МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам
$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{8}{17}.$$
Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений
$$\begin{cases}3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2},\\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4.\end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство
$$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x\geqslant |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{5}{2}$, $BD=\frac{13}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $3\leqslant x\leqslant 27$, $3\leqslant y\leqslant 27$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство
$$\frac{4x-3}{2x-2}\geqslant ax+b\geqslant 8x^2-34x+30$$
выполнено для всех x на промежутке $(1;3]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $PQRS$, вершина P которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра PQ. Известно, что $QR=2$, $QS=1$, $PS=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра RS. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{8}{17} \quad (1) \end{cases}$$

(1) $\sin 2\alpha(\cos 4\beta+1)+\sin 4\beta\cos 2\alpha=-\frac{8}{17}$

$2\cos 2\beta(\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta+\sin 2\beta\cdot\cos 2\alpha)=-\frac{8}{17}$

$2\cos 2\beta\cdot\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{8}{17}$

$\Rightarrow \cos 2\beta=\frac{4}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\beta=\sqrt{1-\frac{16}{17}}=\pm\frac{1}{\sqrt{17}}$

1) $2\beta=\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)$:

$$\left[\begin{array}{l} 2\alpha+\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)=-\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z} \\ 2\alpha+\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)=\pi+\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z} \end{array}\right.$$

$\Rightarrow \alpha=-\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$

$\Rightarrow \operatorname{tg}\alpha=-\frac{1}{4}$

2) $2\beta=-\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)+\pi$

$$\left[\begin{array}{l} 2\alpha+\pi-\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)=-\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z} \\ 2\alpha+\pi-\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)=\pi+\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z} \end{array}\right.$$

$\Rightarrow \alpha=\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$

$\Rightarrow \operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{4}$

№2

$$\begin{cases} 3y - 2x = \sqrt{3xy - 2x - 3y + 2} \\ 3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9y^2 - 15xy + 4x^2 = -2x - 3y + 2 \\ 3x^2 + 3y^2 \cancel{-6x} = 6x + 4y + 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9y^2 - 15xy + 4x^2 = -2x - 3y + 2 \\ 1{,}5x^2 + 1{,}5y^2 = 3x + 2y + 2 \end{cases}$$

$$7{,}5y^2 - 15xy + 2{,}5x^2 = -5x - 5y$$

$$15y^2 - 30xy + 5x^2 = -10x - 10y$$

$$3y^2 - 6xy + x^2 = -2x - 2y$$

$$x^2 + (2 - 6y)x + 3y^2 + 2y = 0$$

$$\frac{D}{4} = (1 - 3y)^2 - 3y^2 - 2y = 1 - 6y + 9y^2 - 3y^2 - 2y =$$

$$= 1 - 8y + 6y^2$$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

3) $2\beta = -\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)$

$$\left[\begin{array}{l} 2\alpha - \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right) = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ 2\alpha - \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right) = \pi + \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \alpha = \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \alpha = \frac{\pi}{2} + \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right) + \pi k, k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} tg\alpha = 0 \\ tg\alpha = 4 \end{array}\right.$$

4) $2\beta = \pi + \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)$

$$\left[\begin{array}{l} 2\alpha + \pi + \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right) = -\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ 2\alpha + \pi + \arcsin\left(\frac{7}{\sqrt{17}}\right) = \pi + \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \alpha = \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \alpha = -\frac{3\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right) + \pi k, k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} tg\alpha = 0 \\ tg\alpha = -4 \end{array}\right.$$

Ответ: $-4; -\frac{1}{4}; 0; \frac{1}{4}; 4.$

№3

$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x \geq |x^2+6x|^{\log_4(5)} - x^2$

Пусть $x^2+6x=t$; $t>0$

$3^{\log_4(t)}+t \geq t^{\log_4(5)}$

$3^{\log_4 t}+4^{\log_4 t} \geq 5^{\log_4 t}$

Пусть $\log_4 t = a$

$3^a+4^a \geq 5^a$

$\left(\frac{3}{5}\right)^a+\left(\frac{4}{5}\right)^a \geq 1$

$\left(\frac{3}{5}\right)^a+\left(\frac{4}{5}\right)^a$ – убывающая функция

$\Rightarrow a \leq 2$

$\log_4 t \leq 2$

$t \leq 8$

$x^2+6x \leq 8$

$(x-(-3+\sqrt{17}))(x-(-3-\sqrt{17})) \leq 0$

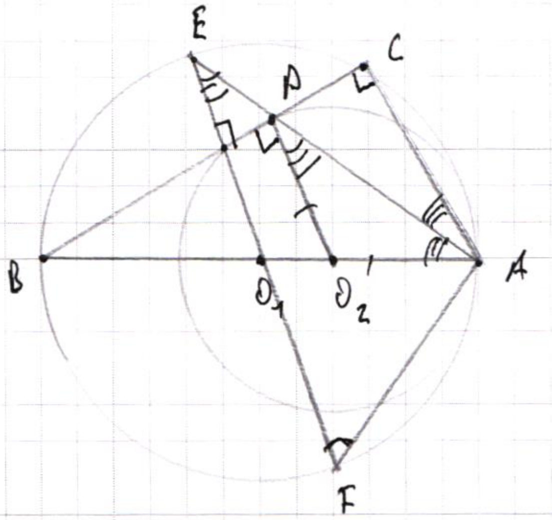
$x^2+6x>0$

$x(x+6)>0$

Ответ: $x \in [-3-\sqrt{17}; -6) \cup (0; -3+\sqrt{17}]$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4



1) $\Delta BCA \sim \Delta BDO_2$ (по остр. углу)

$\Rightarrow \dfrac{BO_2}{BA} = \dfrac{BD}{BC} = \dfrac{13}{18}$

$\dfrac{2R_1 - R_2}{2R_1} = \dfrac{13}{18}$

$\Rightarrow R_2 = \dfrac{5}{9} R_1$

2) Из ΔBDO_2:

$BD^2 + DO_2^2 = BO_2^2$

$\Rightarrow \dfrac{169}{4} + R_2^2 + 4R_1^2 - 4R_1 \cdot \left(\dfrac{5}{9} R_1\right) + R_2^2$

$\Rightarrow R_1 = \dfrac{39}{8}$; $R_2 = \dfrac{5}{9} R_1 = \dfrac{65}{24}$

3) $\angle BAD = \angle O_2DA$ (р/б треугольник)

$EF \parallel DO_2$

$\Rightarrow \angle FEA = \angle O_2DA = \angle O_2AD \Rightarrow \Delta XEA$ − р/б ($X = EF \cap BA$)

$\Rightarrow EX = XA$

Но такое возможно только если $X = O_1$

$\Rightarrow EF$ − диаметр

$\Rightarrow \angle EAF = 90^\circ$

№ 4

4) $\triangle DCA \sim \triangle AFK$ (по острому углу)

$\Rightarrow \angle CDA = \angle AFE$

По теореме Пифагора:

$$CA = \sqrt{4R_1^2 - (BC)^2} = \frac{15}{4}$$

$$\Rightarrow tg\angle AFE = tg\angle CDA = \frac{CA}{CD} = \frac{3}{2}$$

$$\angle AFK = arctg\left(\frac{3}{2}\right)$$

5) По теореме Пифагора:

$$AD = \sqrt{CD^2 + AC^2} = \frac{5\sqrt{13}}{4}$$

$$k = \frac{EF}{AD} = \frac{3\sqrt{13}}{5}$$

$$k^2 = \frac{S_{AEF}}{S_{ACD}} \Rightarrow S_{AEF} = k^2 \cdot S_{ACD} = \frac{9 \cdot 13}{25} \cdot S_{ACD} =$$

$$= \frac{9 \cdot 13}{25} \cdot \frac{1}{2} \cdot CA \cdot CD = \frac{351}{16}$$

Ответ: 1) $\frac{39}{8}$; $\frac{65}{24}$; 2) $arctg\left(\frac{3}{2}\right)$; 3) $\frac{351}{16}$

МФТИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

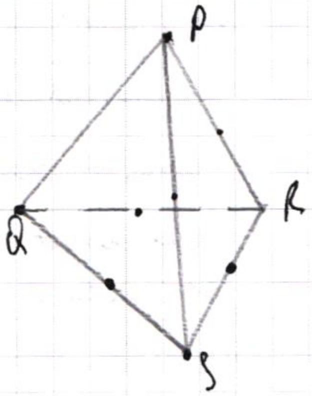
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 7



№ 2

$$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2} \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2} \\ 3(x+y)^2=6xy+6x+4y+4 \end{cases}$$

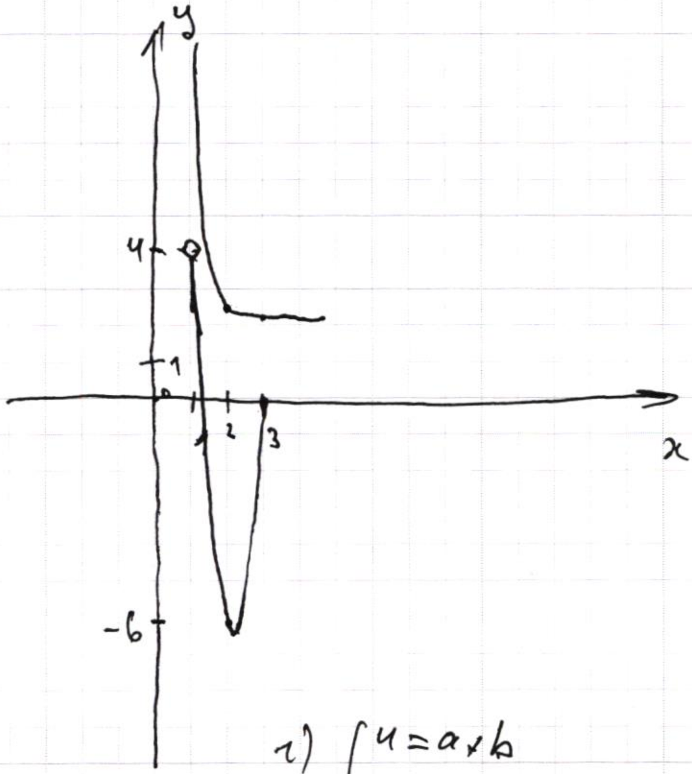
$$\begin{cases} 2(3y-2x)^2=(3xy-2x-3y+2)\cdot 3 \\ 3(x+y)^2=6xy+6x+4y+4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2(3y-2x)^2-3(x+y)^2-8x-7y=0 \\ 2(3y-2x)^2=9xy-6x-4y+4 \end{cases}$$

№ 6

$$\frac{4x-3}{2x-2} \geq ax+b \geq 8x^2-34x+30$$

$$2+\frac{1}{2x-2} \geq ax+b \geq 8x^2-34x+30$$



Рассмотрим крайние случаи: когда прямая $ax+b$ проходит через точку $(1;4)$ и касается гиперболы. И когда прямая $ax+b$ проходит через точку $(3;0)$ и касается гиперболы.

1) $\begin{cases} 4=a+b \\ \frac{4x-3}{2x-2}=ax+b \text{ (1 реш)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4=a+b \\ 2ax^2+(2b-2a-4)x+3-2b=0 \\ \text{(1 реш)} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4=a+b \\ (2b-2a-4)^2-8(3-2b)=0 \end{cases}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 6

$\times \frac{34}{3}$ 102

$72 - 102 + 30 = 0$

$\cancel{82 - 68} = 26$

$8x^2 - 34x + 30$:

x	1	2	3
y	4	-6	0

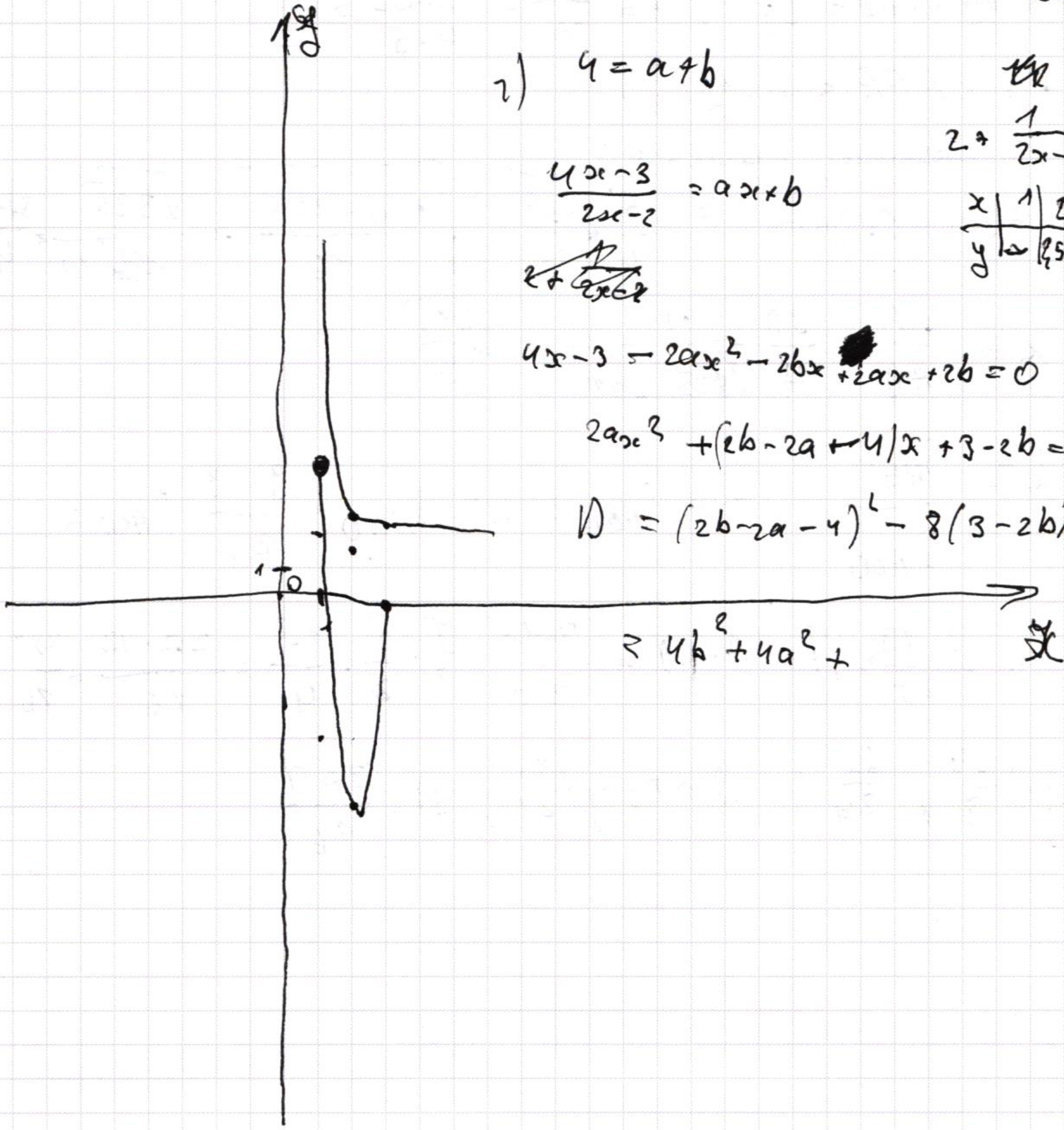
$\frac{34}{16} = \frac{17}{8}$

$\frac{4x-3}{2x-2} \geq ax + b \geq 8x^2 - 34x + 30$

$2 + \frac{1}{2x-2} \geq ax + b \geq 8x^2 - 34x + 30$

$2 + \frac{1}{2x-2}$

x	1	2	3
y	∞	2,5	



1) $4 = a + b$

$\frac{4x-3}{2x-2} = ax + b$

$\cancel{2 + \frac{1}{2x-2}}$

$4x - 3 - 2ax^2 - 2bx + 2ax + 2b = 0$

$2ax^2 + (2b - 2a - 4)x + 3 - 2b = 0$

$D = (2b - 2a - 4)^2 - 8(3 - 2b) =$

$= 4b^2 + 4a^2 +$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

№4

$\Rightarrow$ EF – диаметр

$\Rightarrow \angle EAF = 90°$

4) $\triangle DCA \sim \triangle FAE$ (по острому углу)

$\Rightarrow \angle CDA = \angle AFE$

По теореме Пифагора:

$$CA = \sqrt{4R_1^2 - (BC)^2} = \sqrt{\frac{4 \cdot 39^2}{8^2} - 81} = \sqrt{\frac{1521 - 81 \cdot 16}{16}} = \frac{15}{4}$$

$$\Rightarrow tg\angle AFE = tg\angle CDA = \frac{CA}{CD} = \frac{15 \cdot 2}{4 \cdot 5} = \frac{3}{2}$$

$\Rightarrow \angle AFE = arctg\left(\frac{3}{2}\right)$

5) По теореме Пифагора:

$$AD = \sqrt{CD^2 + AC^2} = \sqrt{\frac{5^2}{4} + \frac{15^2}{16}} = \sqrt{\frac{100 + 225}{16}} = \frac{\sqrt{325}}{4} = \frac{5\sqrt{13}}{4}$$

$$k = \frac{EF}{AD} = \frac{39 \cdot 4}{4 \cdot 5\sqrt{13}} = \frac{3\sqrt{13}}{5}$$

$$k^2 = \frac{S_{AEF}}{S_{ACD}} \Rightarrow S_{AEF} = k^2 \cdot S_{ACD} = \frac{9 \cdot 13}{25} \cdot S_{ACD} =$$

$$= \frac{9 \cdot 13}{25} \cdot \frac{1}{2} \cdot CA \cdot CD = \frac{9 \cdot 13}{25} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{15}{4} = \frac{27 \cdot 13}{16} = \frac{351}{16}$$

Ответ: 1) $\frac{39}{8}$; $\frac{65}{24}$; 2) $arctg\left(\frac{3}{2}\right)$; 3) $\frac{351}{16}$.

$27 \times 13 = 351$; $325 : 13 = 25$; $39 \times 39 = 1521$; $81 \times 16 = 1296$; $1521 - 1296 = 225$

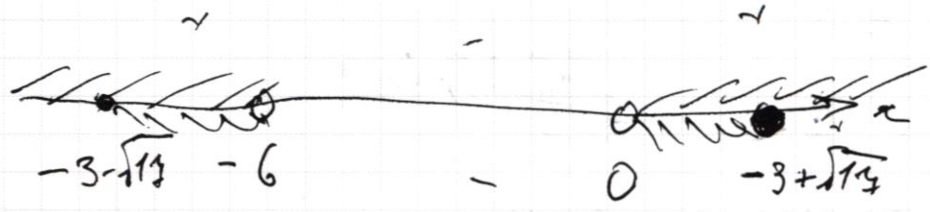
☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$x^2+6x \geq 0$ $\qquad$ $-6 \vee -3-\sqrt{17}$

$x(x+6) \geq 0$ $\qquad$ $-3 \vee -\sqrt{17}$



Ответ: $x \in [-3-\sqrt{17}; -6) \cup (0; -3+\sqrt{17}]$

№5

$f\left(\frac{9b}{y}\right) < 0$

$f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) < 0$

№6

$\frac{4x-3}{2x-2} \geq ax+b \geq 8x^2-34x+30$

$2x + \frac{1}{2x-2} \geq ax+b \geq 8x^2-34x+30$

№3

$3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geq |x^2+6x|^{\log_4(5)} - x^2$

$9^{\log_3 3}$

Пусть $x^2+6x = t$; $t \geq 0$

$3^{\log_4(t)} + t \geq |t|^{\log_4(5)}$

$1 > 0,5$

$t^{\log_4(3)} + t \geq t^{\log_4(5)}$

$2 > 1$

~~$t^{\log_4(3)} \geq 1$: $1 + t$~~

$3^{\log_4 t} + 4^{\log_4 t} \geq 5^{\log_4 t}$

Пусть $\log_4 t = a$

$\begin{array}{r|l} 68 & 4 \\ -28 & 17 \end{array}$

$3^a + 4^a \geq 5^a$

$\left(\frac{3}{5}\right)^a + \left(\frac{4}{5}\right)^a \geq 1$

$\left(\frac{3}{5}\right)^a + \left(\frac{4}{5}\right)^a$ — убывающая функция

$\Rightarrow a \leq 2$

$\log_4 t \leq 2$

$D = 36 + 32 =$

$t \leq 8$

$= 68$

$x^2+6x \leq 8$

$\sqrt{68} = 2\sqrt{17}$

$x^2+6x-8 \leq 0$

$(x-(-3+\sqrt{17}))(x-(-3-\sqrt{17})) \leq 0$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

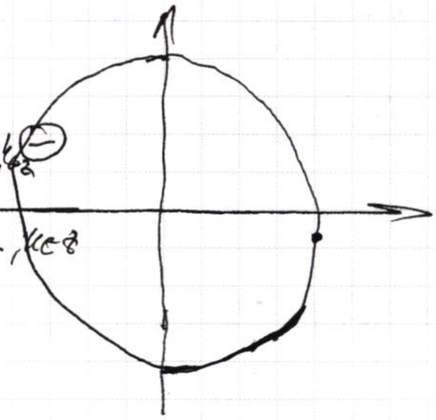
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2) $\varphi = -\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right) + \pi$

$$\left[\begin{array}{l} 2\alpha + \pi - \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right) = -\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ 2\alpha + \pi - \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right) = \pi + \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

$\Rightarrow \alpha = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right) + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{4}$



№2

$$\begin{cases} 3y - 2x = \sqrt{3xy - 2x - 3y + 2} \\ 3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 4 \end{cases}$$

$4x^2 + (2 - 15y)x + 9y^2 + 3y - 2 = 0$

$D =$

$$\begin{cases} 9y^2 - 12xy + 4x^2 = 3xy - 2x - 3y + 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9y^2 - 15xy + 4x^2 + \cancel{2x} + \cancel{3y} = 2 - 2x - 3y \\ 3x^2 + 3y^2 = 8x + 4y + 4 \end{cases}$$

$8y^2 - 15xy + x^2 = -2 - 8x - 7y$

$12y^2 - 15xy + 7x^2 = 6 + 4x + y$

№1

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{8}{17} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \sin 2\alpha\cos 4\beta + \sin 4\beta\cos 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17} \quad (1) \end{cases}$$

(1) $\sin 2\alpha(\cos 4\beta + 1) + \sin 4\beta\cos 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$\sin 2\alpha(\cos^2 2\beta - \sin^2 2\beta + 1) + \sin 4\beta\cos 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$\sin 2\alpha \cdot 2\cos^2 2\beta + 2\sin 2\beta\cos 2\beta\cos 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$2\cos 2\beta(\sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha) = -\frac{8}{17}$

$2\cos 2\beta \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{8}{17}$

$2\cos 2\beta \cdot \frac{1}{\sqrt{17}} = \frac{8}{17}$

$\cos 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\beta = \sqrt{1-\frac{16}{17}} = \pm\frac{1}{\sqrt{17}}$

1) $2\beta = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)$

$\sin\left(2\alpha + \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)\right) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$$\left[\begin{aligned} &2\alpha + \arcsin\left(\tfrac{1}{\sqrt{17}}\right) = -\arcsin\left(\tfrac{1}{\sqrt{17}}\right) + 2\pi k, k\in\mathbb{Z} \\ &2\alpha + \arcsin\left(\tfrac{1}{\sqrt{17}}\right) = \pi + \arcsin\left(\tfrac{1}{\sqrt{17}}\right) + 2\pi k, k\in\mathbb{Z} \ \ominus \end{aligned}\right.$$

$\Rightarrow \alpha = -\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right) + \pi k, k\in\mathbb{Z}$

$\Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{4}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$

$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$

3) $2\beta=-\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)$

$$\left[\begin{array}{l}2\alpha-\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)=-\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)+2\pi k,\ \cancel{k\in\mathbb{Z}}\\ 2\alpha-\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)=\pi+\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\alpha=\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\\ \alpha=\frac{\pi}{2}+\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\end{array}\right.$$

$\sin\alpha=\cos\left(\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)\right)=\frac{4}{\sqrt{17}}$

2) $\operatorname{tg}\alpha=0$

$\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)\right)=4$

4) $2\beta=\pi+\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)$

$$\left[\begin{array}{l}2\alpha+\pi+\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)=-\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\\ 2\alpha+\pi+\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)=\pi+\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\alpha=\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\\ \alpha=-\frac{\pi}{2}-\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\end{array}\right.$$

$\operatorname{tg}(\alpha)=0$

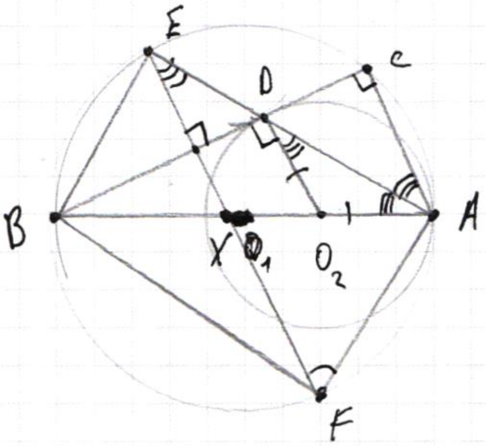
$\operatorname{tg}(\alpha)=-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)\right)=-4$

Ответ: $-4;\ -\frac{1}{4};\ 0;\ \frac{1}{4};\ 4.$

№4

$BD = \frac{13}{2}$

$CD = \frac{5}{2}$



1) $\triangle BCA \sim \triangle BDO_2$ (по остр. углу)

$\Rightarrow \frac{BO_2}{BA} = \frac{BD}{BC} = \frac{13}{18}$

$$\frac{2R_1 - R_2}{2R_1} = \frac{13}{18}$$

$$1 - \frac{R_2}{2R_1} = \frac{13}{18}$$

$$\frac{5}{18} = \frac{R_2}{2R_1}$$

$$10R_1 = 18R_2$$

$$5R_1 = 9R_2$$

$$R_2 = \frac{5}{9}R_1$$

$$\begin{array}{r} 13 \\ \times\ 5 \\ \hline 65 \end{array}$$

2) Из $\triangle BDO_2$:

$$BD^2 + DO_2^2 = BO_2^2$$

$$\left(\frac{13}{2}\right)^2 + R_2^2 = (2R_1 - R_2)^2$$

$$\frac{169}{4} + \cancel{R_2^2} = 4R_1^2 - 4R_1R_2 + \cancel{R_2^2}$$

$$R_1^2 - R_1 \cdot \left(\frac{5}{9}R_1\right) = \frac{169}{16}$$

$$\frac{4}{9}R_1^2 = \frac{169}{16}$$

$$R_1^2 = \frac{13^2 \cdot 3^2}{4^2 \cdot 2^2}$$

$$R_1 = \frac{13 \cdot 3}{4 \cdot 2} = \frac{39}{8}\ ;\ R_2 = \frac{5}{9}R_1 = \frac{13 \cdot 5}{8 \cdot 3} = \frac{65}{24}$$

3) $\angle BAD = \angle O_2DA$ (р/б треугольник)

$EF \parallel DO_2$

$\Rightarrow \angle FEA = \angle O_2DA = \angle O_2AD \Rightarrow \triangle XEA$ – р/б

$(X = EF \cap BA)$

$\Rightarrow EX = XA$

Но такое возможно только если $X = O_1$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)