МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{8}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases}3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2},\\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4.\end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x\geqslant |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{5}{2}$, $BD=\frac{13}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $3\leqslant x\leqslant 27$, $3\leqslant y\leqslant 27$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{4x-3}{2x-2}\geqslant ax+b\geqslant 8x^2-34x+30$$

выполнено для всех x на промежутке $(1;3]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $PQRS$, вершина P которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра PQ. Известно, что $QR=2$, $QS=1$, $PS=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра RS. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

© МФТИ, 2022

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

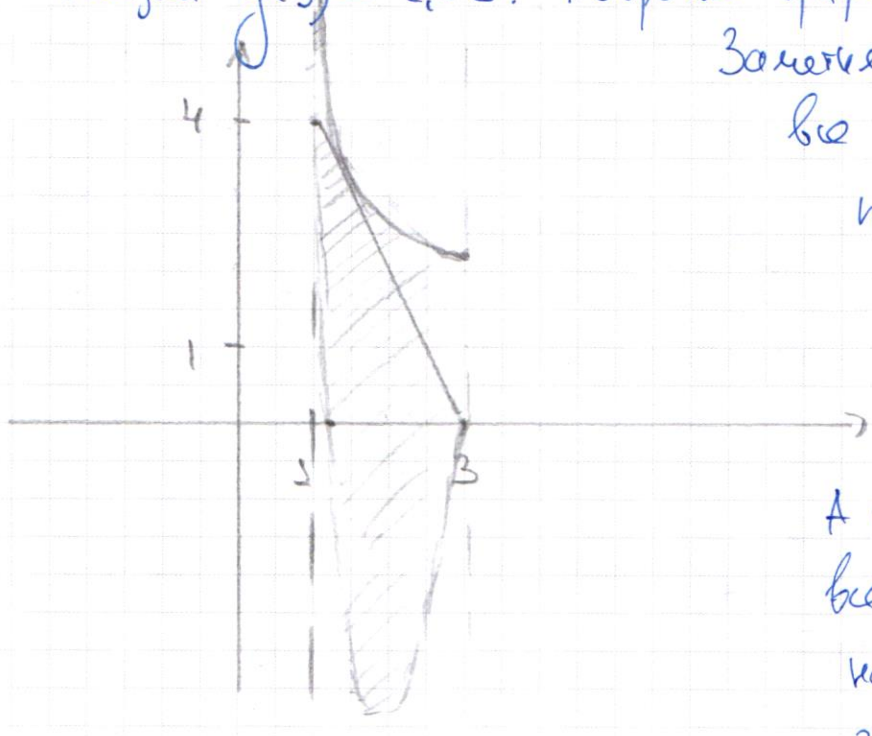
№6.

$$\begin{cases} \frac{4x-3}{2x-2} \geq ax+b \\ 8x^2-34x+30 \leq ax+b. \end{cases}$$

~~Пусть~~ $f(x)=8x^2-34x+30$. Найдем нули это функции. Приравниваем $f(x)=0$ и получаем $x_1=1{,}25$; $x_2=3$.

Теперь посмотрим на функцию $g(x)=\frac{4x-3}{2x-2}$. Она всегда убывает, так как $g'(x)=\frac{-2}{(2x-2)^2}$ всегда <0.

Найдем $g(3)=2{,}25$. Построим график.



Заметим, что нам удовлетворяют все решения „внутри" параболы для неравенства $f(x) \geq 8x^2-34+30$. (это можно проверить методом пробной точки) А также нам удовлетворяют все решения ~~от~~, которые находятся „ниже" графика функции $g(x)=\frac{4x-3}{2x-2}$. Пересечение этих областей заштриховано на графике.

Теперь найдем ~~пересечение~~ прямую проходящую через точки $(3;0)$ и $(1;4)$ ⇒ что уравнение прямой будет выглядеть так: $y=-2x+6$.

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Найдем пересечение прямой $y=-2x+6$ и $g(x)=\frac{4x-3}{2x-2}$.

$(-2x+6)(2x-2)=4x-3$

$-4x^2+12x-9=0.$

$D=12\cdot12-4\cdot9\cdot4=0$. ~~Zи~~ Заметим, что т.к. $D=0$.

то прямая $y=-2x+6$ касается функции $g(x)=\frac{4x-3}{2x-2}$.

Т.к. $ax+b$ — это функция прямой, то мы видим что для любого $x\in(1;3]$ соблюдается ряд неравенств если $a=-2$ ~~a~~ и $b=6$. Также из рисунка видим, что если изменять угол наклона прямой $y=kx+b$, то ~~Q~~ прямая в пределах $x\in(1;3]$ и „заштрихованой области" будет лежать не вся. То же самое будет и при изменении параметра b. То есть такая прямая будет единственная а значит только если $a=-2$ и $b=6$ неравенство будет выполнено для всех x на промежутке ~~в~~ $(1;3]$

Ответ: $(-2;6)$

№3.

$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x+x^2\geq|x^2+6x|^{\log_4 5}$. Т.к. $6x+x^2>0$ (ОДЗ для $\log_4(x^2+6x)$ то знаки $|x^2+6x|>0$.

$3^{\log_4 t}+t\geq t^{\log_4 5}$

$3^{\log_4 t}+t\geq 5^{\log_4 t}$

При взятии производной от ~~заметим~~ $f(x)\ 3^{\log_4 t}+t$ и от $g(x)\ 5^{\log_4 t}$, что $g(x)$ возрастает быстрее, чем $f(x)$. Пусть $x^2+6x=t>0$.

А так, как эти функции ~~за~~ $g(x)$ и $f(x)$ монотонны то они имеют либо 0, либо ~~2~~ 1 решение (если $g(x)=f(x)$)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Заметим, что при $t=16$ $f(x)=g(x)$.

Значит при $t\le16$ $f(x)\geq g(x)$ (методом пробной точки)

а при $t>16$ $f(x)<g(x)$.

Из этого делаем вывод, что $t\le16$.

Значит $t\in(0;16]$.

$$\begin{cases} t>0 & x^2+6x>0 \Rightarrow x\in(-\infty;-6)\cup(0;+\infty) \\ t\le16 & x^2+6x\le16 \Rightarrow x\in[-8;2] \end{cases}$$

Пересекаем получившиеся промежутки и получаем

$x\in[-8;-6)$

Ответ: $x\in[-8;-6)$

№3.

Преобразуем первое уравнение:

$$2\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\cos2\beta+(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)\cdot\sin2\beta=-\frac{1}{\sqrt{17}}\ \Big|\cdot\frac{1}{\cos^2\alpha}.$$

$$(2)\ 2tg\alpha\cdot\cos2\beta+\sin2\beta-tg^2\alpha\cdot\sin2\beta=-\frac{1}{\sqrt{17}\cos^2\alpha}.$$

Преобразуем второе выражение и получим (здесь тоже поделим на $\frac{1}{\cos^2\alpha}$)

$$(1)\ 2tg\alpha\cdot\cos4\beta+\sin4\beta-tg^2\alpha\cdot\sin4\beta+2tg\alpha=-\frac{8}{17\cos^2\alpha}$$

Поделим $\frac{(1)}{(2)}$. ~~Получим~~ и заменим $tg\alpha=t$. Получим

$$\frac{2t(1+\cos4\beta)+\sin4\beta(1-t^2)}{2t\cos2\beta+\sin2\beta(1-t^2)}=\frac{8}{\sqrt{17}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow t^2(\sqrt{17}\sin4\beta-8\sin2\beta)+2t(\sqrt{17}+\sqrt{17}\cos4\beta-8\cos2\beta)+$$
$$+8\sin2\beta-\sqrt{17}\sin4\beta=0.$$

Заметим, что квадратное уравнение имеет не более 2-х решений. Однако при некоторых соотношениях коэффициентов a b и c (то есть $a=0$, $b=0$ и $c=0$) уравнение имеет бесконечное кол-во решений. Так как мы знаем, что решений более 3-х. Отсюда следует, что $tg\alpha \ni R$

Ответ: $tg\alpha \in (-\infty, +\infty)$

№2.

$$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2} \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \end{cases}$$

ОДЗ: $3y-2x \geq 0$

$(3y-2x)^2=3xy-2x-3y+2$.

Преобразуем выражение и получим

$(x-3y+1)(4x-3y-2)=0$ (Получено при помощи ~~рассмотрения~~ решения квадратного уравнения отн. x)

$3x^2+3y^2-6x-4y=4$.

Таким же способом преобразуем и получим.

$3(x-3-\sqrt{(3y-7)(y+1)})(x-3+\sqrt{(3y-7)(y+1)})=0$

И нас получается 4 системы.

если $(x-3-\sqrt{(3y-7)(y+1)})=0$ или $(x-3y+1)=0$ или $(4x-3y-2)=0$

если $x-3+\sqrt{(3y-7)(y+1)}=0$ и $x-3y+1=0$ или $4x-3y-2=0$.

1-ая пара ~~уравнений~~ уравнений при $x-3y+1=0$ и $x-3-\sqrt{(3y-7)(y+1)}=0$

Выражаем x, приравниваем, и находим y.

$(3y-2)^2=(3y-7)(y+1)$.

$6y^2-8y+11=0$ — уравнение не имеет реш. т.к. $D<0$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2-ая пара уравнений при $x-3y+1=0$ и $x-3+\sqrt{(3y-7)(y+1)}=0$

Получим $(3y-7)(y+1)=(2-3y)^2$ - то же при раскрытии скобок и решении $D<0$. (Оно идентично предыдущему).

~~3-ая~~ 3-я пара уравнений при $4x-3y-2=0$ и $x-3+\sqrt{(3y-7)(y+1)}=0$

Получаем квадратное уравнение

$55y^2-4y-212=0$.

$\sqrt{D}=4\cdot 54$.

$y_1=\frac{+4+54\cdot 4}{2\cdot 55}=2$ $\quad x_1=\frac{3\cdot 2+2}{4}=2$

$y_2=\frac{4-54\cdot 4}{110}=-\frac{106}{55}$ $\quad x_2=\frac{3\cdot\frac{106}{55}+2}{4}$ - не

подходит т.к. $3y-2x>0$ - неверно.

для 4-ой пары будет аналогично, как и для 3-ей. Поэтому решения уравнения будут

~~$y_1=2$ $x_1=2$.~~ $x=2$; $y=2$

Ответ: $(2;2)$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

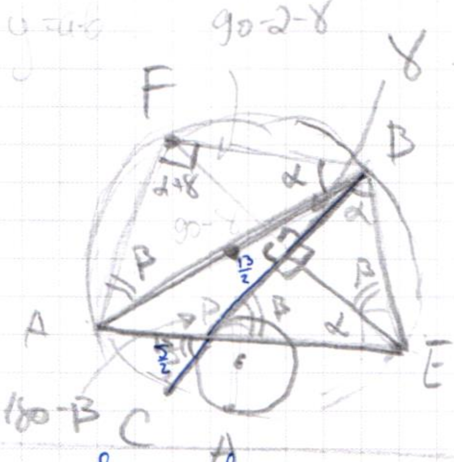
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\frac{2\sin\alpha - \cos 2\alpha}{\cos^2\alpha} = 2\operatorname{tg}\alpha \cdot 4$



$BD = \frac{13}{2}$

$DC = \frac{5}{2}$

$BC = 9.$

$\frac{13 \cdot 5}{4} = AP \cdot PE$

$\beta + \alpha + \gamma + 90 - \gamma = 180$

$\beta + \alpha = 90$

11

$2\sin\alpha\cos\alpha \cdot \cos 2\beta + \cancel{\cos 2\alpha}(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) \cdot \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}} \cdot \frac{1}{\cos^2\alpha}$

$2\operatorname{tg}\alpha \cdot \cos 2\beta + \sin 2\beta - \operatorname{tg}^2\alpha \cdot \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17} \cdot \cos^2\alpha}$

$2\operatorname{tg}\alpha \cdot \cos 4\beta + \sin 4\beta - \operatorname{tg}^2\alpha \cdot \sin 4\beta + 2\operatorname{tg}\alpha = -\frac{8}{17\cos^2\alpha}$

$$\frac{2\operatorname{tg}\alpha \cdot \cos 4\beta + \cancel{\operatorname{tg}^2\alpha} \sin 4\beta(-\operatorname{tg}^2\alpha + 1) + 2\operatorname{tg}\alpha}{2t\cos 2\beta + \sin 2\beta(1 - t^2)} = +\frac{8}{17\cancel{\cos^2\alpha}} \cdot \frac{\sqrt{17}\cancel{\cos^2\alpha}}{1} = \frac{8}{\sqrt{17}}$$

$(1-t)(t+1)$

$$\frac{2t(1+\cos 4\beta) + \sin 4\beta(1 - t^2) + \cancel{2t}}{2t\cos 2\beta + \sin 2\beta(1 - t^2)} = \frac{8}{\sqrt{17}}$$

$\cancel{\frac{1+\cos 4\beta}{2\cos 2\beta + \sin 2\beta(1-t^2)}}$

$16t(\cancel{1 + \cos 4\beta})$

$16t\cos 2\beta + 8\sin 2\beta(1 - t^2) = 2\sqrt{17}\, t(1 + \cos 4\beta) + \sqrt{17}\sin 4\beta(1 - t^2)$

$(1 - t^2)(8\sin 2\beta - \sqrt{17}\sin 4\beta) = 2t(-8\cos 2\beta + \sqrt{17} + \cancel{\cos} + \sqrt{17}\cos 4\beta)$

$t^2(\sqrt{17}\sin 4\beta - 8\underset{0}{\sin 2\beta}) + 2t(\underset{0}{\sqrt{17} + \sqrt{17}\cos 4\beta - 8\cos 2\beta}) + \underset{0}{8\sin 2\beta - \sqrt{17}\sin 4\beta}$

$\cancel{\Omega} =$ здесь max 2 реш.

то также любой.

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$x-3y+1=0$. $x=1+3y$

$4x-3y-2=0$

$\boxed{x=\frac{3y+2}{4}}$

$x=3+\sqrt{(3y-7)(y+1)}$

$(1+3y-3)^2=(3y-7)(y+1)$

$\underbrace{1+3y-3}_{3y-2}$

$x=3-\sqrt{(3y-7)(y+1)}$

$53 \times 4 = 212$

$53 \times 2 = 106$

$-12-3+7$

$9y^2-12y+4=\cancel{3y^2}+3y-7y-7$

$6y^2-8y+11=0$.

$D=64-44\cdot6<0$.

$3y>2x$

55

$3y-2x$

$1+3y=3-\sqrt{(3y-7)(y+1)}$

$3y>2x$.

$(3y-7)(y+1)=(2-3y)^2$

$\frac{3y+2}{4}=3+\sqrt{(3y-7)(y+1)}$

$16\times7=112$

$\left(\frac{3y-10}{4}\right)^2=(3y-7)(y+1)$

$64-9=55$

$16(3y-7)(y+1)=9y^2-60y+100$

$64y^2+48y-112y-112=9y^2-60y+100$.

$55y^2-4y-212=0$.

54^2

$-112+\underbrace{60+48}_{108}$

$D=16+4\cdot212\cdot55=16(1+53\cdot55)$

$212 : 2 = 106$, $106 : 2 = 53$

$55\times2=110$

$54\times54=2916$

$53\times55=2915$

2916

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta + \cos 2\alpha \cdot \sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}$

$\frac{2\cos^2\alpha - 1}{\cos^2\alpha} = 2 - \frac{1}{\cos^2\alpha}$

$\sin 4\alpha \cdot \cos 4\beta + \cos 2\alpha \cdot \sin 4\beta + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$2\operatorname{tg}\alpha \cdot \cos 2\beta + 2\sin 2\beta - \frac{\sin 2\beta}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\sqrt{17}\cos^2\alpha}$

$2\operatorname{tg}\alpha \cdot \cos 4\beta + 2\sin 4\beta - \frac{\sin 4\beta}{\cos^2\alpha} + 2\operatorname{tg}\alpha = -\frac{8}{17\cos^2\alpha}$

$2\operatorname{tg}\alpha(\cos 4\beta + 1) + \sin 4\beta\left(2 - \frac{1}{\cos^2\alpha}\right) = -\frac{8}{17\cos^2\alpha}$

$8 \cdot 3 = 24 \quad \frac{\cos 4\beta + 1}{\cos 2\beta} + \frac{2\operatorname{tg}\alpha(\cos 4\beta + 1)}{\sin 2\beta\left(2 - \frac{1}{\cos^2\alpha}\right)}$

$\sqrt{D} = 3 \cdot (3y - 2)$

$x_1 = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} =$

$= \frac{+15y - 2 + 3(3y-2)}{8} =$

$= \frac{15y + 9y - 2 - 6}{8} =$

$= 3y - 1$

$x_2 = \frac{15y - 2 - 3(3y-2)}{8} =$

$= \frac{15y - 9y - 2 + 6}{8} =$

$= \frac{3}{4}y + \frac{1}{2}$

$4x^2 + x(2 - 15y) + 9y^2 + 3y - 2 = 0.$

$D = (2 - 15y)^2 - 16(9y^2 + 3y - 2) = 0.$

$= 4 - 60y + 225y^2 - 144y^2 - 48y + 32 =$

$= 36 - 108y + 81y^2 = 9(9y^2 - 12y + 4) = 9 \cdot (3y-2)^2$

$9y^2 - 12y + 4 = 0$

$D = 144 - 4 \cdot 9 \cdot 4 = 6 \cdot 6 \cdot 4 - 4 \cdot 9 \cdot 4 =$

$= 4(36 - 36) = 0.$

$D = \frac{12}{18}$

$4(x - 3y + 1)\left(x - \frac{3}{4}y - \frac{1}{2}\right)$

$\cancel{(3y+2)^2 = 9y^2}$

$9y^2 + 3y - 2 = 0.$

$D = 9 + 4 \cdot 9 \cdot 2 = 9(1 + 4 \cdot 2) =$

$\Rightarrow \sqrt{D} = 9.$

$y_1 = \frac{-3+9}{18} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$

$y_2 = \frac{-3-9}{18} = \frac{-4}{6} = -\frac{2}{3}$

$9y^2 + 3y - 2 = 9 \cdot \left(y + \frac{2}{3}\right)\left(y - \frac{1}{3}\right)$

$16 \times 9 = 144$

$225 - 144 = 81$

36×4

$108 : 9 = 12$

$12 \cdot 12 =$

$= 6 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 2$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №___

(Нумеровать только чистовики)

$3x^2-6x-4y-4+3y^2=0.$

$D=16+4\cdot7\cdot3=4(4+21)\Rightarrow\sqrt{D}=10.$

$x_1=\frac{-4+10}{-6}=-1.$

$x_2=\frac{-4-10}{-6}=\frac{+14}{6}=\frac{7}{3}$

$D=36-12(-4y-4+3y^2)=$

$=12(3+4y+4-3y^2)=12(\cancel{3}\ 7+4y-3y^2)=$

$=12\left(y-\frac{7}{3}\right)(y+1)=4(3y-7)(y+1)$

$\sqrt{D}=2\sqrt{(3y-7)(y+1)}$

$x_1=\frac{6+2\sqrt{(3y-7)(y+1)}}{2}=3+\sqrt{(3y-7)(y+1)}$

$x_2=3-\sqrt{(3y-7)(y+1)}$

приравнять каждый и получить шишечки ответа, а затем привести подобные.

$3(x-3-\sqrt{(3y-7)(y+1)})\cancel{=0}\cdot(x-3+\sqrt{(3y-7)(y+1)})=0$

$(x-3y+1)(4x-3y-2)=0.$

№ 2

$\cancel{3}\quad 5^{\log_4 t}=x\qquad t^{\log_4 5}=$

$\begin{cases} t>0. \\ \log_4 t \cancel{\geq 0} \end{cases}$

$\cancel{3^t}\ 3^{\log_4 t}+t\geq 5^{\log_4 t}$

$\sqrt[\ln 4]{3^{\ln t}}+t\geq\sqrt[\ln 4]{5^{\ln t}}$

если $t=1$. то.

$3^x=$

$t=4$

$1+\frac{t}{3^{\log_4 t}}\geq\left(\frac{5}{3}\right)^{\log_4 t}$

$3^{\frac{\ln t}{\ln 4}}=$

$3^{\frac{5}{3}}=\sqrt[3]{3^5}$

$\frac{1}{3^x}=3^{-x}$

$\cancel{t}\cdot 3^{-\log_4 t}\geq\left(\frac{5}{3}\right)^{\log_4 t}.$

$3^1+4\geq 5^1$

$t=16.$

$7>5$ — верно

4 3

$x(x+6)>0$

$x^2+6x-16$

$D=36+4\cdot16=$

$=4(9+16)\Rightarrow\sqrt{D}=2\cdot5=10.$

$x_1=\frac{-6+10}{2}=2\qquad x_2=\frac{-6-10}{2}=-8.$

$-8\quad 2$

$+\quad -\quad +$

$-6\quad 0$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6

$$\begin{cases} \frac{4x-3}{2x-2} \geq ax+b \leftarrow \text{прямая} \\ 8x^2-34x+30 \leq ax+b \end{cases}$$

$34 : 2 = 17$

$17 \cdot 17 = 289$

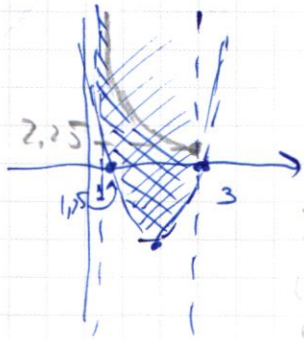
$8x^2-34x+30.$

$D = 34\cdot34-4\cdot30\cdot8 = 4\cdot17\cdot17-4\cdot30\cdot8 = 4(289-240) = 4(49) \Rightarrow$

$\sqrt{D} = 2\cdot7 = 14.$

$x_1 = \frac{34+14}{16} = \frac{48}{16} = 3.$

$x_2 = \frac{34-14}{16} = \frac{20}{16} = \frac{5}{4} = 1{,}25.$



$8(x-1{,}25)(x-3) \leq ax+b.$

$-4x^2+12x-9=0.$

$D = 12\cdot12-4\cdot9\cdot4 = 0$

получаем, что

$-2x+6$ — касательная.

$x_B = \frac{3+1{,}25}{2} = \frac{4{,}25}{2} = 2{,}125.$

$y' = \frac{4(2x-2)-2(4x-3)}{(2x-2)^2} = \frac{8x-8-8x+6}{(2x-2)^2} = \frac{-2}{(2x-2)^2}$ — всегда убывает.

$\frac{9}{6-2} = \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4} = 2{,}25$

$8-34+30 = 8-4 = 4.$

$x=3;\ y=0 \quad 0 = 3k+b$

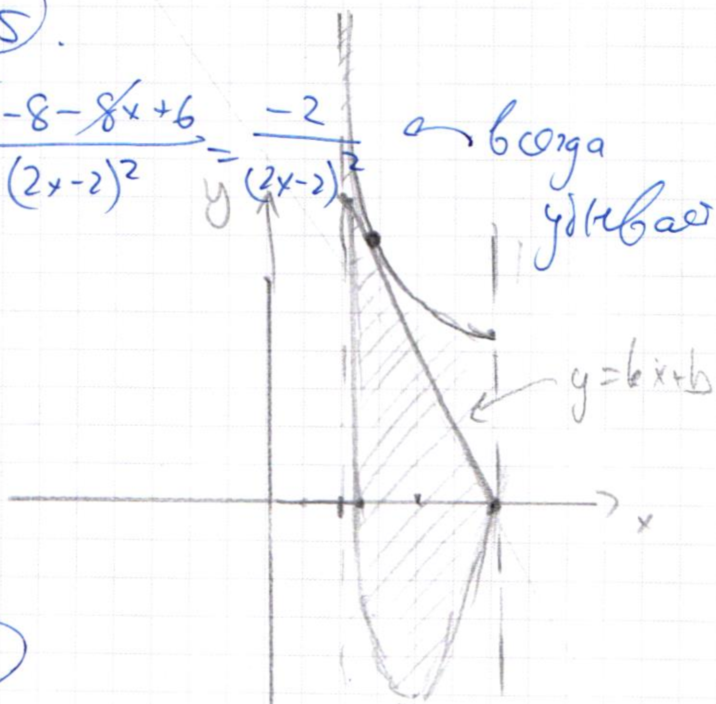
$x=1 \quad y=4. \quad 4 = k+b.$

$0 = 3k+4-k \Rightarrow \quad b = 4-k.$

$\Rightarrow 2k=-4 \Rightarrow k=-2 \quad b=4+2=6$

$y=-2x+6 \quad -2x+6 = \frac{4x-3}{2x-2}.$

$y = \frac{4x-3}{2x-2}$



если прямая $y=-2x+6$ касат. $\Rightarrow$ что она единственная (из графика) получаем, что пара чисел одна и она равна $(-2; 6)$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$x^2 - y^2 =$

$\cos 2\beta$

$\sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta + \cos 2\alpha \cdot \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\cos \beta = (2\cos^2\beta - 1)^2$

$\cos 4\beta = \cos^2 2\beta - \sin^2 2\beta = \cancel{\cos^2 2\beta + \sin^2}$

$\sin 4\beta = 2 \cdot \sin 2\beta \cdot \cos 2\beta.$

$= 2\cos^2 2\beta - 1 = 2(\cancel{4\cos^4} = \cos^2 2\beta - \sin^2 2\beta =$

$= (\cos 2\beta + \sin 2\beta)\ \cancel{(}\ (\cdot 2\sin 2\beta \cdot \sin 2\beta)$

$\sin 2\alpha \cdot (\cos 2\beta + \sin 2\beta) \cdot 2\sin 2\beta \cdot \cos 2\beta\ \cancel{+}\cos 2\alpha \cdot 2 - \sin 2\beta \cdot \cos 2\beta + \sin 2\alpha = \frac{8}{17}$

$\sin 2\alpha (\cos 2\beta + \sin 2\beta + 1) \cdot$

$x + y + x^2 + y^2$

$\cos^2 2\beta + \sin^2 2\beta + \cos 2\beta + \sin 2\beta =$

$= \cos 2\beta(\cos 2\beta + 1) + \sin 2\beta(\sin 2\beta$

$\sin 2\alpha(2\sin^2\beta \cdot \cos 2\beta + 2\cos^2 2\beta \cdot \sin 2\beta + 1) + 2\sin 2\beta \cdot \cos 2\beta \cdot \cos 2\alpha = -\frac{8}{17}.$

$2\sin^2\beta \cdot \cos 2\beta + 2\cos^2 2\beta \cdot \sin 2\beta + \sin^2 2\beta + \cos^2 2\beta.$

$\sin^2\beta(2\cos 2\beta + 1) + \cos^2 2\beta($

$2x^2 \cdot y + 2y^2 x + x^2 + y^2 = x(2y^2 + x)$

$1 + \frac{1}{17} =$

$2\cos 2\beta - 2\cos^3 2\beta$

$= \frac{16}{\sqrt{17}} \cancel{\pm}$

$\sin(2\alpha + 2\beta)$

$\sin(2\alpha + 4\beta) = \sin(2\alpha + 2\beta) \cdot \cos 2\beta + \cos(2\alpha + 2\beta) \cdot \sin 2\beta.$

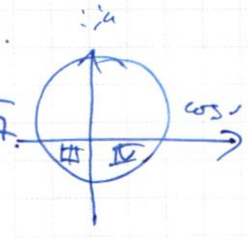
$= \pm \frac{4}{\sqrt{17}}$

$\cancel{\sin 2\alpha}\quad -\frac{1}{\sqrt{17}} \cdot \cos 2\beta + \cancel{\sin 2\beta} + \frac{4}{\sqrt{17}} \cdot \sin 2\beta + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17} \ \Big|\cdot\sqrt{17}.$

$\cos \frac{4}{\sqrt{17}}$

$-\cos 2\beta + 4\sin 2\beta + \sqrt{17}\sin 2\alpha.$

$\sin(2(\alpha+\beta)) = 2\sin(\alpha+\beta) \cdot \cos(\alpha+\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}.$



☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3.

$\cos 4\beta = \cancel{\sin^2 2\beta - \cos^2 2\beta}$

$\cancel{\sin\alpha + \sin\beta}$

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha.$

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta.$

$\sin(2\alpha + \cancel{\sin 2\beta} + 2\beta) = \sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta + \cos 2\alpha \cdot \sin 2\beta. = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha + 4\beta) = \sin 2\alpha \cdot \cos 4\beta + \cos 2\alpha \cdot \sin 4\beta.$

$\cancel{\sin 2\alpha \cdot \cos 4\beta}$

$\sin 2\alpha \cdot$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha.$

$\cos 4\beta = \cos^2 2\beta - \sin^2 2\beta = (\cos 2\beta + \sin 2\beta)(\cos 2\beta - \sin 2\beta) =$

$x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$ $\cancel{= \cos}$

$\cancel{\cos}$

$2\sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot (2\cos^2\beta - 1) + (2\cos^2\alpha - 1) \cdot 2\sin\beta \cdot \cos\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\cancel{2\sin\alpha \cdot \cos\alpha}$

$\cancel{\cos 2\beta + \sin 2\beta = \cos^2\beta -}$

$2\sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot \cos 2\beta + (2\cos^2\alpha - 1) \cdot \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\frac{1}{\cos^2\alpha}.$

$\sin 2\alpha.$ $2\sin\alpha \cos\alpha (\cos 2\beta + \sin 2\beta)(\cos 2\beta - \sin 2\beta) + (2\cos^2\alpha - 1)(2 \cdot 2\sin 2\beta \cdot \cos 2\beta) = -\frac{8}{17}.$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ОДЗ:

$\begin{cases}(3y-2x)^2=(\sqrt{3xy-2x-3y+2})^2\\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4\end{cases}$

$9y^2-12xy+4x^2=3xy-2x-3y+2.$

$9y^2-15xy+4x^2+2x+3y-2=0.$

$3xy-2x-3y+2=3y(x-1)-2(x-1)=$
$=(3y-2)(x-1)$

$(3y-2x)^2=(3y-2)(x-1)$

$3y^2-4y-1=0$

$\mathcal{D}=16+4\cdot3\cdot1=16+12=4$ $\sqrt{\mathcal{D}}=2$

$y_1=\frac{4+2}{6}=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$

$y_2=$

$3x^2-6x-4y-4+3y^2$

$\mathcal{D}=36-12(3y^2-4-4y)=$
$=12(3-4-4y+3y^2)=$
$=12(3y^2-4y-1)$
$\mathcal{D}=12(3-3y^2+4+4y)=$
$=12(-3y^2+4y+7)=12(y+1)(y+7)$

$3x^2$

№3.

ОДЗ $(x^2+6x>0)$

$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x\geq x^2+6x^{\log_4 5}-x^2$

$3^{\frac{\ln(x^2+6x)}{\ln4}}+6x\geq$

$3=\log_3 3^3$ $a^b=c$

$3y^2+4y+7$
$x_1x_2=7$
$-1\cdot(-7)$

$t=8.$

$a^x=b$

$x^2+6x=t>0.$ 3^2+8 $3^3=27$

$x=\log_a b$ $a^0=b\Rightarrow$ $\Rightarrow b=1.$

$3^{\log_4 t}+t\geq t^{\log_4 5}$ $9+8$ 17 15 $3^{\log_3 27}=27$

$d^{\log_a b}=$
$=d^x$ где $a^x=b$

$3^{\log_4 t}+t\geq5^{\log_4 t}\ \Big|\cdot\frac{1}{3^{\log_4 t}}$

$(\log_3 27)^2=$

$27^{\log_3 3}=27$ 4^2

$1+\frac{t}{3^{\log_4 t}}\geq\left(\frac{5}{3}\right)^{\log_4 t}.$

возраст. функция.

$3+4=$
$3^x=3^2$
3^4+4

производная
$\ln x=\frac{1}{x}$

$\frac{t}{3^{\log_4 t}}=t\cdot3^{-\log_4 t}$

$t\cdot3^{-\log_4 t}=3^{-\log_4 t}\cdot t(3^-$

$3^2+4^2=5^2$

~~$3+4=x$~~

$3y\geq1$ $(x-3y+1)(4x-3y-2)=0.$ $\boxed{t=4}$

№8

$\begin{array}{r}36\\+16\\\hline 52\end{array}$

$3+4\geq5.$ $3^2+16=5^2$ убыв. все что больше 4.

$x^2+6x+4\geq0.$ $x^2+6x\geq4.$ $\boxed{t\geq4}$

$\mathcal{D}=36+4\cdot4=52$ $x^2+6x\geq4.$

$=4(9+4)\Rightarrow\sqrt{\mathcal{D}}=2\sqrt{13}.$

$x_1=\frac{-6+2\sqrt{13}}{2}=$
$=-3+\sqrt{13}$

$x\in(-\infty;-3-\sqrt{13})\cup(-3+\sqrt{13};+\infty)$ $x_2=\frac{-6-2\sqrt{13}}{2}=-3-\sqrt{13}$

$-3-\sqrt{13}$ $-3+\sqrt{13}$ $x\in$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)