МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 4

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6}, \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$\left|x^2-26x\right|^{\log_5 12}+26x\geqslant x^2+13^{\log_5\left(26x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=12$, $BD=13$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $4\leqslant x\leqslant 28$, $4\leqslant y\leqslant 28$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{8-6x}{3x-2}\geqslant ax+b\geqslant 18x^2-51x+28$$

выполнено для всех x на промежутке $\left(\frac{2}{3};2\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $TXYZ$, вершина Y которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра TY. Известно, что $XY=\sqrt{3}$, $TX=\sqrt{2}$, $TZ=2$. Найдите длину ребра XZ. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3.

$$|x^2-26x|^{\log_5 12}+26x \geq x^2+13^{\log_5(26x-x^2)}$$

$26x-x^2 \geq 0$, из ~~Д~~ О.д.з. для $\log_5$

$\Rightarrow x^2-26x<0$, $|x^2-26x| = 26x-x^2$

$$(26x-x^2)^{\log_5 12}+26x-x^2 \geq 13^{\log_5(26x-x^2)}$$

$t = 26x-x^2 > 0$

$$t^{\log_5 12}+t \geq 13^{\log_5 t} = \left(5^{\log_5 13}\right)^{\log_5 t} = t^{\log_5 13}$$

$$t^{\log_5 12}+t \geq t^{\log_5 13} = g(t)$$

$\cancel{f(t)} \overset{\text{II}}{f(t)}$ $f(t) = \cancel{t^{\log_5 12}+t}$; $\cancel{\frac{df}{dt} = \log_5 12 \cdot t^{(\log_5 12)-1}+1}$

$\log_5 12 > 1$; $\log_5 13 > 1$

слева и справа нер-ва – ~~степ.~~ монотонные ф-ции

т.к $\log_5 13 > \log_5 12$, то правая часть возрастает быстрее левой (в какой-то момент), значит при $t > t_1$ ~~после того, как~~ $(g(t_1) = f(t_1))$, $g(t) > f(t)$

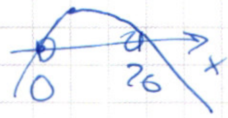
$t_1 = 25$, $5^{(\log_5 12)\cdot 2}+25 = 5^{\log_5 13 \cdot 2}$, $12^2+25 = 13^2$.

~~⇒ нер-во~~ $t=0$, $f(t) = g(t)$ ~~что~~

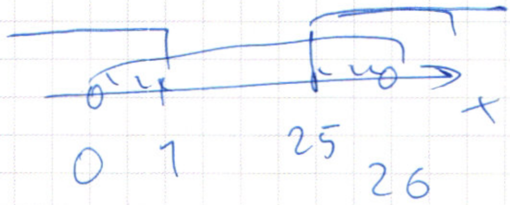
$t=5$, $f(t) > g(t)$ $\Rightarrow$ но $t>0$ из условия, т.е. нер-во верно при $t \in (0;25]$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

$$\begin{cases} 26x - x^2 > 0 \\ 26x - x^2 \le 25 \end{cases}; \quad \begin{cases} (26-x)x > 0 \\ x^2 - 26x + 25 \ge 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} 26 > x > 0 \\ (x-25)(x-1) \ge 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} 26 > x > 0 \\ \left[\begin{array}{l} x \ge 25 \\ x \le 1 \end{array} \right. \end{cases}$$

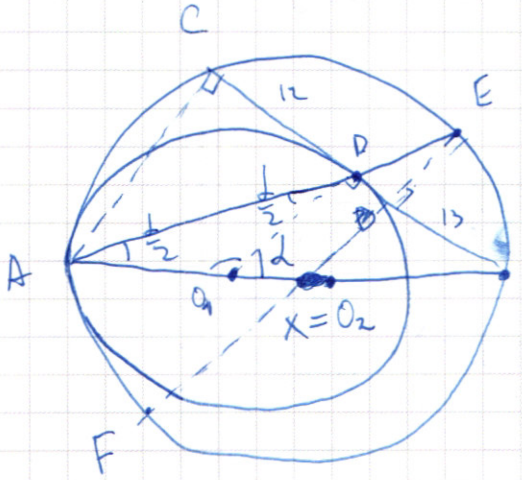


Ответ: $x \in (0;1] \cup [25;26)$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



№4. R – рад. Ω; r – рад. ω

1) пусть ℓ – общ. касат. тогда $AB \perp \ell$, $AO_1 \perp \ell$. $\Rightarrow O_1 \in AB$.

2) AB – диам. $\Rightarrow AC \perp CB$

$AC \parallel DO_1$, по т. Фалеса:

$\frac{DB}{BO_1} = \frac{CD}{AO_1}$; $\frac{13}{2R-r} = \frac{12}{r}$

$13r = 12(2R-r)$; $\boxed{2R = \frac{13}{12}r + r}$

3) по т. Пифагора: $(BO_1)^2 = O_1D^2 + BD^2$

$(2R-r)^2 = r^2 + 13^2$; $\left(\frac{13}{12}\right)^2 \cdot r^2 - r^2 = 13^2$

$r^2\left(\frac{13}{12}-1\right)\left(\frac{13}{12}+1\right) = 13^2$; $r^2 \cdot \frac{1}{12} \cdot \frac{25}{12} = 13^2$

$r^2 = \frac{13^2 \cdot 12^2}{5^2}$; $\boxed{r = \frac{13 \cdot 12}{5} = 31{,}2}$ – ответ 1.

$2R = \frac{25}{12}r$; $R = \frac{25}{12 \cdot 2} \cdot \frac{13 \cdot 12}{5} = \boxed{32{,}5}$ – ответ 2.

4) $AB \cap FE = X$; $O_1D \parallel XE \Rightarrow \triangle ADO_1 \sim \triangle AEX \Rightarrow$

$AX = XE$. Но $X \in AB \Rightarrow AX = XE = R$, $X = O_2$.

$\angle DO_1B = \alpha$; $\cos\alpha = \frac{O_1D}{O_1B} = \frac{r}{2R-r} = \frac{12}{13}$

$\angle AFE = \angle AXE : 2 = 90 - \frac{\alpha}{2}$ (из центр. углов).

$\boxed{\angle AFE = 90^\circ - \frac{\arccos\left(\frac{12}{13}\right)}{2}}$ – ответ 3.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

5) $AD = 2A_{O}O_1 \cdot \cos\frac{\alpha}{2}$; $\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\cos 2\alpha + 1}{2} = \frac{\frac{12}{13}+1}{2} =$

$= \frac{25}{26}$; $AD = 2 \cdot r \cdot \sqrt{\frac{25}{26}} = r \cdot 5 \cdot \sqrt{\frac{2}{13}} = 5\sqrt{\frac{2}{13}} \cdot \frac{12 \cdot 13}{5}$

6) $AD \cdot DE = CD \cdot DB$ (отрезки перес. хорд).

$\frac{13 \cdot 12}{5} \cdot 5\sqrt{\frac{2}{13}} \cdot DE = 12 \cdot 13$

$\boxed{DE = \sqrt{\frac{13}{2}}}$; $\sin^2\frac{\alpha}{2} = 1 - \frac{25}{26} = \frac{1}{26}$

$S_{AFE} = AE \cdot EF \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin\frac{\alpha}{2} = 2R \cdot (AD + DE) \cdot \sqrt{\frac{1}{26}} =$

$= 2 \cdot \frac{5 \cdot 13}{2} \cdot \left(12 \cdot \sqrt{26} + \frac{\sqrt{26}}{2}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{26}} =$

$= 5 \cdot 13 \cdot \left(12 + \frac{1}{2}\right) = 5 \cdot 13 \cdot \frac{25}{2} = \boxed{812,5}$ - ответ S.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5.

$f(ab) = f(a)+f(b)$;

$f(x\cdot\frac{1}{y}) = f(x)+f(\frac{1}{y})$; $f(y\cdot\frac{1}{y}) = f(y)+f(\frac{1}{y}) = f(1)$

$f(2) = [\frac{2}{4}] = 0 = f(2\cdot 1) = f(2)+f(1) \Rightarrow f(1) = 0$

$\boxed{f(\frac{1}{y}) = -f(y)}$; $f(\frac{x}{y})<0 \iff f(x)<f(y)$

x	f(x)	
2	0	X
3	0	X
5	1	
7	1	
11	2	
13	3	
17	4	
23	5	
19	4	

t	$p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\dots$	$f(t)$
4	2·2	0
6	2·3	0
8	2·2·2	0
9	3·3	0
10	2·5	1
12	2·3·2	0
14	2·7	1
15	3·5	1
16	2·2·2·2	0
18	2·3·3	0
20	2·2·5	1
21	3·7	1
22	2·11	2
24	2·2·3·2	0

при $x\in[4;28]$, $f(x)\in[0;5]$.

1) $f(x)=0$; $f(y)=\{1,2,3,4,5\}$

8 x_i 13 y_i

$\boxed{8\cdot 13 \text{ пар. } \text{вариа}}$

2)

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

2) $f(x)=1$; $f(y)=\{2;3;4;5\}$ $\boxed{7\cdot 6}$ пар. ~~вар~~.

$7\ x_i$ $6\ y_i$

3) $f(x)=2$; $f(y)=\{3;4;5\}$ $\boxed{2\cdot 4}$ пар

$2\ x_i$ $4\ y_i$

4) $f(x)=3$; $f(y)=\{4;5\}$ $\boxed{3}$ пары

$1\ x_i$; $3\ y_i$

5) $f(x)=4$; $f(y)=\{5$ $\boxed{2}$ пары

$2\ x_i$ $1\ y_i$

Итого:

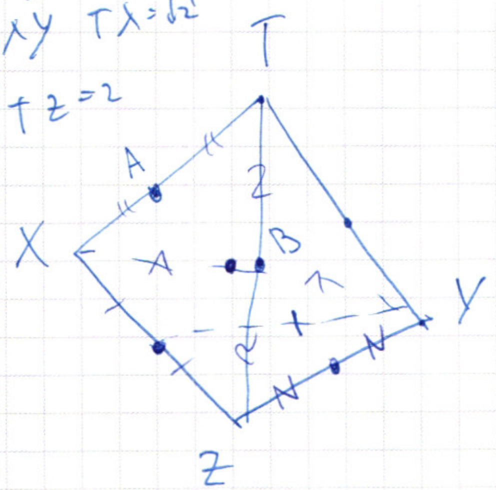
$8\cdot 13+7\cdot 6+8+3+2=104+42+8+6=160$

Ответ: 160 пар.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sqrt{3}$ $\parallel$ XY $TX=\sqrt{2}$

$TZ=2$



№7.

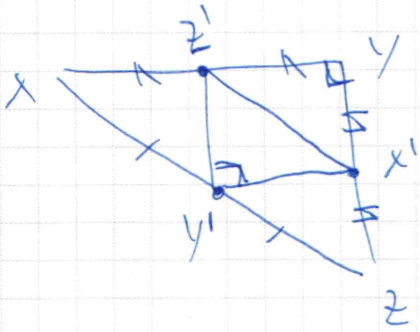
1) Рассмотрим (XYZ)

$\triangle Z'X'Y' \sim \triangle XYZ$, $\Rightarrow$

$\angle X'Y'Z' = \angle XYZ$. Но

$X', Y', Z', Y \in (XYZ)$, и принадл. одной сфере $\Rightarrow$ $X'YZ'Y'$ – впис. $\Rightarrow$

$\angle XYZ + \angle X'Y'Z' = 180^\circ$, $\angle XYZ = 90^\circ$



2) $AB \parallel Z'X'$ (ср. линии, обе паралл. XZ.) $\Rightarrow$ $A \in (BZ'X')$. Тогда $ABX'Z'$ – впис. з пар-мм, т.е прямоугольник.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

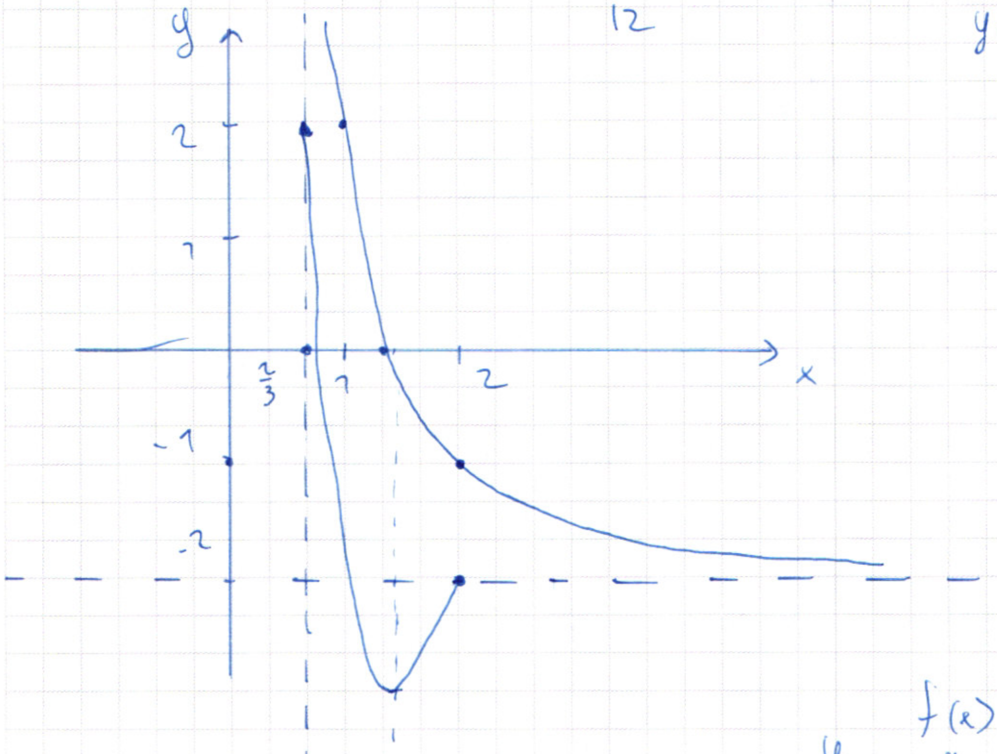
№ 6.

гипербола, парабола

$$\frac{8-6x}{3x-2} \geq ax+b \geq 18x^2-51x+28$$

$$x_{верш.} = \frac{51}{2\cdot 18} = \frac{17}{12} = 1\frac{5}{12}$$

$$y_{верш.} = -\frac{65}{8}$$



Из рис-ка ясно, что $y = ax+b$ будет лежать между параболой и гиперболой если $-1 \geq f(2) \geq -2$ $f\left(\frac{2}{3}\right) \geq 2$. (иначе происходит пересечение или параболы или гиперболы). Также $y=ax+b$ не пересекает $\frac{8-6x}{3x-2}=y$ $\Rightarrow$ $\frac{8-6x}{3x-2} = ax+b$ имеет не более одного корня при $x \in \left[\frac{2}{3}; 2\right]$

$$\begin{cases} -1 \geq 2a+b \geq -2 & \mathrm{I} \\ \frac{2a}{3}+b \geq 2 & \mathrm{II} \\ 8-6x = (ax+b)(3x-2) & \mathrm{III} \end{cases}$$

III или $D \leq 0$, или корни не попали в $\left[\frac{2}{3}; 2\right]$

$3ax^2 - 2ax + 3bx - 2b + 6x - 8 = 0$

$\cancel{D} = 3ax^2 + x(6+3b-2a) - 2b - 8 = 0$

$D = (6+3b-2a)^2 + 4(2b+8)\cdot 3a =$

$= (6+3b-2a)(6+3b-2a) + 12a(2b+8) =$

$= 36 + 18b - 12a + 18b + 9b^2 - 6ab - 12a - 6ab + 4a^2 + 24ab + 96a =$

$= 9b^2 + 36b + 12ab + 4a^2 + 72a + 36 =$

$= 9b^2 + b(36+12a) + 4a^2 + 72a + 36$.

$\cancel{D} D = (36+12a)^2 - 4\cdot 9\cdot(4a^2+72a+36) =$

$= \cancel{6^4} + 2\cdot 6^2 \cdot 12a + 12^2 a^2 - 4^2\cdot 3^2 \cdot a^2 - 4\cdot 9\cdot 6^2 \cdot 2\cdot a - \cancel{6^4} =$

$= 2^2\cdot 6^3 a + \cancel{2^2\cdot 6^2 a^2} - \cancel{2^2 6^2 a^2} - \cancel{2} 2\cdot 6^4\cdot a =$

$= 6^3 a(4 - 2\cdot 6) < 0 \Rightarrow D$ не имеет корней

~~$D \leq 0$, если $D_{max} \leq 0$~~ $9 > 0 \Rightarrow D > 0$.

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 2 (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$; $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin(2\alpha) = -\frac{2}{17}$

$\sin\left(\frac{x+y}{\cancel{2}}\right) + \sin(x-y) = \sin x\cdot\cos y + \sin y\cdot\cos x + \sin x\cdot\cos y -$

$-\sin y\cdot\cos x = 2\sin x\cdot\cos y$

$\begin{cases} x+y = 2\alpha+4\beta \\ x-y = 2\alpha \end{cases}$; $x = 2\alpha+2\beta$; $y = 2\beta$

$2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos(2\beta) = -\frac{2}{17}$;

$2\cdot\left(+\frac{1}{\sqrt{17}}\right)\cdot\cos(2\beta) = +\frac{2}{17\sqrt{17}}$; $\cos(2\beta) = \frac{1}{\sqrt{17}}$;

1) $\sin 2\beta > 0$, $2\beta\in(0+2\pi k; \pi+2\pi k)$.

$\sin 2\beta = \sqrt{1-\frac{1}{17}} = \frac{4}{\sqrt{17}}$;

$\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \sin 2\beta\cdot\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$2\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt{17}} + \frac{4}{\sqrt{17}}\cdot(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\Big|:\cos^2\alpha\neq 0$

$2\operatorname{tg}\alpha + 4(1-\operatorname{tg}^2\alpha) = -1$; $\operatorname{tg}\alpha = z$

$2z+4-4z^2 = -1$; $4z^2-2z-\cancel{3}^{-5}=0$

~~$D = 4^2-4\cdot4\cdot3 < 0$~~ $D = 4+16\cdot5 = 84$

$z_{12} = \frac{2\pm\sqrt{84}}{8} = \operatorname{tg}\alpha$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

2) $\sin(2\beta) < 0$

$$\sin(2\beta) = -\frac{4}{\sqrt{17}}$$

$$2\,tg\,\alpha \cdot \frac{1}{\cancel{\sqrt{17}}} - \frac{4}{\cancel{\sqrt{17}}}\left(1 + tg^2\alpha\right) = -\frac{1}{\cancel{\sqrt{17}}}$$

$$2\,tg\,\alpha - 4 + 4\,tg^2\alpha = -1 \quad ; \quad tg\,\alpha = y$$

$$4y^2 + 2y - 3 = 0$$

$$D = 4 + 16 \cdot 3 = 52$$

$$y_{12} = \frac{-2 \pm \sqrt{52}}{8}$$

Ответ: $\frac{-2 \pm \sqrt{52}}{8}$; $\frac{2 \pm \sqrt{84}}{8}$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6} = \sqrt{(x-1)(y-6)} \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45 \Rightarrow (3x-3)^2+(y-6)^2=90 \end{cases}$$

$\cancel{(y-6x)^2 = xy-6x-y+6}$

$(3(x-1))^2+(y-6)^2=90$; $(3(x-1))^2+6(x-1)(y-6)+(y-6)^2 = 90$

$$\begin{cases} (y-6x)^2=(x-1)(y-6) \ \Big| \cdot 6 \\ y-6x \geq 0 \\ (3(x-1))^2+(y-6)^2=90 \end{cases}$$

$6(y-6x)^2=6(x-1)(y-6)$

$(3(x-1))^2+6(x-1)(y-6)+(y-6)^2=90+6(y-6x)^2$

$\cancel{(3(x-1)-(y-6))^2 = 90-16(y-6x)^2}$

$(3(x-1)+(y-6))^2-6(y-6x)^2=90$

$(3x+y-9)^2-6(y-6x)^2=90$

$\cancel{(3x+y-9-y+6x)(3x+y-9+y-6x)=5(y-6x)^2+90}$

$\cancel{9(x-1)(2y-3x}$

$(3x+y-9-2y+12x)(3x+y-9+2y-12x)=90+2(y-6x)^2$

$(15x-y-9)($

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(p) = [p/4]$

$x \in [4; 28]$

$y \in [4; 28]$

$f\left(\frac{1}{y}\right) < 0$

2	13
3	17
5	19
7	23
11	

$f\left(x \cdot \frac{1}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$

$f(2) = 0$; $f(3) = 0$; $f(5) = 1$; $f(7) = 1$

$f(11) = 2$; $f(13) = 3$; $f(1) = 0$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$

$f(2) = f(2 \cdot 1) = f(2) + f(1) \Rightarrow f(1) = 0$

$f\left(y \cdot \frac{1}{y}\right) = f(1) = f(y) + f\left(\frac{1}{y}\right) = 0 \Rightarrow \boxed{f\left(\frac{1}{y}\right) = -f(y)}$

$f(x) - f(y) < 0$; $\boxed{f(x) < f(y)}$

p	f(p)
2	0
3	0
5	1
7	1
11	2
13	3
17	4
19	4
23	5
1	0

4	2·2	0
6	2·3	0
8	2·2·2	0
9	3·3	0
10	2·5	1
12	2·3·2	0
14	2·7	1
15	3·5	1
16	2·2·2·2	0
18	2·3·3	0
20	2·2·5	1
21	3·7	1
22	11·2	2
24	2·2·3·2	0

$\boxed{7}$ 1

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

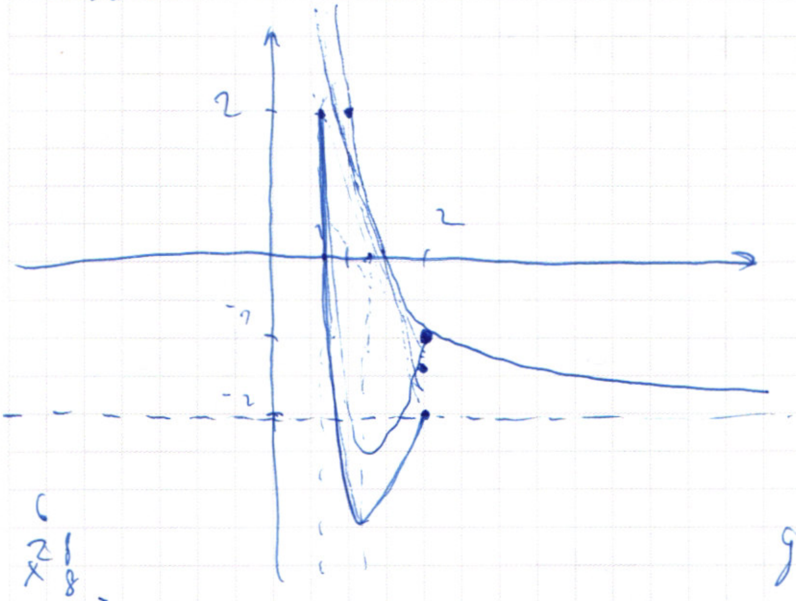
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

$$\lim_{x\to\infty} \overset{f(x)}{\frac{8-6x}{3x-2}} = -\frac{6x}{3x} = \boxed{-2} \quad ; \quad x=\frac{2}{3}$$

$f(2)=\frac{8-12}{6-2}= = -1$

$f(1)=\frac{8-6}{1}=2$

$\frac{+51}{2\cdot 18}=\frac{17\cdot 3}{2\cdot 3\cdot 6}=\frac{17}{12}$



$g(2)=18\cdot 4-51\cdot 2+28=$

$=72-102+28=-2$

$g(0)=28$

$g\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{2\cdot 18\cdot 4}{9}-\frac{3\cdot 17\cdot 2}{3}+28=$

$\begin{array}{r} 28 \\ \times 8 \\ \hline 224 \end{array}$

$= 8-34+28=2$

$g\left(\frac{17}{12}\right)=\frac{18\cdot 17^2}{3^2\cdot 4^2}-\frac{3\cdot 17\cdot 17}{3\cdot 4}+28=$

$=17^2\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{4}\right)+28=-\frac{17^2}{8}+28=\cancel{17-\frac{17}{8}}$

$=\frac{-289+28\cdot 8}{8}=\frac{224-289}{8}=-\frac{65}{8}$

$T(x)=(ax+b)$; $2a+b=\delta$, $\delta\in[-2;-1]$

$T\left(\frac{2}{3}\right)\geq 2 \Rightarrow \frac{2a}{3}+b\geq 2$

$\frac{8-6x}{3x-2}=ax+b$ – 0 корней

$8-6x=(ax+b)(3x-2)$; $3ax^2+3bx-2ax-2b+6x-8=0$

$3ax^2+x(3b-2a+6)-2b-8=0$

$D=(3b-2a+6)^2+4(2b+8)\cdot 3a \leq 0$

$\frac{2a}{3}+b\geq 2$

$-1\geq 2a+b\geq -2$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

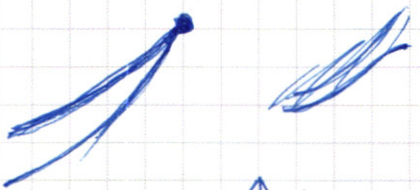
№6.

$$\frac{8-6x}{3x-2} \geq ax+b \geq 18x^2-51+28$$

$$\begin{cases} \frac{8-6x}{3x-2} \geq ax+b \\ 18x^2-51x+28 \leq ax+b \end{cases}$$

$f(x) \geq g(x)$, при $x \in [a; b]$, если f

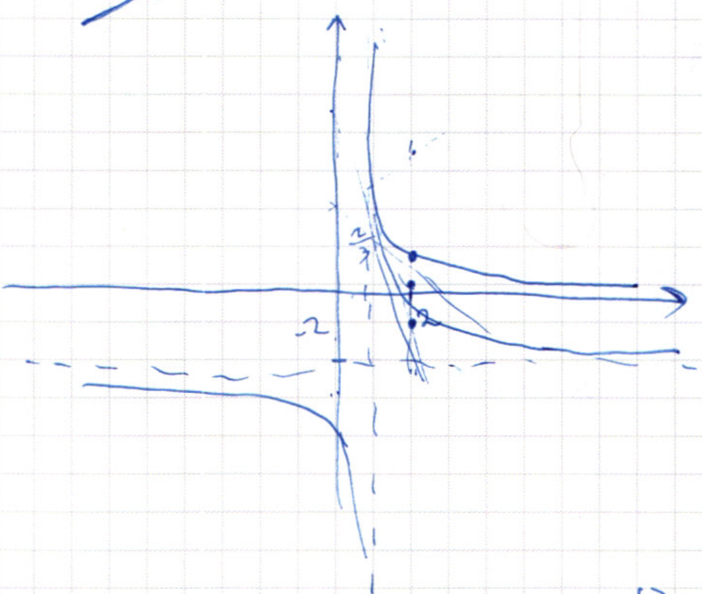
$f(x) = \frac{8-6x}{3x-2}$



$x_{в.} = \frac{51}{18} = \frac{3\cdot 17}{3\cdot 6} = \frac{17}{6}$

$18 \cdot \frac{289}{36} - 51 \cdot \frac{17}{6} + 28 =$

$= \frac{289}{2} - \frac{17\cdot 17}{2} + 28 = 28$



$18 \cdot 2x - 51 = 0$; $x = \frac{51}{36} = \frac{17\cdot 3}{12\cdot 3} = \frac{17}{12}$

$y_{в.} = 18 \cdot \frac{17^2}{12^2} - \frac{17\cdot 3\cdot 17}{12} + 28 = \frac{6\cdot 3\cdot 17^2}{6\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \frac{17^2}{4} + 28 =$

$= -\frac{17^2}{8} + 28 = 17\left(-\frac{17}{8} + 4\right) = 17.$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

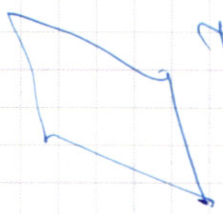
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

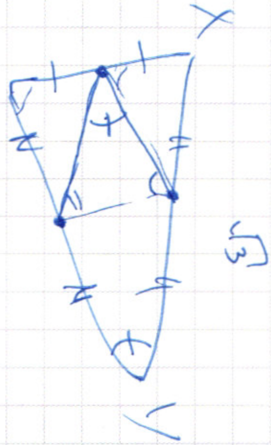
$T(x) = ax + b$;

$-1 \geq T(2) \geq -2$ $\qquad T\left(\frac{2}{3}\right) \geq 2$

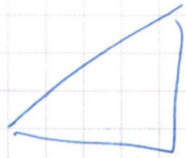
$-1 \geq 2a + b \geq -2$

$\frac{2a}{3} + b \geq 2$



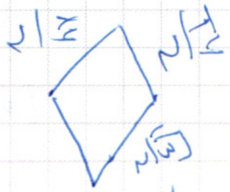


$8 - 6x = (ax + b)(3x - 2) \rightarrow D \leq 0$



$8 - 6x = 3ax^2 - 2ax + 3bx - 2b$

$3ax^2 + x(3b - 2a + 6) - (2b + 8) = 0$



$D = (3b - 2a + 6)^2 + 4(2b + 8) \cdot 3a \leq 0$

$(3b - 2a + 6)(3b - 2a + 6) = 9b^2 - 6ab + 18b - 6ab + 4a^2 - 12a + 18b$

$-12a + 36 = 9b^2 - 12ab + 36b - 24a + 4a^2 + 36 \leq 0$

$$\begin{cases} -1 \geq 2a + b \geq -2 \\ \frac{2a}{3} + b \geq 2 \\ 9b^2 - 12ab + 36b - 24a + 4a^2 + 36 \leq 0 \end{cases}$$

$9b^2 + b(36 - 12a) - 24a + 4a^2 + 36 \leq 0$

$(2a - 6)^2 = 4a^2 - 24a + 36$

$9b^2 + 12b(3 - a) + (2a - 6)^2 \leq 0$

$D = 144 \cdot (3 - a)^2 - 4 \cdot 9 \cdot (2a - 6)^2 = (36 - 12a)^2 - (12a - 36)^2 =$

$= 0$

$b = \frac{-12(3 - a)}{18}$; $\quad 9\left(b + \frac{2}{3}(3 - a)\right)^2 \leq 0$

$b = -\frac{2}{3}(3 - a) = \boxed{\frac{2a}{3} - 2}$

☑ черновик ☐ чистовик

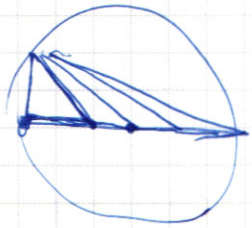
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} b = \frac{2a}{3} - 2 ; \\ -1 \geq 2a + b \geq -2 \quad (1) \\ \frac{2a}{3} + b \geq 2 ; \quad (2) \end{cases}$$

$\times \frac{13}{2{,}5}$ 65 26 $32{,}5$



$\times \frac{13}{12}$ 26 13 156 15 6 $|\,5$ $31{,}2$

1) $-1 \geq 2a + \frac{2a}{3} - 2 \geq -2 \quad | +2$

$1 \geq \frac{8a}{3} \geq 0 \quad | \cdot \frac{3}{8}$

$\boxed{\frac{3}{8} \geq a \geq 0}$

2) $\frac{2a}{3} + \frac{2a}{3} - 2 \geq 2$

$\frac{4a}{3} \geq 4$

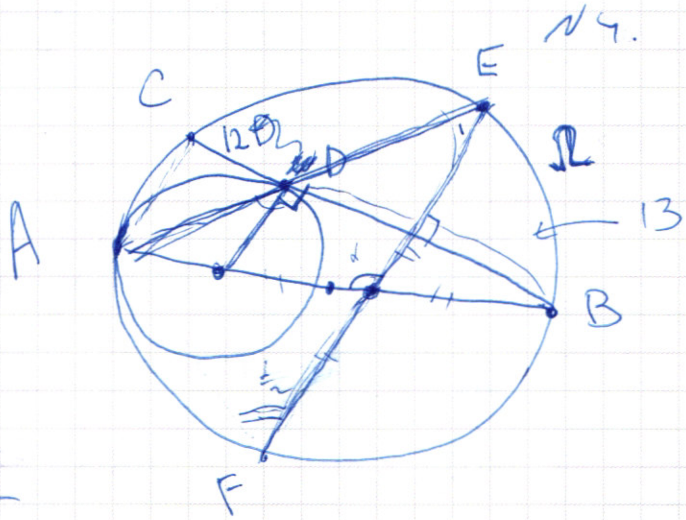
$\boxed{a \geq 3}$

$R = \frac{25}{24} r$

$\times \frac{125}{13}$ 375 125 1625

$\cos 2\alpha = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 2\cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1$

№4.



$\times \frac{13}{8}$ 104

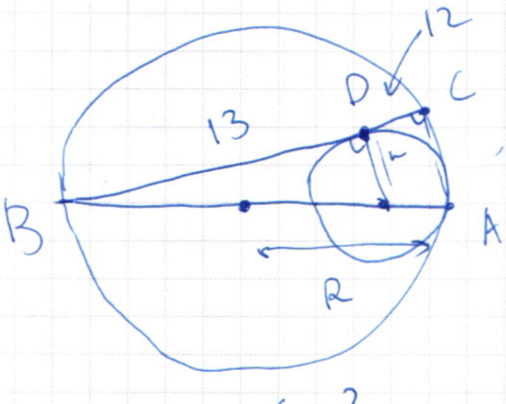
$BD^2 = r^2 + (2R - r)^2 =$

$= \boxed{\cancel{2r^2 + 4R^2 - 4Rr}}$

$169 = 2r^2 + 4R^2 - 4Rr =$

$\frac{BD}{2R - r} = \frac{DC}{r}$

$$\begin{cases} 169 = r^2 + (2R - r)^2 \\ 13 \cdot r = 12(2R - r) \end{cases}$$



$\frac{13}{12} r = 2R - r$

$2R = \frac{13}{12} r + r$

$169 = r^2 + \left(\frac{13}{12} r + r - r\right)^2 =$

$= 169 = r^2 + \left(\frac{13}{12}\right)^2 \cdot r^2$

$r^2 \left(\frac{144 + 169}{144}\right) = 169 ; \quad r^2 = \frac{169 \cdot 144}{313}$

$+\frac{169}{144}$ 313

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2(\alpha+\beta)) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin(2(\alpha+2\beta)) + \sin(2\alpha) = -\frac{2}{17}$

$\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\beta}{2}\right) + \cancel{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)} +$

$+ \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\beta}{2}\right) - \cancel{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)} =$

$= 2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)$

$\cancel{\frac{x+y}{2} = 2(\alpha+2\beta)}$

$$\begin{cases} x+y = 2(\alpha+2\beta) = 2\alpha+4\beta \\ x-y = 2\alpha = 2\alpha \end{cases}$$

$x = 2\alpha+2\beta; \quad y = 2\beta$

$2\cdot\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos(2\beta) = -\frac{2}{17}$

$-\frac{1}{\sqrt{17}}\cdot\cos(2\beta) = -\frac{1}{17}; \quad \boxed{\cos(2\beta) = \frac{1}{\sqrt{17}}}$

$\sin(2\alpha)\cdot\cos(2\beta) + \sin(2\beta)\cdot\cos(2\alpha) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$\cos(2\beta) = \cancel{\frac{1-2\cos^2\beta}{2}}$; $\cos^2\beta - \sin^2\beta = 2\cos^2\beta - 1$

$\cos^2\beta = \frac{\cos(2\beta)+1}{2}$

$2\cdot\sin(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha+\beta) = 2(\sin\alpha\cdot\cos\beta + \sin(\beta)\cdot\cos\alpha)\cdot$

$\cdot(\cos(\alpha)\cdot\cos(\beta) - \sin(\alpha)\cdot\sin\beta) = -\frac{2}{\sqrt{17}}$ $: \cos^2\beta$

$2\cdot(\sin\alpha + tg(\beta)\cdot\cos\alpha)(\cos\alpha - \sin\alpha\cdot tg\beta) = -\frac{2}{\sqrt{17}\cdot\cos^2\beta}$

$tg\beta = \frac{\sin\beta}{\cancel{\cos(\beta)}}$ $=$

№2

$$\begin{cases}(y-6x)^2 = xy - 6x - y + 6 = x(y-6) - (y-6) = (y-6)(x-1)\\ y - 6x \geq 0\\ 9x^2 + y^2 - 18x - 12y - 45 = 0\end{cases}$$

$\cancel{D = 2^2\cdot 9^2 -}$ $\quad (3x)^2 - 2\cdot 3x\cdot 3$

$y^2 - 12y + 36$; $\quad 9x^2 - 18x + 9$

$$\begin{cases}(y-6)^2 + (3x-3)^2 = 90\\ y - 6x \geq 0\\ (y-6x)^2 = (y-6)(x-1)\end{cases}$$

$\frac{8-12}{6-2} = -\frac{4}{4} = -1$

$8 - 6x = 0$

$x = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$

$(y-6)^2 - (y-6x)^2 + (y-6)(x-1) + 9(x-1)^2 = 90$

$(6x-6)(2y-6-6x) + (y-6)(x-1) + 9(x-1)^2 = 90$

$6(x-1)(2y - 6(x+1)) + \cancel{y-6}$ $\quad (x-1)(y-6+9x-9)$

$(x-1)(12y - 36x - 36 + y - 6 + 9x - 9) = 90$

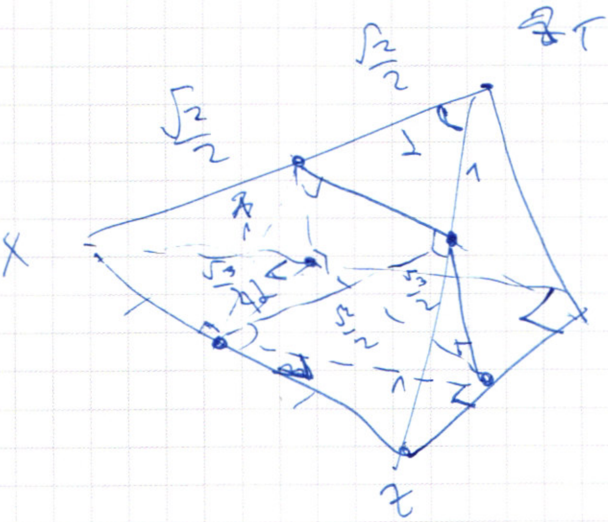
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

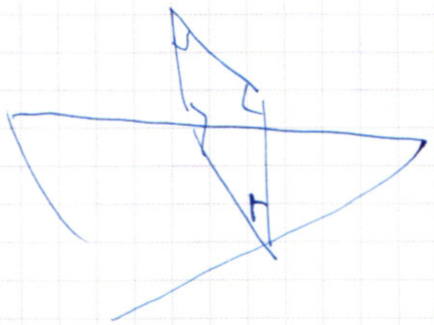
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

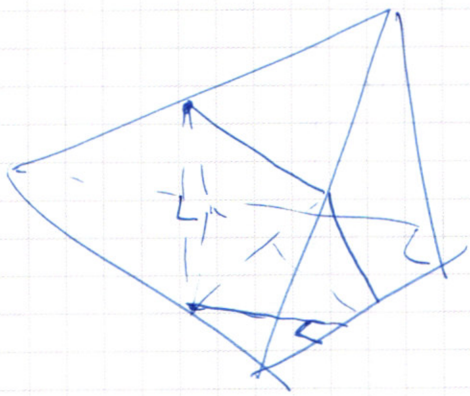
ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА







t

$$26x - x^2 > 0$$

$$(26x - x^2)^{\log_5 12} + 26x \geq x^2 + 13^{\log_5(26x - x^2)}$$

$$(26x - x^2)^{\log_5 12} + (26x - x^2) \geq 13^{\log_5(26x - x^2)}$$

$$t^{\log_5 12} + t \geq 13^{\log_5 t} \qquad t > 0$$

$$\cancel{\log_5 t^{\log_5 12} + t \geq \log_5 13 \cdot \log_5 t}$$

$$\log_5 12 + 1 \qquad \cancel{13^{\log_5 t}} \quad \left(5^{\log_5 13}\right)^{\log_5 t}$$

$$t^{\log_5 12} + t \geq t^{\log_5 13} \quad \cancel{\geq \log_5 13}$$

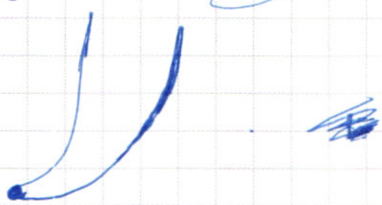
☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$\cancel{\log_5 12 - \log_5 5 = \log_5 \frac{12}{5}}$



$\log_5 12 \cdot t^{\log_5 \frac{12}{5}} + 1 \geq \log_5 13 \cdot t^{\log_5 \frac{13}{5}}$

$0 \qquad 1 \geq 0$ верно

$\cancel{\log_5 12 \cdot \log_5 \frac{12}{5} \cdot t^{\log_5 \frac{12}{25}} \geq \log_5 13 \cdot \log_5 \frac{13}{5} \cdot t^{\log_5 \frac{13}{25}}}$

$t^{\log_5 12} + t = t^{\log_5 13}$

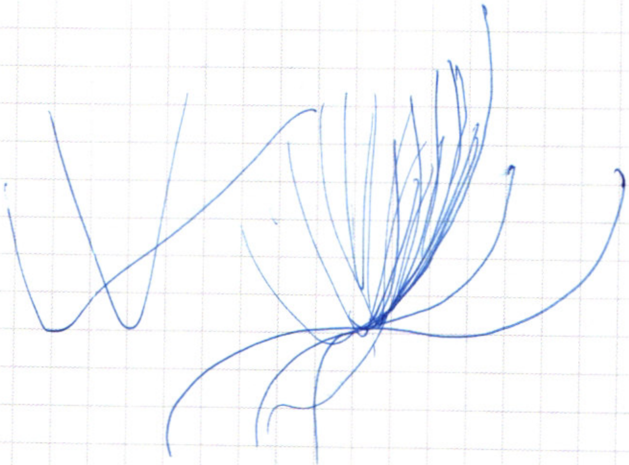
$5^{\log_5 12 \cdot \frac{1}{2}} + \sqrt{5} = 13^{\frac{1}{2}}$

$\cancel{\sqrt{12} + \sqrt{5} > \sqrt{13}}$

$\cancel{12 + 5 \leq}$

$25^{\log_5 12 \cdot 2} + 25 = 25^{\log_5 13 \cdot 2}$

$12^2 + 25 = 13^2$



☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)