МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФР ______________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{8}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases}3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2},\\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4.\end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x\geqslant|x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{5}{2}$, $BD=\frac{13}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $3\leqslant x\leqslant 27$, $3\leqslant y\leqslant 27$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{4x-3}{2x-2}\geqslant ax+b\geqslant 8x^2-34x+30$$

выполнено для всех x на промежутке $(1;3]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $PQRS$, вершина P которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра PQ. Известно, что $QR=2$, $QS=1$, $PS=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра RS. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3. $3^{\log_4(x^2+6x)}+6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2$

Запишем ограничения, при которых определён логарифм

$x^2+6x>0 \iff x(x+6)>0 \iff \left[\begin{array}{l} x<-6 \\ x>0 \end{array}\right. \iff x\in(-\infty;-6)\cup(0;+\infty)$

$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2$

Т.к. $x^2+6x>0$, то $|x^2+6x|=x^2+6x$

$3^{\log_4(x^2+6x)}+x^2+6x \geq \cancel{x^2+6x}\ (x^2+6x)^{\log_4 5}$

Сделаем замену: $x^2+6x=t$, так что $t>0$

$3^{\log_4 t}+t \geq t^{\log_4 5}$

$t=4^{\log_4 t}$, $t^{\log_4 5}=5^{\log_5 t\cdot\log_4 5}=5^{\log_4 t}$

Неравенство принимает вид: $3^{\log_4 t}+4^{\log_4 t}\geq 5^{\log_4 t}$

Сделаем замену: $\log_4 t=y \implies 3^y+4^y\geq 5^y$

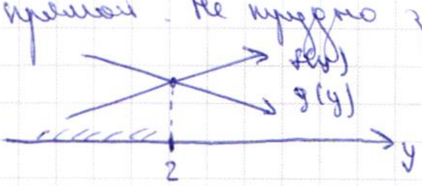
Разделим обе части неравенства на величину 4^y, которая положительна

$\left(\frac{3}{4}\right)^y+1\geq\left(\frac{5}{4}\right)^y$

$g(y)=\left(\frac{3}{4}\right)^y+1$ Функция $g(y)$ убывает на всей области определения по свойству показательной функции.

$f(y)=\left(\frac{5}{4}\right)^y$ Функция $f(y)$ возрастает на всей области определения по свойству показательной функции.

Функции $f(y)$ и $g(y)$ пересекаются только в одной точке на числовой прямой. Не трудно заметить, что это значение $y=2$

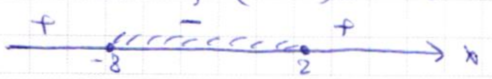


Условию $g(y)\geq f(y)$ удовлетворяют $y\leq 2$

Значит, $\log_4 t\leq 2$; Откуда $t\leq 16$

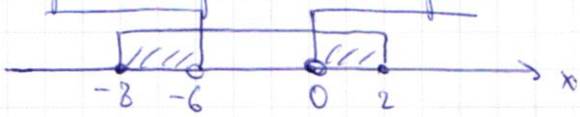
А тогда $x^2+6x\leq 16$, $x^2+6x-16\leq 0$, $(x+8)(x-2)\leq 0$

По методу интервалов:



$-8 \le x \le 2$

Пересечём решения с ограничениями



Решению удовлетворяют:

$$\left[\begin{array}{l} -8 \le x < -6 \\ 0 < x \le 2 \end{array}\right.$$

Ответ: $x \in [-8; -6) \cup (0; 2]$

(2) $$\begin{cases} 3y - 2x = \sqrt{3xy - 2x - 3y + 2} & (1) \\ 3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 4 & (2) \end{cases}$$

(2) Рассмотрим второе уравнение системы

$$3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 4$$

$$3(x^2 - 2x) + 3\left(y^2 - \frac{4}{3}y\right) = 4$$

$$3(x^2 - 2x + 1 - 1) + 3\left(y^2 - \frac{4}{3}y + \frac{4}{9} - \frac{4}{9}\right) = 4$$

$$3(x-1)^2 - 3 + 3\left(y - \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{4}{3} = 4$$

$$3(x-1)^2 + 3\left(y - \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{25}{3}$$

$$(x-1)^2 + \left(y - \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{25}{9}$$

(1) Рассмотрим первое уравнение системы

$$3y - 2x = \sqrt{3xy - 2x - 3y + 2}$$

$$9y^2 - 12xy + 4x^2 = 3xy - 2x - 3y + 2$$ (при условии, что $3y - 2x \ge 0$)

$$4x^2 - 15xy + 2x + 9y^2 + 3y - 2 = 0$$

$$4x^2 - (15y - 2)x + 9y^2 + 3y - 2 = 0$$

Решим уравнение относительно x

$$D = (15y-2)^2 - 16(9y^2 + 3y - 2) = 225y^2 - 60y + 4 - 144y^2 - 48y + 32 =$$

$$= 81y^2 - 108y + 36 = (9y - 6)^2$$

$$x_1 = \frac{15y - 2 - 9y + 6}{8} = \frac{6y + 4}{8} = \frac{3y + 2}{4}$$ Откуда $y_1 = \frac{4x - 2}{3}$

$$x_2 = \frac{15y - 2 + 9y - 6}{8} = \frac{24y - 8}{8} = 3y - 1$$ Откуда $y_2 = \frac{x + 1}{3}$

Система принимает вид

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} y = \frac{4x-2}{3} \\ y = \frac{x+1}{3} \end{array}\right. \\ (x-1)^2 + \left(y - \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{25}{9} \\ 3y - 2x \ge 0 \end{cases}$$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) $y = \frac{4x-2}{3}$

Тогда $(x-1)^2 + \left(\frac{4x-2}{3} - \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{25}{9}$

$(x-1)^2 + \left(\frac{4}{3}(x-1)\right)^2 = \frac{25}{9}$

$(x-1)^2 + \frac{16}{9}(x-1)^2 = \frac{25}{9}$

$\frac{25}{9}(x-1)^2 = \frac{25}{9}$

$(x-1)^2 = 1$

$\left[\begin{array}{l} x_1 = 0 \Rightarrow y_1 = -\frac{2}{3} \\ x_2 = 2 \Rightarrow y_2 = 2 \end{array}\right.$ Решением явл. пары чисел $(0; -\frac{2}{3})$, $(2; 2)$

Проверим удовлетворяют ли они ограничениям:

$(0; -\frac{2}{3})$: $\cancel{3\cdot 0 - 2(-\frac{2}{3}) = \frac{4}{3} \geq 0}$ $3(-\frac{2}{3}) - 2\cdot 0 = -2 \leq 0$ не удовл. огран.

$(2; 2)$: $3\cdot 2 - 2\cdot 2 = 2 \geq 0$

2) $y = \frac{x+1}{3}$ Тогда $(x-1)^2 + \left(\frac{x+1}{3} - \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{25}{9}$

$(x-1)^2 + \left(\frac{x-1}{3}\right)^2 = \frac{25}{9}$

$(x-1)^2 + \frac{1}{9}(x-1)^2 = \frac{25}{9}$

$\frac{10}{9}(x-1)^2 = \frac{25}{9}$

$(x-1)^2 = 2,5$

$x^2 - 2x + 1 = 2,5$

$x^2 - 2x - 1,5 = 0$

Откуда

$x_1 = \frac{2 - \sqrt{10}}{2} = 1 - \frac{\sqrt{10}}{2}$

$x_2 = 1 + \frac{\sqrt{10}}{2}$

$y_1 = \frac{1 - \frac{\sqrt{10}}{2} + 1}{3} = \frac{2}{3} - \frac{\sqrt{10}}{2}$ $x_2 = \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{10}}{2}$

Решение - пары чисел $\left(1 - \frac{\sqrt{10}}{2}; \frac{2}{3} - \frac{\sqrt{10}}{2}\right)$ и $\left(1 + \frac{\sqrt{10}}{2}; \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{10}}{2}\right)$

Первая пара не удовл. ограничениям, вторая - удовлетворяет

Ответ: $\cancel{(0; -\frac{2}{3})}$ $(2; 2)$, $\left(1 + \frac{\sqrt{10}}{2}; \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{10}}{2}\right)$.

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

1. $\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{8}{17} \end{cases}$

Сделаем следующие замены: $\begin{cases} x = 2\alpha \\ y = 2\beta \end{cases}$

$\begin{cases} \sin(x+y) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \sin(x+2y)+\sin x = -\frac{8}{17} \end{cases}$

Рассмотрим второе уравнение: $\sin(x+2y)+\sin x = -\frac{8}{17}$

$\sin x\cos 2y+\sin 2y\cos x+\sin x = \sin x(\cos^2 y-\sin^2 y)+2\sin y\cos y\cos x+$
$+\sin x = \sin x(\cos^2 y-\sin^2 y+1)+2\sin y\cos y\cos x = \sin x(\cos^2 y-$
$-\sin^2 y+\cos^2 y+\sin^2 y)+2\sin y\cos y\cos x = 2\sin x\cos^2 y+2\sin y\cos y\cos x =$
$= 2\cos y(\sin x\cos y+\sin y\cos x) = 2\cos y\sin(x+y)$

$2\cos y\sin(x+y) = -\frac{8}{17}$

$2\cos y\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right) = -\frac{8}{17}$

$\cos y = \frac{4}{\sqrt{17}}$

$\sin(x+2y)+\sin x = \sin((x+y)+y)+\sin x = \sin(x+y)\cos y+\sin y\cdot$
$\cdot\cos(x+y)+\sin x = -\frac{4}{17}+\sin x+\cos(x+y)\sin y = -\frac{8}{17}$

~~$\sin x+\cos(x+y) = -\frac{4}{17}$~~ $\sin x+\cos(x+y)\sin y = -\frac{4}{17}$

$\begin{cases} \cos(x+y) = \pm\frac{4}{\sqrt{17}} \\ \sin(y) = \pm\frac{1}{\sqrt{17}} \end{cases} \Longrightarrow \sin y\cdot\cos(x+y) = \pm\frac{4}{17}$

Тогда 1) $\sin x = 0$

2) $\sin x = -\frac{8}{17}$

При $\sin x = 0$: $\sin x = 2\sin\alpha\cos\alpha = 0$

т.к. $\operatorname{tg}\alpha$ – определён, то $\cos\alpha \neq 0$. А значит $\sin\alpha = 0$. Следовательно $\operatorname{tg}\alpha = 0$.

При $\sin x = -\frac{8}{17}$: $\sin\alpha\cos\alpha = -\frac{4}{17}$

$\sin\alpha\sqrt{1-\sin^2\alpha} = -\frac{4}{17}$, $\sin\alpha < 0$

$\sin^2\alpha-\sin^4\alpha = \frac{16}{289}$

$\sin^4\alpha-\sin^2\alpha+\frac{16}{289} = 0$

☐ черновик ☑ чистовик Страница № 4

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin x = \frac{12}{17}$

$\sin\alpha\cos\alpha = \frac{6}{17}$

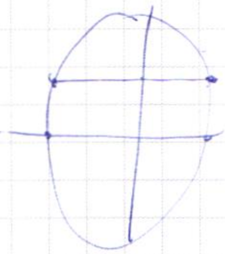
$tg\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$\sin 2\alpha = \frac{12}{17}$

$\cos\alpha = \frac{6}{17\sin\alpha}$

$2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{12}{17}$

$tg\,\alpha = \frac{17}{6}\sin^2\alpha$



$\sin\alpha = 0$

$\sin\alpha$

$2\sin\alpha\cos\alpha = 0$

$\sin\alpha =$

$\sin x = 0$

$tg\,\alpha = 0$

$tg\,\alpha = 0$

$\sin x = -\frac{2}{17}$

$2\sin\alpha\cos\alpha = -\frac{4}{17}$

$tg\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{17}{4}\sin^2\alpha$

$\cos\alpha = -\frac{4}{17\sin\alpha}$

$\sin x$

~~$\sin x\cos y$~~ $\sin(x+y) = \sin x\cos y + \sin y\cos x = \frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin\alpha\cos\alpha = -\frac{4}{17}$

$\sin^4\alpha - \sin^2\alpha + \frac{16}{289} = 0$

$\sin\alpha\sqrt{1+\sin^2\alpha} = \frac{16}{17^2}$

$D = 1 - \frac{64}{289} = \frac{225}{289} = \pm\frac{15}{17}$

$\sin^2\alpha - \sin^4\alpha = \frac{16}{289}$

$\frac{1 \pm \frac{15}{17}}{2} =$

$\sin\alpha$

1) $-\frac{2}{34}$; 2) $\frac{16}{17}$

$-\frac{1}{17}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$D = 1 - \frac{64}{289} = \frac{225}{289} = \left(\frac{15}{17}\right)^2$

$$\left[\begin{array}{l} \sin^2\alpha = \dfrac{1-\frac{15}{17}}{2} = \dfrac{1}{17} \\ \sin^2\alpha = \dfrac{1+\frac{15}{17}}{2} = \dfrac{16}{17} \end{array}\right. \Longrightarrow \begin{array}{l} 1)\ \sin\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}} \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{-4/17}{-1/\sqrt{17}} = \dfrac{4}{\sqrt{17}} \\ 2)\ \sin\alpha = -\frac{4}{\sqrt{17}} \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{-4/17}{-4/\sqrt{17}} = \dfrac{1}{\sqrt{17}} \end{array}$$

1) $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{-\frac{1}{\sqrt{17}}}{\frac{4}{\sqrt{17}}} = -\frac{1}{4}$ 2) $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{-4/\sqrt{17}}{1/\sqrt{17}} = -4$

Ответ: $-4;\ -\frac{1}{4};\ 0.$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$3y - 2x = \sqrt{3xy - 2x - 3y + 2}$

$3y(x-1) - 2(x-1)$

$(x-1)(3y-2)$

$9y^2 + 4x^2 - 12xy = 3xy - 2x - 3y + 2$

$\frac{15y - 2 \pm (9y-6)}{2} =$

$x_1 = \frac{15y - 2 - 9y + 6}{2} = \frac{6y+4}{2} = 3y + 2$

$x_2 = \frac{15y - 2 + 9y - 6}{2} = \frac{24y - 8}{2} = 12y - 4$

$4x^2 - 15xy + 2x + 9y^2 + 3y - 2 = 0$

$4x^2 - (15y - 2)x + 9y^2 + 3y - 2 = 0$

$D = (15y-2)^2 - 16(9y^2 + 3y - 2) =$

$= 225y^2 - 60y + 4 - 144y^2 - 48y + 32 =$

$= 81y^2 - 108y + 36 =$

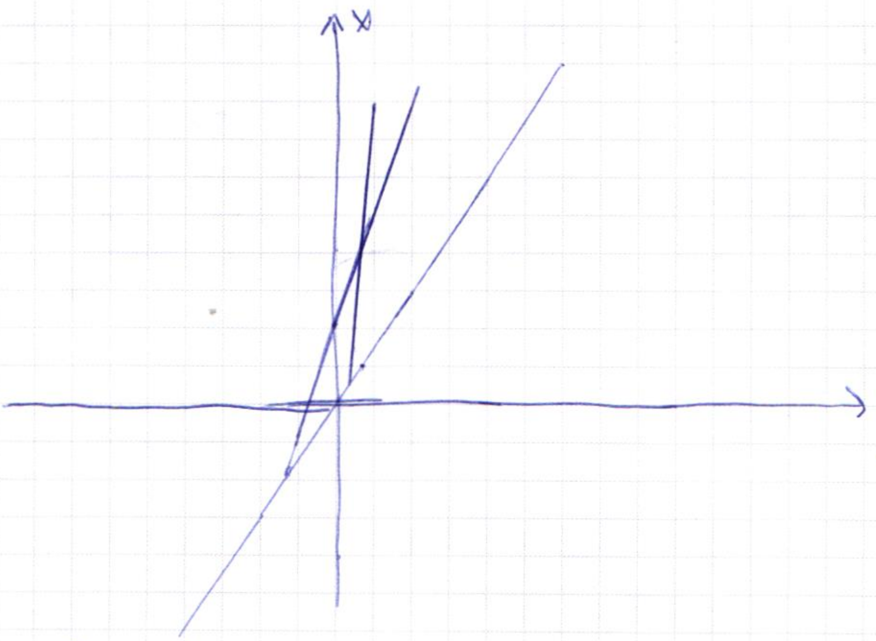
$= (9y - 6)^2$

$x = 3y + 2$

$x = 12y - 4$

$y = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$

$y = \frac{1}{12}x$



$(12y - 5)^2$

$3y - 2x \geq 0$

$x \leq \frac{3}{2}y$

$(x-1)^2 + (y - \frac{2}{3})^2 = \frac{25}{9}$

$(3y+1)^2 + (y - \frac{2}{3})^2 = \frac{25}{9}$

$9y^2 + 6y + 1 + y^2 - \frac{4}{3}y + \frac{4}{9} = \frac{25}{9}$

$10y^2 + \frac{14}{3}y = \frac{12}{9}$

$90y^2 + 52y - 12 = 0$

$45y^2 + 26y - 6 = 0$

$D = 26^2 + 24 \cdot 45$

$3y - 2x \geq 0$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

1) $\begin{cases}\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}}\\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{8}{17}\end{cases}$ $\quad tg\,\alpha-?$ $\quad \begin{cases}2\alpha=x\\ 2\beta=y\end{cases}$ $\quad \begin{cases}\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}}\\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{8}{17}\end{cases}$

$\sin 2\alpha\cos 2\beta+\sin 2\beta\cos 2\alpha=-\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\begin{cases}\sin(x+y)=-\frac{1}{\sqrt{17}}\\ \sin(x+2y)+\sin x=-\frac{8}{17}\end{cases}$ $\quad \cos(x+y)=\pm\frac{4}{\sqrt{17}}$

$\sin(x+y+y)$

$\sin(x+y)\cos y+\cos(x+y)\sin y+\sin x=-\frac{8}{17}$

$\frac{1}{\sqrt{17}}\cos y\pm\frac{4}{\sqrt{17}}\sin y=-\frac{8}{17}$ $\qquad$ 1) $\frac{1}{\sqrt{17}}\cos y-\frac{4}{\sqrt{17}}\sin y=-\frac{8}{17}\quad\Big|\cdot\frac{17}{8}$

$\cancel{\cos y\pm\sin y=-\frac{8}{\sqrt{17}}}$ $\qquad \frac{\sqrt{17}}{8}\cos y-\frac{\sqrt{17}}{2}\sin y=-1$

$\cancel{\sin x\cos 2y+\cos x\sin 2y+\sin x=-\frac{8}{17}}$ $\qquad \frac{\sqrt{17}}{2}\sin y-\frac{\sqrt{17}}{8}\cos y=1$

$\cancel{\sin x\cos y+\cos x\sin y=-\frac{1}{\sqrt{17}}}$ $\qquad \cos y=0$

$\cancel{\sin x(\cos^2 x-\sin^2 x)+2\sin x\cos^2 x+\sin x}$

$\cancel{-\sin^3 x+3\sin x\cos^2 x+\sin x=-\frac{8}{17}}$

$\cancel{-\sin^3 x+3\sin x(1-\sin^2 x)+\sin x=-\sin^3 x+3\sin x-3\sin^3 x+\sin x=-\frac{8}{17}}$

$\cancel{-4\sin^3 x+4\sin x=-\frac{8}{17}}$

$\cancel{\sin^3 x+3\sin^2 x-4\sin x=\frac{8}{17}}$ $\qquad \cancel{4\sin^3 x-4\sin x=\frac{8}{17}}$

$\cancel{\sin x(\sin^2 x+3\sin x\ldots)}$ $\qquad \cancel{4\sin x(\sin^2 x-1)=\frac{8}{17}}$

$\cancel{4\sin^3 x-4\sin x-\frac{8}{17}=0}$

$\cancel{\sin^3 x-\sin x-\frac{2}{17}=0}$

$\begin{cases}\sin(x+y)=-\frac{1}{\sqrt{17}}\\ \sin(x+2y)+\sin x=\frac{8}{17}\end{cases}$ $\qquad \sin x\cos 2y+\cos x\sin 2y+\sin x=$

$=\sin x(\cos^2 y-\sin^2 y)+\cos x\,2\sin y\cos y+$

$+\sin x=$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2) $\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2} \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \end{cases}$

$3y-2x\geq 0 \qquad y\geq \frac{2}{3}x$

$9y^2-12yx+4x^2=3xy-2x-3y+2$

$4x^2+2x+9y^2+3y-15xy-2=0$

$(2x)^2+2x+(3y)^2+3y-15xy-2=0$

$3x^2+3y^2-6x-4y=4$

$3x^2-6x+3y^2-4y+4=0$

$D=36-12(3y^2-4y+4)$

$3(x^2-2x)+(3y^2-4y)=4$

$3(x^2-2x+1-1)+3(y^2-\frac{4}{3}y)=4$

$3(x-1)^2-3+3(y^2-\frac{4}{3}y+\frac{4}{9}-\frac{4}{9})=4$

$3(x-1)^2+3(y-\frac{2}{3})^2-\frac{4}{3}=7$

$3(x-1)^2+3(y-\frac{2}{3})^2=\frac{25}{3}$

$(x-1)^2+(y-\frac{2}{3})^2=\frac{25}{9}$

$(1;\frac{2}{3}) \quad R=\frac{5}{3}$

$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2} \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \end{cases}$

$\cancel{3x(x+2)}$

$3y(x-1)-2(x-1)$

$(x-1)(3y-2)$

$4x^2+2x+9y^2+3y-15xy=2$

$4(x^2+\frac{1}{2}x)+9(y^2+\frac{1}{3}y)-15xy=2$

$4(x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4})+9(y^2+\frac{1}{3}y+\frac{1}{9}-\frac{1}{9})-15xy=2$

$4(x+\frac{1}{2})^2-1+9(y+\frac{1}{3})^2-1-15xy=2$

$4(x+\frac{1}{2})^2+9(y+\frac{1}{3})^2=15xy+4$

$3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2}$

$\cancel{x(3y-2)-(3y-2)}$

$\cancel{(3y-2x)^2=(x-1)(3y-2)}$

$3y-2x\geq 0 \quad y\geq\frac{2}{3}x$

$3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2}$

$9y^2+4x^2-12xy=3xy-2x-3y+2$

$(2x)^2+2x+(3y)^2+3y-15xy=2$

$\cancel{2x+1}\ (2x)^2+4x+(3y)^2+6y=2x+3y+15xy+2$

$(2x+1)^2+(3y+1)^2=2x+3y+4+15xy$

$4(x+\frac{1}{2})^2+9(y+\frac{1}{3})^2$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

3) $3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5} - x^2$

огранич. $x^2+6x>0$ $\quad \begin{cases} x>0 \\ x<-6 \end{cases}$

$x(x+6)>0$

$3^{\log_4(x^2+6x)} \cancel{+6x} + x^2+6x \geq (x^2+6x)^{\log_4 5}$

$x^2+6x = t$, $t>0$

$3^{\log_4 t} + t \geq t^{\log_4 5}$ $\qquad 3^{\log_4 t} + 4^{\log_4 t} \geq 5^{\log_4 t}$

$t^{\log_4 5} = 4^{\log_4 t \cdot \log_4 5} = 5^{\log_4 t}$ $\qquad 3^y + 4^y \geq 5^y$

$3^{\log_4 t} = t^{\log_t 3 \log_4 t} = t^{\log_4 3}$ $\qquad \left(\frac{3}{4}\right)^y + 1 \geq \left(\frac{5}{4}\right)^y$

$t^{\log_4 3} + t \geq t^{\log_4 5}$

$y \leq 2$

$\log_4 t \leq 2$

$t \leq 16$ $\qquad (x+8)(x-2) \leq 0$

$x^2+6x \leq 16$ $\qquad -8 \leq x \leq 2$

$x^2+6x \leq 16$ $\qquad x \in [-8;-6) \cup (0;2]$

$x^2+6x-16 \leq 0$ $\qquad -8 \; -6 \; 0 \; 2$

$4x^2+9y^2-12xy = 3xy - 2x - 3y + 2$ $\qquad 4\left(x+\frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{4} + 9\left(y+\frac{1}{6}\right)^2 - \frac{1}{4} = 15xy+2$

$4x^2+2x+9y^2+3y = 15xy+2$ $\qquad 4\left(x+\frac{1}{4}\right)^2 + 9\left(y-\frac{1}{6}\right)^2 = 15xy + 2,5$

$4\left(x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{16}-\frac{1}{16}\right) + 9\left(y^2+\frac{1}{3}y+\frac{1}{36}-\frac{1}{36}\right) = 15xy+2$

~~$4\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - 1 + 9\left(y+\frac{1}{3}\right)^2$~~

$\frac{4x-3}{2x-2} \geq ax+b \geq 8x^2-34x+30$ $\quad [1;3]$ $\qquad 8x^2-34x+30=0$

$D = 34^2 - 120 \cdot 8 = 196$

$\frac{4x-4}{2x-2} + \frac{1}{2x-2}$ $\qquad \frac{34 \pm 14}{16} = \frac{5}{4} ; 3$

$2 + \frac{1}{2(x-1)} \geq ax+b \geq 8\left(x-\frac{5}{4}\right)(x-3)$ $\qquad 8\left(x-\frac{5}{4}\right)(x-3)$

$(8x-10)(x-3)$

$f(x) = 2 + \frac{1}{2(x-1)}$ $\qquad x_0 = \frac{34}{16} = \frac{17}{8}$

$y_0 = \left(\frac{17^2}{8^2} \cdot 8 - \frac{34 \cdot 17}{8} + 30\right) =$

$= 2312 \left(289\left(8 - \frac{7}{8}\right) + 30 = \right.$

$= 289 \cdot \frac{32}{4} + 30$

$34 \cdot 34 = 1156$; $1156 - 960 = 196$; $120 \cdot 8 = 960$; $289 \cdot 8 = 2312$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\begin{cases} x = 3y+2 \\ x = 12y-4 \end{cases}$

$(x-1)^2+(y-\frac{2}{3})^2=(\frac{5}{3})^2$

$3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2}$

$(x-1)^2+(y-\frac{2}{3})^2=\frac{25}{9}$

$9y^2-12xy+4y^2=3xy-2x-3y+2 \qquad 3y-2x\geq 0$

$\cancel{4x^2-12xy+2x}$

$4x^2-15xy+2x+9y^2+3y-2=0$

$4x^2-(15y-2)x+9y^2+3y-2=0$

$D=(15y-2)^2-16(9y^2+3y-2)=225y^2-60y+4-144y^2-48y+32=$

$=81y^2-108y+36=(9y-6)^2$

$x_1=\frac{15y-2-9y+6}{8}=\frac{6y+4}{8} \qquad 8x=6y+4 \qquad y=\frac{8x-4}{6}=\frac{4x-2}{3}$

$x_2=\frac{15y-2+9y-6}{8}=\frac{24y-8}{8}=3y-1 \qquad y=\frac{x+1}{3}$

$y=\frac{x+1}{3}$

$y=\frac{4x-2}{3}$

$(x-1)^2+(\frac{x+1}{3}-\frac{2}{3})^2=\frac{25}{9}$

$x^2-2x+1+\frac{x^2-2x+1}{9}=\frac{25}{9}$

$\frac{10}{9}(x^2-2x+1)=\frac{25}{9}$

$x^2-2x+1=2,5$

$x^2-2x-1,5=0$

$D=4+6=10$

$\frac{2\pm\sqrt{10}}{2}=1\pm\frac{\sqrt{10}}{2}$

$(x-1)^2+(\frac{4x-2}{3}-\frac{2}{3})^2=\frac{25}{9}$

$\cancel{x^2-2x+1}+\frac{16(x-1)^2}{9}$

$\frac{25}{9}(x-1)^2=1$

$x-1=\pm1$

$x=0 \qquad y=-\frac{2}{3}$

$x=2 \qquad y=2$

$x^2-2x-1,5=0$

$D=4+4\cdot1,5=10$

$\frac{2\pm\sqrt{10}}{2}$

$\frac{4x-2-2}{3}=\frac{4x-4}{3}$

$\frac{x+1-2}{3}=\frac{x-1}{3}$

$x_1=1-\frac{\sqrt{10}}{2}$

$y_1=-\frac{\sqrt{10}}{6} \qquad y_2$

$\sin x+\sin(x+y)=\sin y\ldots$

$\sin y(\cos x\cos y+\sin x\sin y)+\sin x=\sin y\cos x\ldots$

$\frac{\sqrt{7}}{4}=-\frac{2}{\ldots}$

$\sin y\cos(x+y)+\sin x=-\frac{2}{\ldots}$

$\sin(x+y)(\cos(x+y)+\sin y\cos(x+y))+\sin x=-\frac{2}{\ldots}$

$(\sin x\cos y)$

$\cos y=\frac{\sqrt{7}}{4}$

$\sin y=\pm\frac{3}{4}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17} \end{cases}$$

$tg\,\alpha - ?$

$2\alpha = x$
$2\beta = y$

$$\begin{cases} \sin(x+y) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \sin(x+2y) + \sin x = -\frac{8}{17} \end{cases}$$

$\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} - ?$

$\cos(x+y) = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}$

$\sin(x+y)\cos y + \sin y\cos(x+y) + \sin x = \frac{8}{17}$

1) $\cos(x+y) = -\frac{4}{\sqrt{17}}$ $\quad \frac{1}{\sqrt{17}}\cos y - \frac{4}{\sqrt{17}}\sin y + \sin x = \frac{8}{17}$

$\sin x\cos y + \sin y\cos x = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\cancel{tg\,x + tg\,y = \frac{1}{\sqrt{17}\cos x\cos y}}$

$$\begin{cases} \sin(x+y) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \sin(x+2y) + \sin x = -\frac{8}{17} \end{cases}$$

$\cancel{\cos(x+y)}$ $\quad \cos(x+y) = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}$

$tg\,x = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{\cos x}\right)$

1) $\sin(x+y) = \frac{1}{\sqrt{17}}$ $\quad \sin x\cos y + \cos x\sin y$

$\cos(x+y) = \frac{4}{\sqrt{17}}$ $\quad \cos x\cos y + \sin x\sin y$

$tg\,x = -\frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{\cos x}\right)$

$x = \frac{5}{3}$

$\sin x\cos 2y + \sin 2y\cos x + \sin x$

$\sin x(\cos^2 y - \sin^2 y) + 2\sin y\cos y\cos x + \sin x =$

$= \sin x(\cos^2 y - \sin^2 y + 1) + 2\sin y\cos y\cos x = 2\sin x\cos^2 y + 2\sin y\cos y\cos x =$

$= 2\cos y(\sin x\cos y + \sin y\cos x) = 2\cos y\sin(x+y) = -\frac{8}{17}$

$2\cos y = \frac{8}{\sqrt{17}}$ $\quad \cos y = \frac{4}{\sqrt{17}}$ $\quad \sin y = \pm\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin x\cos y + \sin y\cos x = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\quad$ a) $\sin y = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\frac{4}{\sqrt{17}}\sin x - \frac{1}{\sqrt{17}}\cos x = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\quad |\cdot\sqrt{17}$

$4\sin x - \cos x = -1$

$\cos x = 4\sin x + 1$

$\sin x = \frac{\cos x - 1}{4}$

$tg\,x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{4}\cdot\frac{\cos x - 1}{\cos x} = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{\cos x}\right)$

$4\sin x + \cos x = -1$

$\sin x = \frac{-\cos x - 1}{4}$

$tg\,x = \frac{1}{4}\cdot\frac{-\cos x - 1}{\cos x} = -\frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{\cos x}\right)$

$\sin x\cos y + \sin y\cos x = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)