МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. **[3 балла]** Углы α и β удовлетворяют равенствам
$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}}; \quad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}.$$
Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. **[4 балла]** Решите систему уравнений
$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}, \\ x^2+9y^2-4x-18y=12. \end{cases}$$

3. **[5 баллов]** Решите неравенство
$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geqslant \left|x^2+18x\right|^{\log_{12}13}-18x.$$

4. **[5 баллов]** Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=8$, $BD=17$.

5. **[5 баллов]** Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1\leqslant x\leqslant 24$, $1\leqslant y\leqslant 24$ и $f(x/y)<0$.

6. **[5 баллов]** Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство
$$\frac{12x+11}{4x+3}\leqslant ax+b\leqslant -8x^2-30x-17$$
выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4};-\frac{3}{4}\right)$.

7. **[6 баллов]** Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB=1$, $BD=2$, $CD=3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin2\alpha\cdot\cos2\beta+\cos2\alpha\cdot\sin2\beta=-\frac{1}{\sqrt5}$

$2\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\frac{2}{\sqrt5}+(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)\cdot\sin2\beta=-\frac{1}{\sqrt5}\ |:\cos^2\alpha$

$\sin(2\alpha+2\beta+2\beta)=\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos(2\beta)+\cancel{\sin}\cos(2\alpha+2\beta)\cdot\sin(2\beta)$

$\sin A+\overset{\sin}{\cancel{\cos}}\beta=2\sin\frac{A+B}{2}\cdot\cos\frac{A-B}{2}$

$2\cdot\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos2\beta=-\frac{4}{5}.$

$|\sin2\beta|=\sqrt{1-\frac{4}{5}}=\frac{1}{\sqrt5}$

$-\frac{2}{\sqrt5}\cdot\cos2\beta=-\frac{4}{5}$

$\cos2\beta=\frac{4}{5}\cdot\frac{\sqrt5}{2}=\frac{2}{\sqrt5}.$

$x^2-2y+4y^2-xy+x-2=0.$

$$\begin{cases} x-2y\geq0 \\ \cancel{x-2y}\ x^2-4y+4y^2=xy-x-2y+2. \\ x^2+9y^2-4x \end{cases}$$

$2\operatorname{tg}\alpha\cdot\frac{2}{\sqrt5}+(1-\operatorname{tg}^2\alpha)\cdot\sin2\beta=-\frac{1}{\sqrt5}$

$x^2-4x+4+9y^2-\underset{2\cdot3\cdot3}{18y}+9=12+13$

$\frac{4}{\sqrt5}\operatorname{tg}\alpha+\sin2\beta-\sin2\beta\cdot\operatorname{tg}^2\alpha=-\frac{1}{\sqrt5}$

$8y-2=4y-1$

$2y=1$

$(x-2)^2+9(y-1)^2=25.$

$\sin2\beta\cdot\operatorname{tg}^2\alpha-\frac{4}{\sqrt5}\cdot\operatorname{tg}\alpha$

x^2

$x^2-4y+4y^2=xy-x-2y+2$

$x^2+x(1-y)+4y^2-2y-2=0$

$x^2-2y+4y^2-xy+x-2=0.$

$D=1-2y+y^2+\overset{16}{\cancel{4}}y^2-\overset{8}{\cancel{2}}y-\overset{8}{\cancel{2}}=$

$=5y^2-4y-1$

$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2+18x\geq|x^2+18x|^{\log_{12}13}.$

4

$t=x^2+18x;\quad t>0$

$5^{\log_{12}t}+t\geq\cancel{t}t^{\log_{12}13}.$

$5^{\log_{12}t}+12^{\log_{12}t}\geq13^{\log_{12}t}$

$t^{\log_{12}5}-t^{\log_{12}13}+t\geq0.$

$\log_{12}t=a.$

$y^2+9y^2-4y-18y=12$

$\log_{12}5\cdot(t^{\log_{12}5-1})-$

$-\log_{12}13(t$

$5^a+12^a\geq13^a.$

$10y^2-22y-12=0.\ |:2$

$5y^2-11y-6=0$

$D=121+120=241=$

$$\begin{array}{r} \overset{3}{1}6 \\ \times16 \\ \hline +96 \\ 16 \\ \hline 56 \end{array}\qquad \begin{array}{r} \overset{4}{1}7 \\ \times17 \\ \hline 119 \\ +17 \\ \hline 289 \end{array}\qquad \begin{array}{r} \overset{3}{1}6 \\ \times16 \\ \hline 96 \\ +16 \\ \hline 256 \end{array}\qquad \begin{array}{r} 15 \\ \times15 \end{array}$$

$\cancel{y}^2 + y - \cancel{5y}^2 + \cancel{4y}^2 + 2y - 2 = 0.$

$(2R - r)^2 = 4R^2 - 4Rr + r^2$

$4R^2 - 4Rr + \cancel{r^2} = \cancel{r^2} + 289$

$4R^2 - 4Rr = 289$

$4 \cdot \frac{25^2}{16^2} \cdot r^2 - 4 \cdot \frac{25}{16} r^2 = 289$

$2y - 1$

$5y - 1 + 3y - 3$

$\frac{8y - 4}{2} = 4y - 2$

$5y - 1 - 3y + 3 = 2y + 2$

$y + 1.$

$\underline{y^2} + \underline{\underline{2y}} + 1 \underline{+ 9y^2} - \underline{\underline{4y}} - 4 - \underline{\underline{18y}} = 12$

$10y^2 - 20y - 15 = 0.$

$(6; 2):$ $6 - 4 = \sqrt{12 - 6 - 4 + 2}$

$2 = 2$

$36 + \cancel{36} - 24 - \cancel{36} = 12.$

$\times \frac{12}{12}$ 144

$\times \frac{144}{12}$ 288

$\times \frac{288}{144}$ 1728

$+ 125$

$2 \; 2$

$\times \frac{169}{13}$ 507

$+ \frac{169}{2197}$

$5^a + 12^a \geq 13^a.$

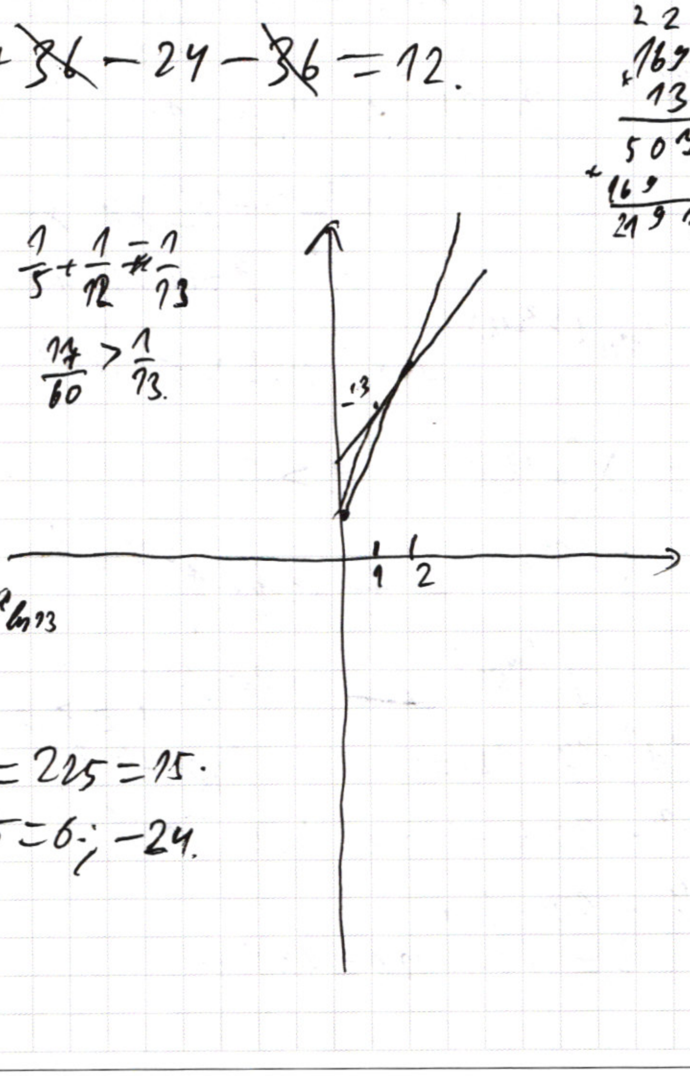
$\frac{1}{5} + \frac{1}{12} \neq \frac{1}{13}$

$\frac{17}{60} > \frac{1}{13}.$

$5^a + 12^a - 13^a \geq 0$

$f(a) = 5^a + 12^a - 13^a.$

$f'(a) = 5^a \ln 5 + 12^a \ln 12 - 13^a \ln 13$



$D_1 = 81 + 144 = 225 = 15.$

$x = 9 \pm 15 = 6; -24.$

$-\cancel{49}$

$-32 \cdot (17 + 6) =$

$=$

$\times \frac{32}{27}$

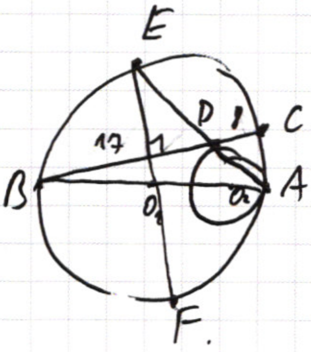
$+ \frac{224}{32}$

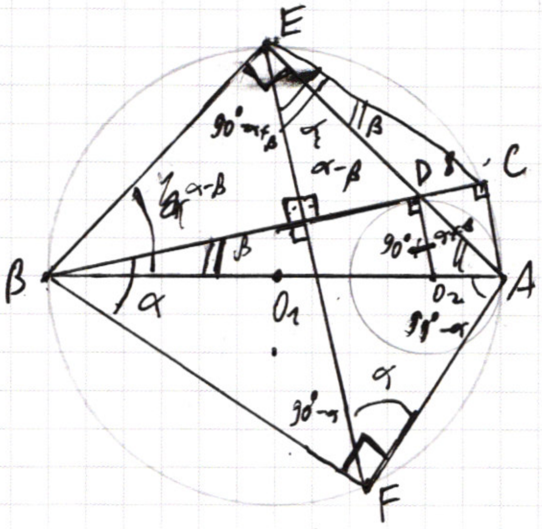
ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\frac{17}{8}=\frac{2R-r}{r}$





$$\frac{BD}{DC}=\frac{17}{8}=\frac{BO_2}{O_2A}=$$

$$\frac{17}{25}=\frac{DO_2}{CA.}$$

$$\frac{17}{25}=\frac{r}{CA}$$

$\angle BEA$

$$BD^2=BO_2\cdot BA$$

$$17^2=(2R-r)\cdot 2R$$

$180^\circ-2\alpha+\beta+2\alpha-\beta=180^\circ$

$$\begin{cases}289=4R^2-2Rr\\17r=16R-8r\end{cases}$$

$$\begin{cases}288=4R^2-2Rr\\25r=16R\end{cases}$$

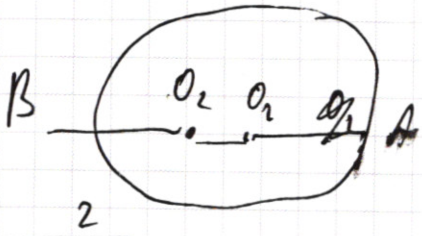
$$\begin{cases}289=\frac{4\cdot25^2}{16^2}\cdot r^2-\frac{2\cdot25}{16}\cdot r^2\\R=\frac{25}{16}r\end{cases}$$

$$\begin{array}{r}50\\ \times16\\ \hline\end{array}\qquad\begin{array}{r}^{3}16\\ \times\ 50\\ \hline 800\end{array}\qquad\begin{array}{r}25\\ \times25\\ \hline 125\\ +50\\ \hline 625\end{array}$$

$2500-800=$
$=1700$

$$\begin{cases}3+\frac{2}{4x+3}-ax-b\le0\\-8x^2-30x-17-a+b\ge0\end{cases}$$

$$\frac{12x+11-4ax^2-3ax-4bx-3b}{4x+3}$$



$$\frac{CA}{BA}=\frac{40}{15}$$

$$289=r^2\,\frac{4\cdot25^2-2\cdot16\cdot25}{16^2}$$

$$17\cdot\cancel{17}=r^2\,\frac{\overset{1}{\cancel{17}}00}{16^2}$$

$$\frac{17\cdot16}{100}=r^2.$$

−2 1 2

17/13

$BO_2=$

$$\begin{array}{r}^{5}17\\ \times\ 8\\ \hline 136\end{array}$$

$$\frac{1}{25}+\frac{1}{144}\ge\frac{1}{169}$$

$$\begin{array}{r}^{3}25\\ \times16\\ \hline 150\\ +25\\ \hline 400\end{array}$$

$$AB=\frac{\overset{25}{85}}{83}$$

$r=$

$$CA=\frac{25r}{\cancel{17}}=\frac{\overset{5}{\cancel{25}}}{\cancel{17}}\cdot\frac{\cancel{17}\cdot8}{\underset{3}{\cancel{75}}}=\frac{40}{3.}$$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$$8x^2+30x+17=0$$

$$D_1=225-136=89$$

5

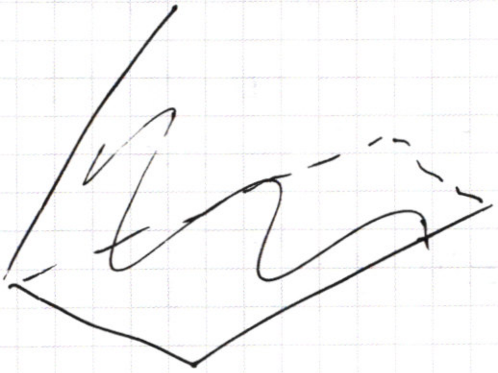
17

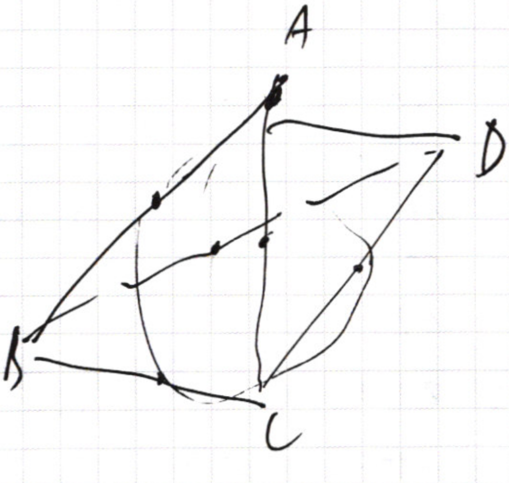
$\times 8$

136

136

$$\frac{12x+9}{4x+3}+\frac{2}{4x+3}=3+\frac{2}{4x+3}\le ax+b\le -8x^2-30x-17.$$





ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5} \quad (1) \\ \sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5} \; (2) \end{cases}$$

1) Рас-м (2): По формуле суммы синусов: $2\cdot\sin\left(\frac{4\alpha+4\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{4\beta}{2}\right) = -\frac{4}{5}$

$$\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta = -\frac{2}{5} \xRightarrow{\text{из (1):}} -\frac{1}{\sqrt5}\cdot\cos 2\beta = -\frac{2}{5} \Rightarrow \boxed{\cos 2\beta = \frac{2}{\sqrt5}}$$

⊛

2) Рас-м (1): По формуле ~~[illegible]~~ синуса суммы:

$$\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \cos 2\alpha\cdot\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt5}$$

$$2\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\cos 2\beta + (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\cdot\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt5} \;\Big|: \cos^2\alpha \neq 0$$

(т.к. по усл. $tg\alpha$ определён, то и $\cos\alpha \neq 0$)

$$2\,tg\,\alpha\cdot\cos 2\beta + (1 - tg^2\alpha)\cdot\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt5}$$

$$tg^2\alpha\cdot\sin 2\beta - 2\,tg\alpha\cdot\cos 2\beta - \frac{1}{\sqrt5} - \sin 2\beta = 0$$

3) Замена: $tg\alpha = t$. и подстави ⊛:

$$t^2\cdot\sin 2\beta - \frac{4}{\sqrt5}\cdot t - \left(\frac{1}{\sqrt5} + \sin 2\beta\right) = 0$$

$$D_1 = \frac{4}{5} + \left(\frac{1}{\sqrt5} + \sin 2\beta\right)\cdot\sin 2\beta.$$

Из ⊛ по осн. триг. тождеству: $|\sin 2\beta| = \sqrt{1-\cos^2 2\beta} = \frac{1}{\sqrt5}$

Рассмотрим два случая:

а) $\sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt5}$, тогда $D_1 = \frac{4}{5} + \frac{2}{\sqrt5}\cdot\frac{1}{\sqrt5} =$ ~~$\frac{4\sqrt5+2}{5}$~~ $\frac{6}{5} > 0$

$$t = \frac{\sqrt5}{1}\cdot\left(\frac{2}{\sqrt5} \pm \frac{\sqrt6}{\sqrt5}\right) = 2 \pm \sqrt6$$

б) $\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt5} \Rightarrow D_1 = \frac{4}{5} + \left(\frac{1}{\sqrt5} - \frac{1}{\sqrt5}\right)\left(-\frac{1}{\sqrt5}\right) = \frac{4}{5} > 0$

~~$t=\frac{\sqrt5}{1}\cdot$~~ $t = \sqrt5 \cdot \left(\frac{2}{\sqrt5} \pm \frac{2}{\sqrt5}\right) = 2 \pm 2 = 4; 0.$

Таким образом, получим 4 значения $tg\alpha$: $\{4; 0; 2+\sqrt6; 2-\sqrt6\}$

Ответ: $\{4; 0; 2+\sqrt6; 2-\sqrt6\}$.

№2.

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} & (1)\\ x^2+9y^2-4x-18y=12 & (2)\end{cases}$$

(1): $x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} \Leftrightarrow \begin{cases}x-2y\ge0\\ x^2-4xy+4y^2=xy-x-2y+2\end{cases}$

$$\begin{cases}x-2y\ge0\\ x^2-5xy+x+4y^2+2y-2=0. \circledast:\end{cases}$$

$\circledast$: $x^2+x(1-5y)+4y^2+2y-2=0$

$D = 1-10y+25y^2 \cancel{+} -16y^2-8y+8 = 9y^2-18y+9 =$
$=9(y-1)^2\ge0.$

$x=\frac{5y-1\pm3(y-1)}{2} = 4y-2; \, y+1 \Rightarrow \begin{cases}x-2y\ge0\\ \left[\begin{array}{l}x=y+1\\x=4y-2\end{array}\right.\end{cases}$

Вернемся к системе:

(2)(1): $\begin{cases}x^2+9y^2-4x-18y=12. & (2)\\ x\ge2y & (3)\\ \left[\begin{array}{l}x=y+1\\x=4y-2\end{array}\right.\end{cases}$

а) $x=y+1 \Rightarrow$ в (2): $y^2+2y+1+9y^2-4y-4-18y=12$

$10y^2-20y-15=0 \,|:5$

$2y^2-4y-3=0$

$D_1=4+6=10 \Rightarrow y = \cancel{2} \frac{2\pm\sqrt{10}}{2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}y=\frac{2+\sqrt{10}}{2}\\ x=\frac{4+\sqrt{10}}{2}\end{cases}\\ \begin{cases}y=\frac{2-\sqrt{10}}{2}\\ x=\frac{4-\sqrt{10}}{2}\end{cases}\end{array}\right.$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2 (прод.)

Проверка условия (3): $y=\frac{2+\sqrt{10}}{2}$; $x=\frac{4+\sqrt{10}}{2}$

$\frac{4+\sqrt{10}}{2} \geq 2+\sqrt{10}$

$2+\frac{\sqrt{10}}{2} \geq 2+\sqrt{10}$

$\frac{\sqrt{10}}{2} \geq \sqrt{10}$?!

Не верно => не уд. условию

$y=\frac{2-\sqrt{10}}{2}$; $x=\frac{4-\sqrt{10}}{2}$

$\frac{4-\sqrt{10}}{2} \geq 2-\sqrt{10}$

$2-\frac{\sqrt{10}}{2} \geq 2-\sqrt{10}$

$-\frac{\sqrt{10}}{2} \geq -\sqrt{10}$ – верно

Зн. $\left(\frac{4-\sqrt{10}}{2}; \frac{2-\sqrt{10}}{2}\right)$ – решение.

б) $x=4y-2. \Rightarrow$ в (2) $\underline{16y^2}-\underline{\underline{16y}}+4+\underline{9y^2}-\underline{\underline{16y}}+8-\underline{\underline{18y}}=12.$

$$25y^2-50y=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=0 \\ y=2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=0 \\ x=-2 \end{cases} \\ \begin{cases} y=2 \\ x=6 \end{cases} \end{array}\right.$$

Проверка условия (3): $x=-2$; $y=0$ $\quad -2 \geq 0$?! Не верно

не уд. условию

$x=6$; $y=2$ $\quad 6 \geq 4$ верно

Зн. $(6;2)$ – решение.

Ответ: $(6;2)$; $\left(\frac{4-\sqrt{10}}{2}; \frac{2-\sqrt{10}}{2}\right)$.

№3.

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13} - \cancel{18}\,18x$$

Условие ⊛:
$x^2+18x>0.$

Замена: $t=x^2+18x$; $t>0$ (из ⊛)

$$5^{\log_{12}t}+t \geq t^{\log_{12}13}$$

$$5^{\log_{12}t}+12^{\log_{12}t} \geq 13^{\log_{12}t}$$

Замена: $a=\log_{12}t$

$$5^a+12^a \geq 13^a$$

Рас-м нер-во при 1) $a<0$:

$$12^a \geq 13^a \Leftrightarrow \frac{1}{12^{|a|}}-\frac{1}{13^{|a|}} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{13^{|a|}-12^{|a|}}{\underbrace{12^{|a|}\cdot 13^{|a|}}_{>0}} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 13^{|a|}-12^{|a|} \geq 0$. По св-ву показ. ф-ции $m^K \geq n^K$ при $K>0$ и $m \geq n$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow 13^{|a|} \geq 12^{|a|}$ выполн. при всех $a<0 \Rightarrow$

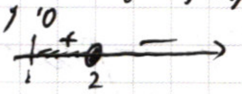
$\Rightarrow 12^a \geq 13^a$ выполн. при всех $a<0. \Rightarrow$

$(5^a>0$ при $a<0)$ $\Rightarrow 5^a+12^a \geq 13^a$ выполн при всех $a<0$

2) $a=0$:

~~12+5~~ [illegible] $1+1 \geq 1$ – верно $\Rightarrow a=0$ – реш.

3) $a>0$: Заметим, что при $a=2$ 5^2+12^2 – решение ур-ния $5^a+12^a=13^a$. Тогда $f(a)=5^a+12^a-13^a$ меняет свой знак в т $a_0=2$ $\Rightarrow$



$f(a) \geq 0$ при $a\in(0;2]$

Тогда $a\in(-\infty;2] \Rightarrow$ Обр. замена: $\log_{12}t \leq 2 \Rightarrow t \leq 144. \Rightarrow$

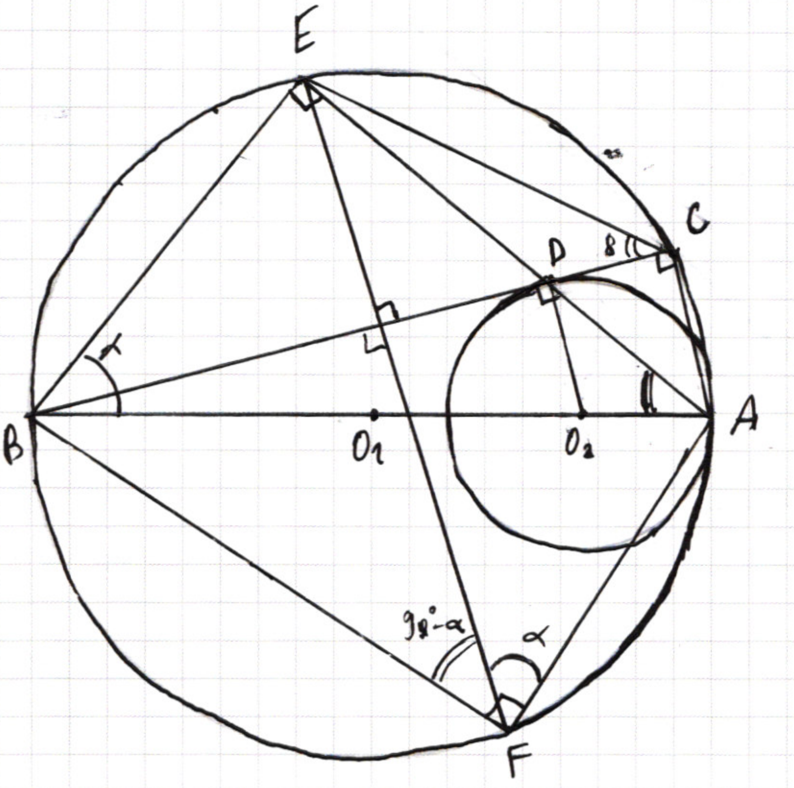
$\Rightarrow$ Обр. замена: $0<x^2+18x \leq 144. \Rightarrow \begin{cases} x(x+18)>0 \\ x^2+18x-144 \leq 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x\in(-\infty;\overset{-18}{\cancel{2}})\cup(0;+\infty) \\ x\in\cancel{(-\infty;...)}\,[-24;6] \end{cases} \Rightarrow x\in[-24;-18)\cup(0;6]$

Ответ: $x\in[-24;-18)\cup(0;6]$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4.



Дано: $\Omega(O_1; R = O_1A)$

$\omega(O_2; r = O_2A)$

Ω и ω кас. внутр. в т. A.

BC – кас. ω, $AB = 2R$

$EF \perp BC$

$CD = 8$; $BD = 17$

Найти: а) r и R

б) ∠AFE

в) S_{AEF}

Решение:

1) $\triangle BDO_2$ и $\triangle BCA$ подобны (∠CBA – общий.
∠BDO_2 = ∠BCA = 90°
(∠BCA опир на AB = 2R)
BD – касат. к ω ⇒ $BD \perp O_2D$) $\Rightarrow \frac{BD}{DC} = \frac{BO_2}{O_2A}$

$$\Rightarrow \frac{17}{8} = \frac{2R-r}{r} \Rightarrow 17r = 16R - 8r \Rightarrow 25r = 16R$$

$$R = \frac{25}{16}r.$$

2) ~~BD – кас к ω ⇒ BD ⊥ BO₂.~~

$\triangle BDO_2$ – п/у: По т. Пиф: $BO_2^2 = BD^2 + DO_2^2$

$$4R^2 - 4Rr + r^2 = 289 + r^2 \Rightarrow 4r^2\left(\frac{25^2}{16^2} - \frac{25}{16}\right) = 289.$$

$$4r^2\left(\frac{625-400}{16^2}\right) = 17^2 \Rightarrow \cancel{2}r \cdot \frac{15}{\cancel{16}_8} = 17$$

$$r = \frac{17\cdot 8}{15} = \frac{136}{15} \Rightarrow R = \frac{\overset{5}{\cancel{25}}}{\cancel{16}_2} \cdot \frac{17\cdot 8}{\underset{3}{\cancel{15}}} = \frac{85}{6}$$

Ответ: а) $R = \frac{85}{6}$ (радиус Ω)

$r = \frac{136}{15}$ (радиус ω)

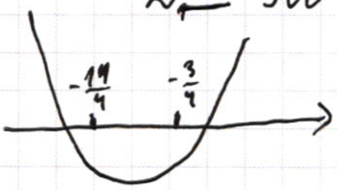
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6

$$\begin{cases} ax+b \le -8x^2-30x-17 \quad (1) \\ \frac{12x+11}{4x+3} \le ax+b \end{cases} \quad \forall x \in \left[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}\right)$$

(1): $8x^2+30x+ax+17+b \le 0.$

$D_1 = 900+60a+a^2-544.-32b = a^2+60a-32b+356$



$$\begin{cases} f\left(-\frac{11}{4}\right) \le 0 \\ f\left(-\frac{3}{4}\right) \le 0 \\ D_1 > 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 8\cdot\frac{121}{16} - \frac{330}{4} - \frac{11a}{4} + 17 + b \le 0 \\ 8\cdot\frac{9}{16} - 30\cdot\frac{3}{4} - \frac{3a}{4} + 17 + b \le 0. \\ a^2+60a-32b+356 > 0. \end{cases}$$

☐ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)