МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 3 ШИФР ______________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}; \qquad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3y - 2x = \sqrt{3xy - 2x - 3y + 2}, \\ 3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 4. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geqslant |x^2 + 6x|^{\log_4 5} - x^2.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = \frac{5}{2}$, $BD = \frac{13}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $3 \leqslant x \leqslant 27$, $3 \leqslant y \leqslant 27$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{4x-3}{2x-2} \geqslant ax + b \geqslant 8x^2 - 34x + 30$$

выполнено для всех x на промежутке $(1; 3]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $PQRS$, вершина P которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра PQ. Известно, что $QR = 2$, $QS = 1$, $PS = \sqrt{2}$. Найдите длину ребра RS. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \sin(2\alpha+4\beta)+2\sin\alpha=-\frac{8}{17} \ (1) \\ \cos\alpha\neq 0 \text{ (т.к. } tg\alpha \text{ определен по условию)} \end{cases}$$

в (1) $\sin(2\alpha+4\beta)+2\sin\alpha=-\frac{8}{17}$

$$2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos2\beta=-\frac{8}{17}$$

$$-\frac{2}{\sqrt{17}}\cdot\cos^2\beta=-\frac{8}{17}$$

$$\cos2\beta=\frac{4}{\sqrt{17}}$$

$$\left[\begin{array}{l} \sin2\beta=\frac{1}{\sqrt{17}} \text{ (1 случай)} \\ \sin2\beta=-\frac{1}{\sqrt{17}} \text{ (2 случай)} \end{array}\right.$$

1 случай: $\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}}$

$$\sin2\alpha\cdot\cos2\beta+\cos2\alpha\cdot\sin2\beta=-\frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$\sin2\alpha\cdot\frac{4}{\sqrt{17}}+\cos2\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt{17}}=-\frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$4\sin2\alpha+\cos2\alpha+1=0$$

$$8\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha-\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=0$$

$$8\sin\alpha\cos\alpha+2\cos^2\alpha=0 \ \Big| :\cos^2\alpha\neq0$$

$$8tg\alpha+2=0$$

$$4tg\alpha=-1$$

$$tg\alpha=-\frac{1}{4}.$$

2 случай: $\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}}$

$$\sin2\alpha\cdot\cos2\beta+\cos2\alpha\cdot\sin2\beta=-\frac{1}{\sqrt{17}}$$

$\sin 2\alpha \cdot \frac{4}{\sqrt{17}} - \cos 2\alpha \cdot \frac{1}{\sqrt{17}} = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$4\sin 2\alpha - \cos 2\alpha + 1 = 0$

$8\sin\alpha\cos\alpha - \cos^2\alpha + \sin^2\alpha + \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 0 \quad) : \cos^2\alpha \neq 0$

$8\operatorname{tg}\alpha + 2\operatorname{tg}^2\alpha = 0$

$\operatorname{tg}\alpha\,(4 + \operatorname{tg}\alpha) = 0$

$\left[\begin{array}{l} \operatorname{tg}\alpha = 0 \\ \operatorname{tg}\alpha = -4. \end{array}\right.$

Итого, $\left[\begin{array}{l} \operatorname{tg}\alpha = 0 \\ \operatorname{tg}\alpha = -4 \\ \operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{4}. \end{array}\right.$

Ответ: $\{0; -4; -\frac{1}{4}\}$.

N2.

$\begin{cases} 3y - 2x = \sqrt{3xy - 2x - 3y + 2} \\ 3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 4. \end{cases}$

$\begin{cases} 9y^2 + 4x^2 - 12xy = 3xy - 2x - 3y + 2 \\ 3(x^2 - 2x + 1) + 3(y^2 - \frac{4}{3}y + \frac{4}{9}) - 3 - \frac{4}{3} = 4 \\ 3xy - 2x - 3y + 2 \geq 0 \end{cases}$

$\begin{cases} 9y^2 + y(3 - 15x) + 4x^2 + 2x - 2 = 0 \ (1) \\ 3(x-1)^2 + 3(y - \frac{2}{3})^2 = 8\frac{1}{3} \ (2) \\ y(3x - 3) \geq 2x - 2 \ (3) \end{cases}$

(2) $(x-1)^2 + (y - \frac{2}{3})^2 = \frac{25}{9}$

график - окружность с центром в т. $A(1; \frac{2}{3})$ и радиусом $R = \frac{5}{3}$.

(3) ~~...~~ ≥ 0

если $x = 1$, то $0 = 0$ - верно.

если $x > 1$, то $x - 1 > 0$ и

$3y \geq 2$

$y \geq \frac{2}{3}$

если $x < 1$, то $x - 1 < 0$ и

$3y \leq 2 \quad y \leq \frac{2}{3}$.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

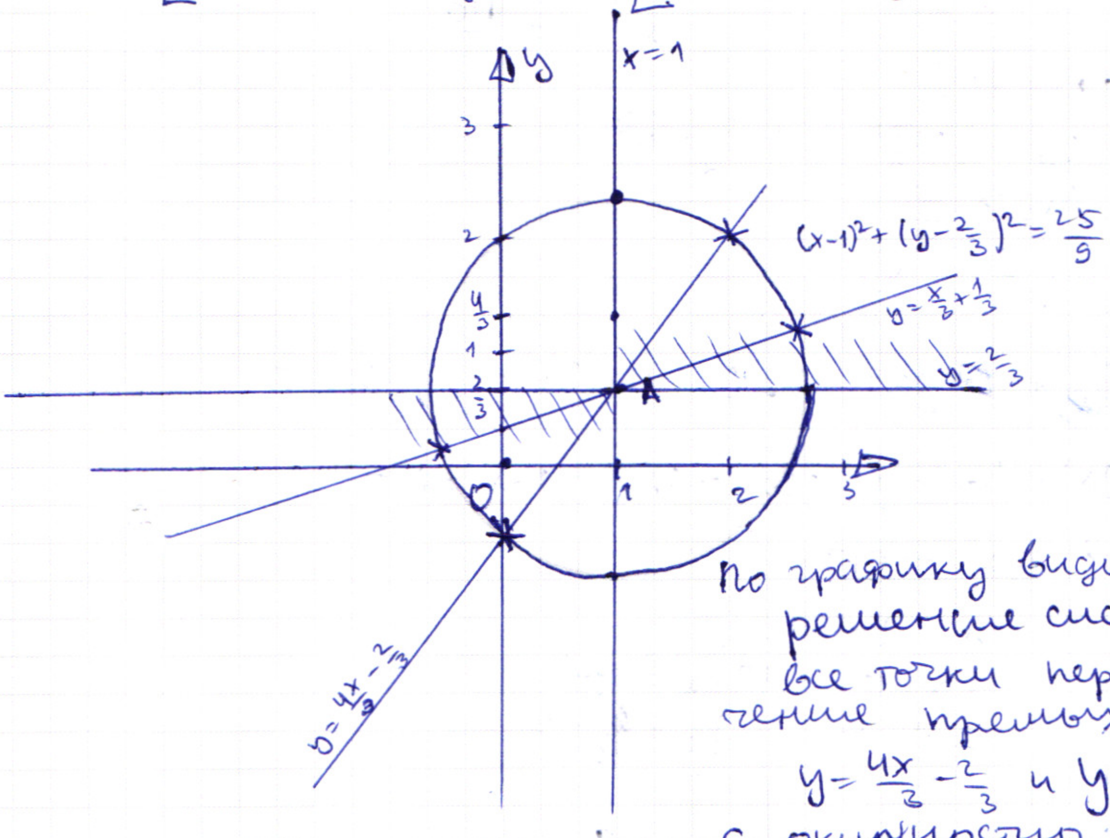
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

(1) решим как квадратное относительно y.

$$D=(3-15x)^2-36(4x^2+2x-2)=9+225x^2-90x-$$
$$-144x^2-72x+72=81x^2-162x+81=$$
$$=81(x-1)^2\geq 0 \text{ при } x\in\mathbb{R}\text{, то}$$

$$y=\frac{15x-3\pm 9(x-1)}{18}$$

$$\left[\begin{array}{l} y=\frac{15x-3+9x-9}{18} \\ y=\frac{15x-3-9x+9}{18}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} y=\frac{4x}{3}-\frac{2}{3} \\ y=\frac{x}{3}+\frac{1}{3}\end{array}\right. \text{ — прямые.}$$



По графику видим, что решение системы — все точки пересечения прямых $y=\frac{4x}{3}-\frac{2}{3}$ и $y=\frac{x}{3}+\frac{1}{3}$ с окружностью.

~~Ответ $y=\frac{4x}{3}-\frac{2}{3}$. $x=\frac{2}{3}$~~
~~проверка: $\frac{4\cdot 2}{3}-\frac{2}{3}$~~

1) $3x^2+3\left(\frac{x}{3}+\frac{1}{3}\right)^2-6x-4\left(\frac{x}{3}+\frac{1}{3}\right)=4$

$3x^2+\frac{1}{3}(x^2+2x+1)-6x-\frac{4x}{3}-\frac{4}{3}-4=0$

$3x^2+\frac{x^2}{3}+\frac{2x}{3}+\frac{1}{3}-6x-\frac{4x}{3}-\frac{4}{3}-4=0$

$9x^2+x^2+2x+1-18x-4x-4-12=0$

$\cancel{10x^2-20x+10=0}$

$\cancel{x^2-2x+1=0}$

$\cancel{x=1}$

$10x^2-20x-15=0$

$2x^2-4x-3=0$

$D=16+24=40>0$

$x=\frac{4\pm2\sqrt{10}}{4}$

$x=1\pm\frac{\sqrt{10}}{2}.$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=1+\frac{\sqrt{10}}{2}\\ y=\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{10}}{6}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}+\frac{\sqrt{10}}{6}\end{cases}\\ \begin{cases}x=1-\frac{\sqrt{10}}{2}\\ y=\frac{2}{3}-\frac{\sqrt{10}}{6}\end{cases}\end{array}\right.$$

2) $3x^2+3\left(\frac{4x}{3}-\frac{2}{3}\right)^2-6x-4\left(\frac{4x}{3}-\frac{2}{3}\right)-4=0$

$9x^2+16x^2+4-16x-18x-16x+8-12=0$

$25x^2-50x=0$

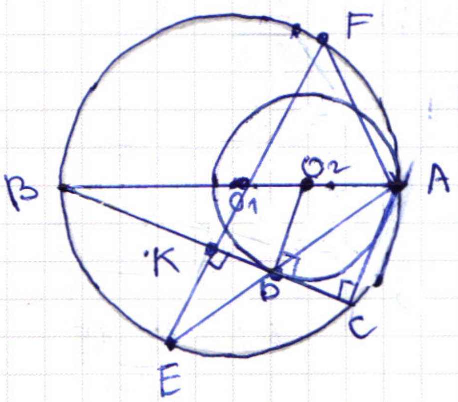
$x^2-2x=0$

$\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=0\\ y=-\frac{2}{3}\end{cases}\\ \begin{cases}x=2\\ y=2\end{cases}\end{array}\right.$

Ответ: $\left\{\left(1+\frac{\sqrt{10}}{2};\frac{2}{3}+\frac{\sqrt{10}}{6}\right);\left(1-\frac{\sqrt{10}}{2};\frac{2}{3}-\frac{\sqrt{10}}{6}\right);\left(0;-\frac{2}{3}\right);(2;2)\right\}$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4.



Дано: окр. Ω и ω касаются внутр. образом в т. A. AB – диаметр Ω (большая), BC – хорда Ω, BC касается ω в т. D. луч $AD \cap \Omega = E$, $EF \perp BC$, $EF \cap \Omega = F$. $CD = \frac{5}{2}$, $BD = \frac{13}{2}$.

Найти: R; r; $\angle AFE$, $S(AEF)$.

① Д.п; Пусть $O_1; O_2$ – центры Ω и ω соотв; R и r – радиусы Ω и ω соотв;

O_2D; AC.

Тогда т.к. AB – диаметр, то $\angle BCA = 90°$ как вписанный.

Также $O_2D \perp BC$ как радиус в точку касания.

$\{O_1; O_2\} \in AB$ (по св-ву касающихся окружностей), то $\triangle ABC \sim \triangle O_2BD$ по 2 углам, то $\frac{AB}{O_2B} = \frac{CB}{DB}$

$$\frac{2R}{2R-r} = \frac{9}{\frac{13}{2}} \qquad 13R = 18R - 9r$$

$$5R = 9r$$
$$r = \frac{5R}{9}$$

в $\triangle BO_2D$, по т-ме Пифагора $(2R-r)^2 = r^2 + \left(\frac{13}{2}\right)^2$

$$\left(\frac{13R}{9}\right)^2 = \left(\frac{5R}{9}\right)^2 + \frac{169}{4} \qquad \frac{144R^2}{81} = \frac{169}{4}$$

$(24R)^2 = 117^2$

$24R = 117$

$R = \frac{117}{24} = 4\frac{21}{24} = 4\frac{7}{8}$

$r = \frac{5 \cdot 117}{24 \cdot 9} = \frac{65}{24} = 2\frac{17}{24}$

то т.к. из $\triangle ABC \sim \triangle O_2BD$, $\frac{AC}{O_2D} = \frac{18}{13}$,

$\frac{AC}{\frac{65}{24}} = \frac{18}{13}$

$13AC = \frac{65 \cdot 18}{24}$

$AC = \frac{5 \cdot 18}{24}$

$AC = \frac{15}{4}$

то в $\triangle DAC$, $AD = \sqrt{\left(\frac{15}{4}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2} =$

$= \sqrt{\frac{225}{16} + \frac{25}{4}} = \sqrt{\frac{325}{16}} = \frac{5\sqrt{13}}{4}$.

А по св-ву хорд, $AD \cdot DE = BD \cdot DC$

$\frac{5\sqrt{13}}{4} \cdot DE = \frac{13}{2} \cdot \frac{5}{2}$

$5\sqrt{13} \cdot DE = 5 \cdot 13$

$DE = \sqrt{13}$.

$AE = \frac{9\sqrt{13}}{4}$

то т.к. $\angle EFA$ вписанный, то

$\frac{AE}{\sin \angle EFA} = 2R$

$\frac{9\sqrt{13}}{4\sin\angle EFA} = \frac{117}{12}$ $\quad \frac{1}{\sin\angle EFA} = \frac{\sqrt{13}}{3}$ $\quad \sin\angle EFA = \frac{3}{\sqrt{13}}$

$\angle EFA = \arcsin\left(\frac{3}{\sqrt{13}}\right)$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\Delta ACD \sim \Delta EKD$ по 2 углам, т.к. $\angle ADC = \angle EDK$ как вертикальные, то $\frac{KD}{DC} = \frac{ED}{AD}$

$$KD = \frac{DC \cdot ED}{AD} = \frac{\frac{5}{2} \cdot \sqrt{13}}{\frac{5\sqrt{13}}{4}} =$$

$$= \frac{5\sqrt{13} \cdot 4}{2 \cdot 5\sqrt{13}} = 2.$$

то $BK = \frac{13}{2} - 2 = \frac{9}{2}$, $KC = \frac{9}{2}$,

$$\frac{KE}{AC} = \frac{ED}{AD}$$

$$KE = \frac{ED \cdot AC}{AD} = \frac{\sqrt{13} \cdot \frac{15}{4}}{\frac{5 \cdot \sqrt{13}}{4}} = 3.$$

то $BK \cdot KC = KE \cdot KF$

$$\frac{9}{2} \cdot \frac{9}{2} = 3 \cdot KF$$

$$\frac{81}{4} = 3KF$$

$$KF = \frac{27}{4}$$

то $EF = 3 + \frac{27}{4} = \frac{39}{4} = 9\frac{3}{4}$.

то т.к. $\angle FAE$ – впис., то $\frac{\frac{39}{4}}{\sin\angle FAE} = \frac{117}{12}$

$$\frac{3}{3\sin\angle FAE} = 1$$

$$\sin\angle FAE = 1$$

$$\angle FAE = 90^\circ$$

то $S(AEF) = \frac{AE \cdot AF}{2}$, $AF = \sqrt{EF^2 - AE^2} = \sqrt{\left(\frac{39}{4}\right)^2 - \left(\frac{9\sqrt{13}}{4}\right)^2} =$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{13^2 \cdot 9^2 - 9^2 \cdot 13} = \frac{3}{4}\sqrt{13^2 - 9 \cdot 13} = \frac{3}{4}\sqrt{4 \cdot 13} =$$

$$= \frac{3}{2}\sqrt{13} = \frac{3\sqrt{13}}{2}$$

$$\text{то } S(AEF) = \frac{\frac{9\sqrt{13}}{4} \cdot \frac{3\sqrt{13}}{2}}{2} = \frac{27 \cdot 13}{16} = \frac{351}{16}.$$

Ответ: $R = 4\frac{7}{8}$; $r = 2\frac{17}{24}$; $\angle EFA = \arcsin\left(\frac{3}{\sqrt{13}}\right)$,

$S(AEF) = \frac{351}{16}$.

№5.

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(p) = [p/4]$.

$f(1 \cdot 1) = f(1) + f(1)$

$f(1) = 2f(1)$

$f(1) = 0$.

$f(2) = 0$
$f(3) = 0$
$f(5) = 1$
$f(7) = 1$
$f(11) = 2$
$f(13) = 3$
$f(17) = 4$
$f(19) = 4$
$f(23) = 5$

$f(4) = f(2) + f(2) = 0$
$f(6) = f(2) + f(3) = 0$
$f(8) = f(2) + f(4) = 0$
$f(9) = f(3) + f(3) = 0$
$f(10) = f(5) + f(2) = 1$.
$f(12) = 0$
$f(14) = 1$
$f(15) = 1$
$f(16) = 0$
$f(18) = 0$
$f(20) = 1$
$f(21) = 1$
$f(22) = 2$
$f(24) = 0$
$f(25) = 2$
$f(26) = 3$
$f(27) = 0$.

$f(x) = f(x/y) + f(y)$

$f(x/y) = f(x) - f(y)$.

$f(x/y) < 0 \iff f(x) < f(y)$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

при $x \in N$; $3 \le x \le 27$; $f(x)$ принимает значение:

0 – 10 раз
1 – 7 раз
2 – 3 раза
3 – 2 раза
4 – 2 раза
5 – 1 раз.

то ~~пар~~ если $f(x)=0$, то есть $10 \cdot 15 = 150$ пар
если $f(x)=1$, то есть $7 \cdot 8 = 56$ пар
если $f(x)=2$, то есть $3 \cdot 5 = 15$ пар
если $f(x)=3$, то есть $2 \cdot 3 = 6$ пар
если $f(x)=4$, то есть $2 \cdot 1 = 2$ пары
если $f(x)=5$, то таких пар нет.

Итого пар $(x;y)$, удовлетворяющих условию, всего $150+56+15+6+2=229$.

Ответ: 229.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin2\alpha = -\frac{8}{17} \\ \cos\alpha \neq 0 \end{cases}$$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin2\alpha = 8\sin(2\alpha+2\beta)$

$\sin2\alpha\cos4\beta+\cos2\alpha\sin4\beta+\sin2\alpha =$
$= 8\cdot\sin2\alpha\cdot\cos2\beta+8\sin2\beta\cos2\alpha$ $/\cos2\alpha$

$\cancel{tg2\alpha\cdot\cos4\beta+\sin4\beta+tg2\alpha = 8\,tg2\alpha\cdot\cos2\beta+8\sin2\beta}$

$2\sin\alpha\cos\alpha\cdot(\cos^22\beta-\sin^22\beta)+(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)\cdot2\sin2\beta\cos2\beta+$
$+2\sin\alpha\cos\alpha = 16\sin\alpha\cos\alpha\cdot\cos2\beta+8\sin2\beta\cdot(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)$ $/\cos^2\alpha$

$2tg\alpha\cdot(2\cos^22\beta-1)+(1-tg^2\alpha)2\sin2\beta\cos2\beta+2tg\alpha =$
$= 16tg\alpha\cdot\cos2\beta+\cancel{8tg^2\alpha(\cos^2}\ 8\sin2\beta(1-tg^2\alpha)$

$tg\alpha(4\cos^22\beta-2+2-16\cos2\beta)+tg^2\alpha(-2\sin2\beta\cos2\beta+8\sin2\beta)+$
$+2\sin2\beta\cos2\beta-8\sin2\beta=0$

$tg^2\alpha\cdot2\sin2\beta(4-\sin2\beta)+4\cdot\cos2\beta\cdot tg\alpha(\cos2\beta-4)$

$\sin(2\alpha+4\beta)=\sin((2\alpha+2\beta)+2\beta)=\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos2\beta+\cos(2\alpha+2\beta)\cdot\sin2\beta =$

$= -\frac{\cos2\beta}{\sqrt{17}} \pm \frac{4\sin2\beta}{\sqrt{17}}$

$\pm\sqrt{1-\frac{1}{17}} = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2} \quad (2) \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \quad (1) \end{cases}$$

$$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2$$

$$x^2+6x+3^{\log_4(x^2+6x)} \geq |x^2+6x|^{\log_4 5}$$

$$x^2+6x=t$$

$$t+3^{\log_4 t} \geq |t|^{\log_4 5}$$

$$t>0$$

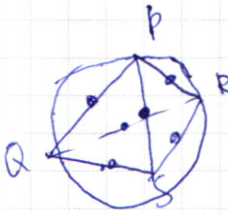
(1) $(3x^2-6x+3)+(3y^2-4y+\frac{4}{3}) = 3x^2+3y^2-6x-4y+4\frac{1}{3}$

$$t+3^{\log_4 t} \geq t^{\log_4 5}$$

$$\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot 2\cdot\sqrt{3}$$

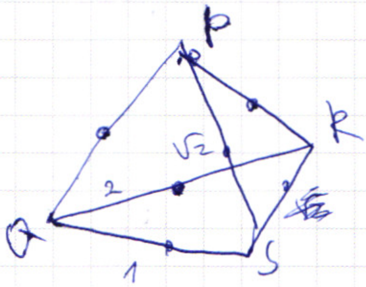
$$\cancel{\log_4(t+3^{\log_4 t}) \geq \log_4(t^{\log_4 5})}$$

(2) $3y-2x=\sqrt{(x-1)(3y-2)}$



$$\begin{cases} 9y^2+4x^2-6xy=3xy-2x-3y+2 \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \\ (x-1)(3y-2)\geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9y^2+4x^2-9xy+2x+3y-2=0 \quad (1) \\ 9x^2+5y^2-18x-12y-12=0 \quad (2) \\ (x-1)(3y-2)\geq 0 \end{cases}$$



$(2)-(1)$:

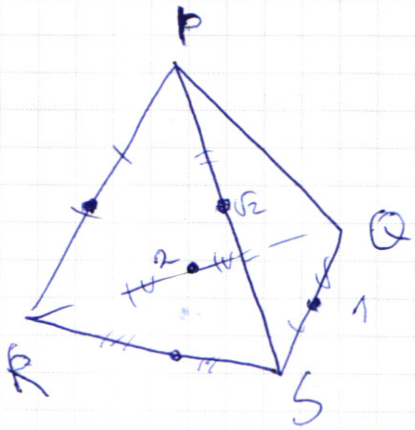
$$5x^2+9xy-20x-15y-10=0$$

$27\cdot 3=81$

$$y(9x-15)+(5x^2-20x-10)=0$$

$$y=\frac{5x^2-20x-10}{15-9x}$$

$$y=\frac{5(x^2-4x-2)}{3(5-3x)}$$



$D=16+8=24$

$x=\frac{4\pm2\sqrt{6}}{2}$

$x=2\pm\sqrt{6}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$(3x^2-6x+3)-3+(3y^2-4y+\frac{4}{3})-\frac{4}{3}=4$

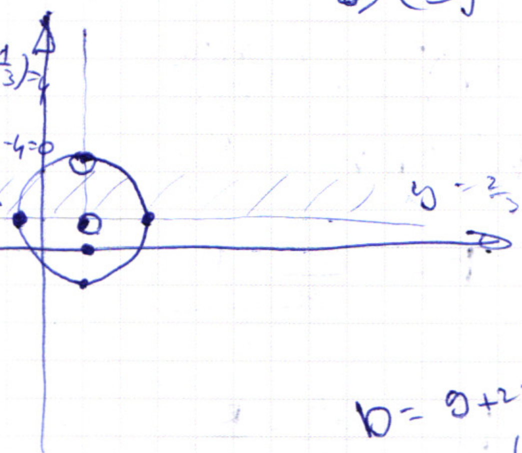
$3(x-1)^2+3(y-\frac{2}{3})^2=8\frac{1}{3}$

$(x-1)^2+(y-\frac{2}{3})^2=\left(\frac{5}{3}\right)^2$

$3x^2+3(\frac{x}{3}+\frac{1}{3})^2-6x-4(\frac{x}{3}+\frac{1}{3})=4$

$3x^2+\frac{x^2}{3}+\frac{2x}{3}+\frac{1}{3}-6x-\frac{4x}{3}-\frac{4}{3}-4=0$

$9x^2+x^2+2x+1-18x-4x-4-12=0.$



$y=\frac{2}{3}$

$(x-1)^2+(\frac{x}{3}-\frac{1}{3})^2=\frac{25}{9}$

$\cancel{x^2+1-2x+}$

$9x^2-18x+9+x^2-2x+1=25$

$10x^2-20x-15=0$

$2x^2-4x-3=0$

$D=16+24=40$

$x=\frac{4\pm2\sqrt{10}}{4}$

$x=1\pm\frac{\sqrt{10}}{2}$

$3xy-2x-3y+2\geq0$

$y(3x-3)-2x+2\geq0$

$y(3x-3)\geq2x-2$

$\begin{cases} y\geq\frac{2}{3} \\ x\neq1. \end{cases}$

$D=9+225x^2-90x-$

$-36\cdot(4x^2+2x-2)=$

$=81x^2-162x+81=$

$=81(x-1)^2\geq0$

$y=\frac{3-15x\pm9(x-1)}{18}$

$\left[\begin{array}{l} y=\frac{3-15x+9x-9}{18} \\ y=\frac{3-15x-9x+9}{18} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} y=-\frac{x}{3}-\frac{1}{3} \\ y=-\frac{4x}{3}+\frac{2}{3} \end{array}\right.$

$9y^2+4x^2-12xy-3xy+2x+3y-2=0.$

$\cancel{48y^2+8x^2-30xy}+4x+6y-4=0.$

$2\cdot5\cdot3$

$9y^2+y(3-15x)+4x^2+2x-2=0.$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

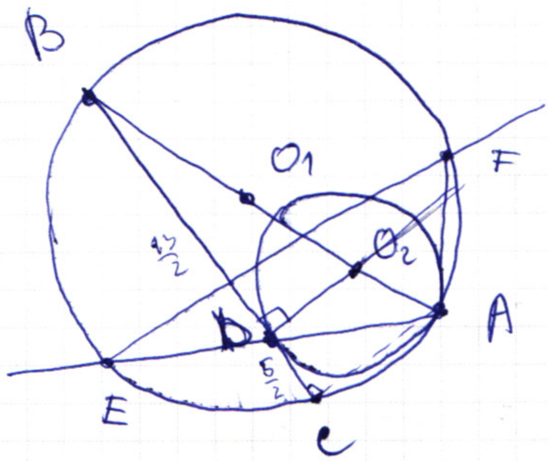
Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$AD \cdot DE = BD \cdot DC$

$9 \cdot 169 - 9R \cdot 4R + 81 \cdot 52R - 4R^2 \cdot 52R = 0$

$R^3 \cdot 4 \cdot 52 - R^2 \cdot 36 + R \cdot 81 \cdot 52 + 9 \cdot 169 = 0$



$\cancel{4R^2(52-9)+}$

$$\begin{cases} \left(\frac{13}{2}\right)^2 + r^2 = (R+r)^2 \\ 9^2 + \left(\frac{18}{13}r\right)^2 = (2R)^2 \end{cases}$$

$$\cancel{\begin{cases} 169 + 4R^2 = 4R^2 + 8Rr + 4r^2 \\ 81 \cdot 169 + (18r)^2 = 169 \cdot 4R^2 \end{cases}}$$

$(R+r)^2 = r^2 + \left(\frac{13}{2}\right)^2$

$R^2 + 2Rr = \frac{169}{4}$

$r = \frac{\frac{169}{4} - R^2}{2R}$

$r = \frac{169}{8R} - \frac{R}{2}.$

$\left(\frac{13}{2}\right)^2 = R^2 + Rr$

$r = \frac{\left(\frac{13}{2} - R\right)\left(\frac{13}{2} + R\right)}{R}$

$r = \frac{169}{8R} - \frac{R}{2}$

$\left(\frac{18}{13} \cdot \frac{4R}{9}\right)^2 + 81 = 4R^2$

$\frac{AC}{DO_2} = \frac{BC}{BD} = \frac{18}{13}$

$\left(\frac{8R}{13}\right)^2 + 81 = 4R^2$

$R^2\left(4 - \frac{64}{169}\right) = 81$

$AC = \frac{18r}{13}$

$\left(\frac{18r}{13}\right)^2 + 9^2 = (2R)^2$

$\frac{R^2}{169} \cdot 612 = 81$

$\frac{2R}{R+r} = \frac{18}{13}$

$612 = 3^2 \cdot 2^2 \cdot 17$

$\frac{R \cdot 6 \cdot \sqrt{17}}{13} = 9$

$\left(\frac{18\left(\frac{169}{8R} - \frac{R}{2}\right)}{13}\right)^2 + 81 = 4R^2$

$169 \cdot 4 = 400 + 40 + 36 = 676$

$2R = \frac{18R + 18r}{13}$

$R = \frac{9 \cdot 13}{6 \cdot \sqrt{17}} = \frac{39}{2\sqrt{17}}$

$r = \frac{4 \cdot 39}{9 \cdot 2\sqrt{17}} = \frac{2 \cdot 13}{3 \cdot \sqrt{17}} = \frac{26}{3\sqrt{17}}$

$\frac{612}{9} = 70 - 2 = 68 = 4 \cdot 17$

$\frac{18r}{13} = 2R - \frac{18R}{13}$

$\left(\frac{18 \cdot 169}{13 \cdot 8R} - \frac{18 \cdot R}{2 \cdot 13}\right)^2 + 81 = 4R^2$

$18r = 26R - 18R$

$18r = 8R$

$9r = 4R$

$r = \frac{4R}{9}.$

$\frac{9 \cdot 13}{4R} - \frac{9R}{13} + 81 = 4R^2$

~~$9 \cdot 169 - 9R \cdot 4R + 81$~~

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} ax+b \le \frac{4x-3}{2x-2} \\ ax+b \ge 8x^2-34x+30 \end{cases}$$

$y=8x^2-34x+30$

$x_B = \frac{34}{16} = \frac{17}{8}$

$y_B = 8\cdot\left(\frac{17}{8}\right)^2 - \frac{34\cdot 17}{8} + 30 = \frac{17-34\cdot 17}{8} + 30 =$

$2 + \frac{1}{2x-2}$

$$\frac{4x-3}{2x-2} \ge 8x^2-34x+30$$

$$\frac{4x-3-(8x^2-34x+30)(2x-2)}{2x-2} \ge 0$$

$$\frac{4x-3-4(4x^2-17x+15)(x-1)}{2(x-1)} \ge 0.$$

$289-240=49>0$

$x=\frac{17\pm 7}{8}$

$\left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=1{,}25. \end{array}\right.$

$\frac{9}{4}$ $72-112+30$ $\frac{9}{4}$ -10

~~$4x-3-16x^2+68x-$~~

$$\frac{4x-3-4(4x^3-4x^2-17x^2+17x+15x-15)}{x-1} \ge 0.$$

$$\frac{4x-3-16x^3+16x^2+68x^2-68x-60x+60}{x-1} \ge 0$$

$$\frac{-16x^3+84x^2-124x+57}{x-1} \ge 0.$$

$f(ab)=f(a)+f(b)$ $\quad 3^{\log_4 t}=z$

$f(p)=[p/4]$ $\quad \log_z 3=\log_4 t$

$t=4^{\log_z 3}$

$3\le x\le 27$; $\quad 3\le y\le 27$; $f(x/y)<0$.

$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x\ge |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2$

$x_b=-3$

$y_b=9-18=-9$.

$x^2+6x=t$

$3^{\log_4 t}+t\ge |t|^{\log_4 5}$ $\quad t>0$, то

$z+4^{\log_z 3}\ge 4^{\log_z 3\cdot\log_4 5}$

$f(9)=2f(3)$ $\quad 3^{\log_4 t}+t\ge t^{\log_4 5}$

$f(1)=0.$ $\quad f(2)=0$

$3^{\log_4 t}+t\ge t^{\log_4 5}.$ $\quad f(3)=0$ $\quad f(4)=f(2\cdot 2)=0$

$f(5)=1$ $\quad f(6)=0$

$3^{\log_4 t}+t-t^{\log_4 5}\ge 0$ $\quad f(7)=1$ $\quad f(8)=0$

$f'(t)=\frac{3^{\log_4 t}\cdot \ln 3}{t\cdot\ln 4}+1-\log_4 5\, t^{\log_4 5-1}$ $\quad f(11)=2$ $\quad f(9)=0$ $\quad f(10)=1$

$\left(3^{\log_4 t}\right)'=3^{\log_4 t}\cdot(\log_4 t)'\cdot\ln 3=$ $\quad f(13)=3$ $\quad f(12)=0$ $\quad f(14)=1$

$=3^{\log_4 t}\cdot\frac{\ln 3}{t\cdot\ln 4}$ $\quad f(17)=4$ $\quad f(15)=1$

$f(19)=4$ $\quad f(16)=0$

$f(23)=5$ $\quad f(18)=0$

$f(20)=1$

$f(21)=1$

$f(22)=2$

$f(24)=$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	2	0	3	1	1	0

17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
4	0	4	1	1	2	5	0	2	3	0

$3^{\log_4 t}\ge t\left(t^{\log_4\frac{5}{4}}-1\right)$ $\quad$ ~~$f(x/y)=f(x)+f(\frac{1}{y})$~~

$\log_4 3^{\log_4 t}\ge\log_4\left(t\cdot\left(t^{\log_4\frac{5}{4}}-1\right)\right)$ $\quad f(x)=f(x/y)+f(y)$

$\log_4 t\cdot\log_4 3\ge\log_4 t+\log_4\left(t^{\log_4\frac{5}{4}}-1\right)$ $\quad f(x/y)=f(x)-f(y)$.

$\log_4 t(\log_4 3-1)\ge\log_4\left(t^{\log_4\frac{5}{4}}-1\right)$.

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$t+3^{\log_4 t} \geq t^{\log_4 5}$

$\log_4 4^t + \log_4 4^{3^{\log_4 t}} \geq \log_4 4^{t^{\log_4 5}}$

$\log_4 4$

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{8}{17}. \end{cases}$$

$-8\sin^2(2\alpha+2\beta) = \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha$

$-8\sin^2 2\alpha\cos^2 2\beta - 8\sin^2 2\beta\cos^2 2\alpha =$

$= \sin 2\alpha\cos 4\beta + \cos^2\alpha \sin 4\beta + \sin 2\alpha$

$\sin 2\alpha = t$

$-8t^2\cos^2\beta - 8\sin^2 2\beta(1-t^2) = t\cos 4\beta +$

$+$

$-8\sin^2 2\alpha\cos^2 2\beta - 8\sin^2 2\beta\cos^2 2\alpha = \sin 2\alpha\cos 4\beta + \cos 2\alpha\sin 4\beta + \sin 2\alpha.$

$-8\cdot 4\sin^2\alpha\cos^2\alpha\cdot\cos^2 2\beta - 8\sin^2 2\beta(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)^2 = 2\sin\alpha\cos\alpha\cdot\cos 4\beta + (\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)\sin 4\beta + 2\sin\alpha\cos\alpha$

$\operatorname{tg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$

$\cos^2\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha+1}$

$-\frac{1}{\sqrt{17}}\cdot\cos 2\beta + \frac{4}{\sqrt{17}}\sin 2\beta + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$\pm\frac{4}{\sqrt{17}}$ $\quad \sqrt{17}(4\sin 2\beta - \cos 2\beta) =$

$\sin 2\alpha = \frac{\cos 2\beta - 4\sin 2\beta}{\sqrt{17}} - \frac{8}{17}.$

$\sin\alpha + \sin\beta = \frac{1-\cos 2\alpha}{2} + \frac{1-\cos 2\beta}{2} =$

$= 1 - \frac{\cos 2\alpha}{2} - \frac{\cos 2\beta}{2}$

$=$

$\frac{\sin(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha-\beta)}{2} = (\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)\cdot(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta)_2 =$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$$\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=\left(\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\right)\cdot\left(\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\right)=$$

$$=\frac{\sin\alpha}{2}\cdot\cos^2\frac{\beta}{2}+\frac{\sin\alpha}{2}\cdot\sin^2\frac{\beta}{2}+\frac{\sin\beta}{2}\cdot\sin^2\frac{\alpha}{2}+$$

$$+\frac{\sin\beta}{2}\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2}=$$

$$=\frac{\sin\alpha}{2}\cdot 1+\frac{\sin\beta}{2}\cdot 1=\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{2}$$

$9y^2+4x^2-12xy$

$9x^2+9y^2-18x-12y-12=0$

$9x^2+4y^2=-5y^2+18x+12y+12$

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin2\alpha=2\cdot\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos2\beta=\frac{-2\cos2\beta}{\sqrt{17}}$$

$$\frac{-2\cos2\beta}{\sqrt{17}}=-\frac{8}{17}$$

$$-2\cos2\beta=-\frac{8}{\sqrt{17}}$$

$$\cos2\beta=\frac{4}{\sqrt{17}}.$$

$$\sin2\beta=\pm\frac{1}{\sqrt{17}}.$$

1) $\sin2\beta=\frac{1}{\sqrt{17}}$

$$\sin2\alpha\cdot\frac{4}{\sqrt{17}}+\cos2\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt{17}}=-\frac{1}{\sqrt{17}}$$

$4\sin2\alpha+\cos2\alpha=-1.$

$8\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha-\sin^2\alpha+1=0.$

$8\sin\alpha\cos\alpha+2\cos^2\alpha=0 \quad \Big| :\cos^2\alpha$

$8\,tg\,\alpha+2=0$

$tg\,\alpha=-\frac{1}{4}$

2) $\sin2\beta=-\frac{1}{\sqrt{17}}$

$$\sin2\alpha\cdot\frac{4}{\sqrt{17}}-\cos2\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt{17}}=-\frac{1}{\sqrt{17}}.$$

$4\sin2\alpha-\cos2\alpha=-1$

$8\sin\alpha\cos\alpha-\cos^2\alpha+\sin^2\alpha+1=0$

$8\sin\alpha\cos\alpha+2\sin^2\alpha=0 \;\Big| :\cos^2\alpha$

$8\,tg\,\alpha+2\,tg^2\alpha=0$

$4\,tg\,\alpha+tg^2\alpha=0$

$$\left[\begin{array}{l} tg\,\alpha=0\\ tg\,\alpha=-4\end{array}\right.$$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)