{30}{-16} = -\frac{15}{8} =$

$x > -\frac{3}{4}$

138

$x=$

$160+240-68-284+88$

$y_B = -8\cdot\frac{225}{64} + 30\cdot\frac{15}{8} \quad -8\cdot\frac{9}{16} + \frac{45}{2}$

30

$225 \;|\; 8$, 16, 28, 65, 64, 1

$28\frac{1}{8}$

$-\frac{225}{8} + \frac{225}{8} - 17 \qquad -17$, $\frac{36}{2}$

$18-17=1$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)