МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 6

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - \sqrt[3]{64y^2 - x^2} = 124, \\ 8y - \sqrt[3]{64y^2 - x^2} = -92. \end{cases}$$

2. [4 балла] Решите неравенство

$$\sqrt{\log_{2x^3} x^9} \leqslant \log_{2x} \frac{1}{x^3}.$$

3. [5 баллов] Найдите количество семизначных чисел, обладающих следующим свойством: сумма остатков от деления числа на некоторые три последовательные степени числа десять равна 12414.

4. [5 баллов] Даны равнобокая трапеция $ABCD$ (AD и BC – основания, $AD > BC$) и окружность ω с центром C, касающаяся стороны AD. Касательные к ω, проведённые из точки B, пересекают прямую AD в точках P и Q (точка P лежит между Q и D). На продолжении стороны CB за точку B выбрана точка N так, что $\angle CPN$ – прямой. Найдите углы ADC, NQC и площадь четырёхугольника $NCDQ$, если известно, что $\angle NCP = \operatorname{arctg} \frac{8}{15}$, $AP = \frac{17}{2}$, $NC = 17$.

5. [5 баллов] Дана система уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{3}\cos(x+y) = 5\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right), \\ \sin(x+2y) + \sqrt{3}\cos(x+2y) = 8\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right). \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y$, если известно, что оно определено и что этих значений не меньше двух.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x - 14}{2x - 3} \leqslant ax + b \leqslant 2 + \sqrt{\frac{51}{4} - 7x - x^2}$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$.

7. [6 баллов] Дан параллелепипед $KLMNK_1L_1M_1N_1$, грани $KLMN$ и LMM_1L_1 которого являются прямоугольниками. Сфера S касается прямых L_1M_1 и M_1N_1, плоскости LMM_1, а также плоскости KLM в точке K. Эта сфера повторно пересекает отрезок KM_1 в точке A. Найдите $\angle NN_1M_1$ и объём параллелепипеда $KLMNK_1L_1M_1N_1$, если известно, что $AK = 5$, $AM_1 = 2$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задание 1.

$$\begin{cases} x-\sqrt[3]{64y^2-x^2}=124 & (1)\\ 8y-\sqrt[3]{64y^2-x^2}=-92 & (2)\end{cases}$$

Вычтем из (2) уравнение (1)

$$8y-x=-216$$

$$\begin{cases} x-\sqrt[3]{(8y-x)(8y+x)}=124\\ 8y-\sqrt[3]{(8y-x)(8y+x)}=-92\end{cases}$$

$$\begin{cases} x+6\sqrt[3]{8y+x}=124 & (1)\\ 8y+6\sqrt[3]{8y+x}=-92 & (2)\end{cases}$$

Сложим (1) и (2)

$$x+8y+12\sqrt[3]{x+8y}=32$$

Пусть $t=\sqrt[3]{x+8y}$

$$t^3+12t-32=0$$

$$(t-2)(\underbrace{t^2+2t+16}_{>0})=0 \Rightarrow t=2$$

$$\cancel{x+0}\ -\begin{cases} x+8y=8\\ 8y-x=-216\end{cases}$$

$$2x=224 \Rightarrow x=112 \Rightarrow y=-13.$$

Ответ: $(112;-13)$

Задание 2.

$$\sqrt{\log_{2x^3}x^9}\le\log_{2x}\frac{1}{x^3}$$

Условие: $x>0$

$x\ne\frac{1}{2};\ x\ne\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$

☐ черновик ☑ чистовик

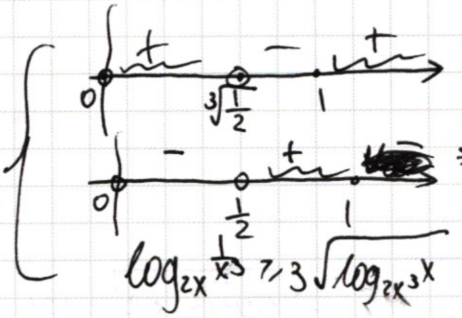
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 1

(Нумеровать только чистовики)

$3\sqrt{\log_{2x^3}x} \le \log_{2x}\frac{1}{x^3}$

$$\begin{cases}\log_{2x^3}x \ge 0\\ \log_{2x}\frac{1}{x^3}\ge 0\\ \left(\log_{2x}\frac{1}{x^3}\right)^2 \ge 9\log_{2x^3}x\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}(2x^3-1)(x-1)\ge 0\\ (2x-1)\left(\frac{1-x^3}{x^3}\right)\ge 0\\ \log_{2x}\frac{1}{x^3}\ge 3\sqrt{\log_{2x^3}x}\end{cases}$$



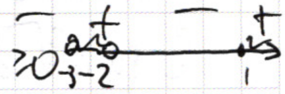
$$\Rightarrow \begin{cases}x\in\left(\frac{1}{2};\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right)\cup\{1\}\\ -3\log_{2x}x \ge 3\sqrt{\log_{2x^3}x}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x\in\left(\frac{1}{2};\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right)\cup\{1\}\\ \log_{2x}x \le -\sqrt{\log_{2x^3}x}\end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_{2x}x \le -\sqrt{\frac{1}{3}\log_{\sqrt[3]{2}\cdot x}x} \Rightarrow \sqrt{3}\log_{2x}x \le -\sqrt{\log_{\sqrt[3]{2}x}x} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{\log_x 2x} \le -\sqrt{\frac{1}{\log_x \sqrt[3]{2}x}}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{1+\log_x 2} \le -\sqrt{\frac{1}{1+\frac{1}{3}\log_x 2}}$$

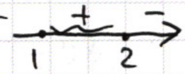
$$\log_x 2 = t \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{1+t} \le -\sqrt{\frac{1}{1+\frac{1}{3}t}} \Rightarrow \frac{3}{1+t^2} \le \frac{3}{3+t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{+3+t-1-2t-t^2}{(1+t^2)(3+t)} \le 0 \quad \frac{t^2+t-2}{(1+t^2)(3+t)} \ge 0 \quad \frac{(t-1)(t+2)}{(1+t^2)(3+t)} \ge 0$$



$\log_x 2 \in (-3;-2)\cup[1;+\infty) \Rightarrow$ $\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ $\quad \log_x 2 \ge 1 \Rightarrow (x-1)(2-x)\ge 0$

$x\in[1;2]$



Ответ: $x\in\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)\cup\{1\}$.

Задание 3.

Пусть дано число $\overline{abcdefg}$

Заметим, что деление на 10^n даёт в остатке ровно n последних цифр. ⇒ при делении числа последовательно на $10^1; 10^2; 10^3$ сумма остатков никак не будет равна 12414. То же самое верно и для случая $10^2; 10^3; 10^4$

1) Пусть число поделили на $10^3; 10^4; 10^5$

$\overline{efg} + \overline{defg} + \overline{cdefg} = 12414.$

$3g + 30f + 300e + 2000d + 10000c = 12414$

Заметим, что c может быть равно только 0 или 1.

1.1) $c=0$ $\quad 3g+30f+300e+2000d = 12414 \Rightarrow d=6$, т.к при $d<6$ равенство невозможно. ⇒ $g+10f+100e = 138 \Rightarrow \overline{efg}=138 \Rightarrow e=1; f=3; g=8.$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Тогда ~~при~~ получаются числа вида $\overline{ab06138}$

а можно выбрать 9 способами, в - 10 способами $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ существует 90 вариантов

1.2) $c=1$

$$\underbrace{3g+30f+300e}_{\vdots 3}+2000d=2414$$

$\vdots 3 \Rightarrow 2000d$ имеет остаток 2 при делении на 3. $\Rightarrow$

$\Rightarrow d=1$

$3g+30f+300e=414 \Rightarrow \overline{efg}=138$

Получаем числа вида $\overline{ab11138} \Rightarrow$ возможно 90 вариантов.

2) Деление на 10^4, 10^5, 10^6

$\overline{defg}+\overline{cdefg}+\overline{bcdefg}=12414$.

$3\cdot 10^3 d+3\cdot 10^2 e+3\cdot 10 f+3g+2\cdot 10^4 c+10^5 b=12414 \Rightarrow$

$\Rightarrow b=0$, т.к если $b\geq 1$, то $10^5 b\geq 10^5>12414$

Аналогично $c=0$.

$3000d+300e+30f+3g=12414$

~~300~~ $1000d+100e+10f+g=4138$

$\overline{defg}=4138$

Числа имеют вид: $\overline{a004138} \Rightarrow$ всего 9 вариантов

Если рассматривать деление на 10^7 и т.д, то в остатке будет получаться все число, которое больше 12414.

Ответ: 189 вариантов.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Задание 6.

$$\frac{12x-14}{2x-3} \le ax+b \le 2+\sqrt{\frac{51}{4}-7x-x^2}$$

$$2+\sqrt{\frac{51}{4}-7x-x^2} = 2+\sqrt{25-(x+\frac{7}{2})^2} \le 7. \ (1)$$

$$\frac{12x-14}{2x-3} = 6+\frac{4}{2x-3} \ (2)$$

Подставим $x=-\frac{1}{2}$ в (1) и (2)

(1): $2+\sqrt{25-9}=6.$

(2): $6+\frac{4}{-4}=5.$ $\Rightarrow$ $5 \le -\frac{1}{2}a+b \le 6$

Подставим $x=\frac{3}{2}$ в (1)

$2+\sqrt{25-25}=2.$ $\Rightarrow$ $\frac{3}{2}a+b<2$

Получаем систему:

$$\begin{cases} 5 \le -\frac{1}{2}a+b \le 6 \\ \frac{3}{2}a+b<2 \end{cases}$$

1) $-\begin{cases} \frac{3}{2}a+b<2 \\ -\frac{1}{2}a+b \le 6 \end{cases}$

$2a<-4 \Rightarrow a \le -2 \Rightarrow b \le 5.$, однако $a=-2$, $b=5$ не могут быть одновременно.

2) $\begin{cases} -\frac{1}{2}a+b \ge 5 \\ \frac{3}{2}a+b<2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2b-10 \ge a \\ a \le \frac{4}{3}-\frac{2}{3}b \end{cases}$

$2b-10-\frac{4}{3}+\frac{2}{3}b>0$

$\frac{8}{3}b>\frac{34}{3} \Rightarrow b \ge \frac{17}{4}. \Rightarrow a \le -\frac{3}{2}$, однако $a=-\frac{3}{2}$, $b=\frac{17}{4}$ не могут быть одновременно.

Ответ: $b \in [\frac{17}{4}; 5]$, $a \in (-\infty; -\frac{3}{2}]$, $\setminus (-\frac{3}{2}; \frac{17}{4}); (-\frac{3}{2}; +5)$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задание 5.

$$\begin{cases} \sqrt{3}\cos(x+y)=5\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right) \\ \sin(x+2y)+\sqrt{3}\cos(x+2y)=8\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right) \end{cases} \qquad ctgx+ctgy-?$$

$$ctgx+ctgy=\frac{\cos x}{\sin x}+\frac{\cos y}{\sin y}=\frac{\sin(x+y)}{\sin x\cdot\sin y}=\frac{2\sin(x+y)}{\cos(x-y)+\cos(x+y)}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}+x\right)=\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\sqrt{3}\cos(x+y)}{5}=\frac{\sin(x+2y)+\sqrt{3}\cos(x+2y)}{8}.$$

$$\frac{\sqrt{3}\cos(x+y)}{5}=\frac{\cos\left(x+2y-\frac{\pi}{6}\right)}{4}\Rightarrow$$

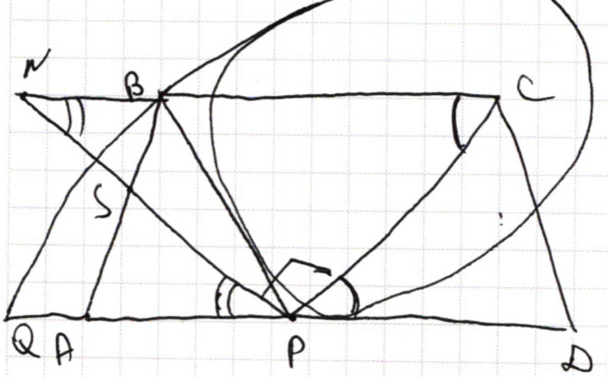
$$\Rightarrow 4\sqrt{3}\cos(x+y)=5\cos\left((x+y)+\left(y-\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

$$4\sqrt{3}\cos(x+y)=5\left(\cos(x+y)\cdot\cos\left(y-\frac{\pi}{6}\right)-\sin(x+y)\cdot\sin\left(y-\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta$$

Задание 4.



ΔCPN — прямоугольный

$NC=17$, $tg\,PCN=\frac{8}{15}\Rightarrow$

$\Rightarrow NP=8$; $CP=15$.

$ABCD$ — равнобокая $\Rightarrow \angle CDA=$ $=\angle BAD$.

$\Delta NBS\sim\Delta PAS$ ($\angle BNS=\angle SPA$; $\angle NSB=\angle ASP$)

$$\frac{NB}{AP}=\frac{BS}{SA}$$

☐ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$5\sin(x+y)\cos(y+\frac{\pi}{3})+5\cos(x+y)\cdot\cancel{\cos(y+\frac{\pi}{3})}\ \cos(\frac{\pi}{6}-y)\ \sin(y+\frac{\pi}{3})=4\sqrt{3}\cos(x+y)$

$5($

$\cos(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}+y)=\cos(\frac{\pi}{3}+y)=\sin($

$5\sin(x+y)\cdot\overset{\sin}{\cancel{\cos}}\overset{(\frac{\pi}{6}-y)}{(\cancel{y+\frac{\pi}{3}})}+5\cos(x+y)\cdot\cos(\cancel{y-\frac{\pi}{6}}\ \frac{\pi}{6}-y)=4\sqrt{3}\cos(x+y)$

$\cos(x+y-\frac{\pi}{6}+y)=\frac{4\sqrt{3}}{5}\cos(x+y)$

$\cos(2y+x-\frac{\pi}{6})=\frac{4\sqrt{3}}{5}\cos(x+y)$

$$\begin{cases} x-\sqrt[3]{\cancel{(8y)^2}\,(8y-x)(8y+x)}=124 \\ 8y-\sqrt[3]{(8y-x)(8y+x)}=-92 \end{cases}$$

$x-8y=216.$

$$\begin{cases} x+6\sqrt[3]{8y+x}=124 \\ 8y+6\sqrt[3]{8y+x}=-92 \end{cases}$$

$x+8y+12\sqrt[3]{8y+x}=32 \qquad \sqrt[3]{x+8y}=t.$

$t^3+12t-32=0$

$(t-2)(t^2+2t+16)=0$

$t=2\Rightarrow -\begin{cases} x+8y=8, \\ x-8y=216 \end{cases}$

$16y=-208$

$y=\frac{-208}{16}=-13$

$x=112.$

Ответ: $(112;-13)$.

$\frac{12x-14}{2x-3} \le ax+b \le 2+\sqrt{25-\left(\frac{7}{2}+x\right)^2}$

при $x=\frac{3}{2}$, $2 < 2+\sqrt{25-\left(\frac{7}{2}+x\right)^2} \le 6$ (при $x=-\frac{1}{2}$)

$\frac{12x-14}{2x-3} \le 5.$ (при $x=-\frac{1}{2}$.)

$\cancel{\frac{3}{2}a+b \ge 0}$

$\begin{cases} \frac{3}{2}a+b < 2. \\ -\frac{1}{2}a+b \le 6 \end{cases}$

$\cancel{\frac{3}{2}a+b}$

$\begin{cases} -\frac{1}{2}a+b \ge 5. \\ \frac{3}{2}a+b < 2 \end{cases}$

$\begin{cases} \frac{3}{2}a+b < 2 \\ 5 \le -\frac{1}{2}a+b \le 6 \end{cases}$

$2a < -4$

$\begin{cases} a < -2 \\ b < 5. \end{cases}$

$\begin{cases} 5 \le -\frac{1}{2}a+b \le 6. \\ \frac{3}{2}a+b < 2. \end{cases}$

$-\frac{3}{2}\ -2a < 4$

$\boxed{\begin{matrix} a > -2 \\ b < 5 \end{matrix}}$

$\begin{cases} -\frac{1}{2}a+b \ge 5 \\ \frac{3}{2}a+b < 2 \end{cases}$

$\begin{cases} \frac{3}{2}a < 2-b \\ \frac{1}{2}a < b-5\ (\cdot 3) \end{cases}$ $\quad 3b-15$

$b \ge 5+\frac{1}{2}a$

$b < 2-\frac{3}{2}a$

$4b-17>0$

$b > \frac{17}{4}.$

$2-b-3b+15>0$ $\quad \cancel{2-\frac{3}{2}a}$

$-4b+17>0$

$b < \frac{17}{4}.$

$3b-15-2+b>0$

$4b>17\ b>\frac{17}{4}.$

$\frac{17}{4} < 2-\frac{3}{2}a$ $\quad \frac{9}{4}\ \frac{3}{2}a < -\frac{9}{4}$ $\quad \frac{-9}{4} \cdot a < -\frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2 \cdot 2} > a$

$\frac{17}{4} \ge 5+\frac{1}{2}a$

$-\frac{3}{4} \ge \frac{1}{2}a$

$\begin{cases} -\frac{1}{2}a+b \ge 5 \\ \frac{3}{2}a+b < 2 \end{cases}$

$\begin{cases} b \ge 5+\frac{1}{2}a \\ b < 2-\frac{3}{2}a \end{cases} \Rightarrow 2-\frac{3}{2}a > 5+\frac{1}{2}a \Rightarrow$

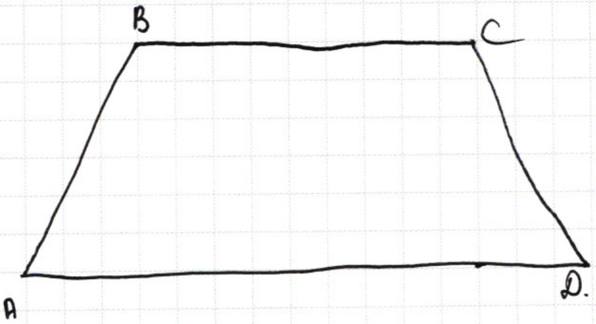
$\Rightarrow -3 \ge 2a \Rightarrow a \le -\frac{3}{2}.$

$\left[\begin{matrix} \begin{cases} b=\frac{17}{4}. \\ a=-\frac{3}{2}. \end{cases} \\ \begin{cases} a=-2 \\ b=5. \end{cases} \end{matrix}\right.$

$a < -\frac{3}{2}.$

$b < \frac{17}{4}.$

$\begin{cases} \frac{3}{2}a \le 3b-15 \\ \frac{3}{2}a < 2-b \end{cases}$



$-\frac{3}{4}+b \ge 5.$

$b \in \left(\frac{17}{4}; 5\right)$

$a \in \left(-\infty; -\frac{3}{2}\right)$

$\frac{12x-14}{2x-3} \le -2x+5 \le 2+\sqrt{\ldots}$. $b \ge \frac{17}{4}.$

$\frac{2x+1}{2x-3} \le -2x \le -3+\sqrt{25-\left(x+\frac{7}{2}\right)^2}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4. Деление на 10^5; 10^6; 10^7.

$$\overline{cdefg} + \overline{bcdefg} + \overline{abcdefg} = 12414.$$

$$3\cdot10^4c + 3\cdot10^3d + 3\cdot10^2e + 3\cdot10f + 3g + 2\cdot10^5b + 10^6a = 12414.$$

a

Ответ: 189 вариантов.

№5.

$$\sqrt3\cos(x+y) = 5\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)$$

$$\sin(x+2y) + \sqrt3\cos(x+2y) = 8\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right) = \cos x\cdot\frac{\sqrt3}{2} - \frac12\sin x$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right) = \cancel{\frac12\sin x}\ \frac{\sqrt3}{2}\cos x - \frac12\sin x$$

$$\sin\left(\cancel{90}\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}+x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right) = \qquad \cancel{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right.}$$

$$\sqrt3\cos(x+y) = \cancel{5\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)}\ 5\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\sin\left(x+2y+\frac{\pi}{3}\right) = \cancel{4\sin}(\ 4\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\frac{\sqrt3\cos(x+y)}{5} = \frac{\sin\left(x+2y+\frac{\pi}{3}\right)}{4}. \qquad \operatorname{ctg}x + \operatorname{ctg}y = \frac{\sin(y+x)}{\sin x\cdot\sin y}$$

$$\cancel{4\sqrt3\cos(x+y) = 5\sin}$$

$$\sqrt3\cos(x+y) = \frac58\left(\sin(x+2y) + \sqrt3\cos(x+2y)\right)$$

$$\frac{8\sqrt3}{5}\cos(x+y) - \sin(x+2y) - \sqrt3\cos(x+2y) = 0.$$

$$\frac{8\sqrt3}{5}\cos(x+y) - (\sin(x+y)\cdot\cos y + \cos(x+y)\sin y) - \sqrt3(\cos(x+y)\cdot\cos y - \sin y\sin(x+y)) = 0$$

$$\cos(x+y)\frac{8\sqrt3}{5} - \sin(x+y)(\cos y+\sin y) - \cos(x+y)(\sin y+\sqrt3\cos y) = 0.$$

$$\cos(x+y)\left(\frac{8\sqrt3}{5} - 2(\cancel{\cos}\sin\left(y+\frac{\pi}{3}\right)\right) - \sin(x+y)\cdot(\cos y+\sin y) = 0.$$

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos \cancel{y}x - \frac{1}{2}\sin x$

$\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x$

$\cancel{\frac{\sqrt{3}}{\cos(x+y)}} =$

$\frac{\sqrt{3}\cos(x+y)}{5} = \frac{\sin\left(x+2y+\frac{\pi}{3}\right)}{4}.$

$4\sqrt{3}\cos(x+y) = 5\sin((x+y)+(y+\frac{\pi}{3}))$

$\cos\left(y+\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}\cos y - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin y$

$\sin\left(y+\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}\sin y + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos y.$

$\cancel{\frac{\sin y}{\cos} = a}$

$4\sqrt{3}\cos(x+y) = \cancel{5\sin(} 5\left(\sin(x+y)\cdot\cos\left(y+\frac{\pi}{3}\right) + \cos(x+y)\cdot\sin\left(y+\frac{\pi}{3}\right)\right)$

$\cos(x+y) = a$ $\qquad \cancel{\cos}$

$\cancel{\sin(x+y) = b.}$

$\cancel{4a\sqrt{3} = 5\sqrt{1-b^2}}$

$\cancel{4\sqrt{3}}$ $\quad 8\sqrt{3}\cos(x+y) = 5\sin(x+2y) + 5\sqrt{3}\cos(x+2y)$

$8\sqrt{3}\cos(x+y) = 5\sin(x+y)\cdot\cancel{\sin}\cos y + 5\cos(x+y)\cdot\sin y +$

$+ 5\sqrt{3}\cos(x+y)\cdot\cos y - 5\sqrt{3}\sin(x+y)\cdot\sin y$

$\cos(x+y)(8\sqrt{3} - 5\sin y + 5\sqrt{3}\cos y) - \cancel{\cos y}\sin(x+y)(5\sqrt{3}\sin y - 5\cos y) = 0.$

$\cos(x+y)\,(8\sqrt{3} + 5(\sqrt{3}\cos y - \sin y)) + \sin(x+y)\,(5(-\sqrt{3}\sin y + \cos y)) = 0$

$\cos(x+y)\left(8\sqrt{3} + 10\cos\left(y+\frac{\pi}{6}\right)\right) + \sin(x+y)\cdot 10\left(\cos\left(y+\frac{\pi}{3}\right)\right) = 0.$

$\cos(x+y) = a \qquad \cos y = b. \qquad 5\sin(x+y)(\cos y - \sqrt{3}\sin y) =$

$8\sqrt{3}a = 5\sqrt{1-a^2}\cdot b \qquad = \cos(x+y)(8\sqrt{3} - 5\sqrt{3}\cos y - 5\sin y)$

$\operatorname{ctg}x + \operatorname{ctg}y = \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\cos y}{\sin y} = \frac{\cos x\cdot\sin y + \cos y\cdot\sin x}{\sin x\cdot\sin y} =$

$= \frac{\sin(x+y)}{\sin x\cdot\sin y}$

$5\sin(x+y)(\cos y - \sqrt{3}\sin y) + 5\cos(x+y)(\sin y + \sqrt{3}\cos y) =$

$= 5\sin(x+y)\left(2\cos\left(y+\frac{\pi}{3}\right)\right) + 5\cos(x+y)\left(2\cos\left(y-\frac{\pi}{6}\right)\right) = 8\sqrt{3}\cos(x+y)$

☐ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$-\begin{cases} x-\sqrt[3]{64y^2-x^2}=124 \\ 8y-\sqrt[3]{64y^2-x^2}=-92 \end{cases}$$

$$8y-x=-216$$

$$\begin{cases} x-\sqrt[3]{(8y-x)(8y+x)}=124 \\ 8y-\sqrt[3]{(8y-x)(8y+x)}=-92 \end{cases}$$

$$+\begin{cases} x+6\sqrt{8y+x}=124 \\ 8y+6\sqrt{8y+x}=-92 \end{cases}$$

$$\sqrt{8y+x}=t$$

$$8y+x+12\sqrt{8y+x}=32$$

$$t^2+12t-32=0$$

$$D=144+128=272$$

$$t_{12}=\frac{-12\pm\sqrt{272}}{2}\Rightarrow -6+\sqrt{68}$$

$$\sqrt{8y+x}=\sqrt{68}-6$$

$$-\begin{cases} 8y+x=104-12\sqrt{68}. \\ 8y-x=\cancel{8}-216 \end{cases}$$

$$2x=320-12\sqrt{68}$$

$$x=160-6\sqrt{68}$$

$$y=\frac{-216+160-6\sqrt{68}}{8}=\frac{-56-6\sqrt{68}}{8}=-7-\frac{3\sqrt{17}}{2}.$$

$\sqrt{\log_{2x^3} x^9} \leq \log_{2x} \frac{1}{x^3}$

ОДЗ: $\begin{cases} x>0 \\ x \neq \frac{1}{2} \\ x \neq \sqrt[3]{\frac{1}{2}} \end{cases}$

$\sqrt{9\log_{2x^3} x} \leq -3\log_{2x} x$

$\sqrt{\log_{2x^3} x} \leq -\log_{2x} x$

$\log_{2x} x \leq 0$

$\log_{2x^3} x \leq \log^2_{2x} x$

№3.

12414

$\overline{abcdefg}$: 10 = Остаток = g

: 100 = Остаток = fg.

10000: остаток = .

1) число от 1.000000 до 9999 999

число ~~5. 6~~ $10^5; 10^6; 10^7$.

Деление на 10^7. ?,1000000

$\begin{cases} 5 \leq -\frac{1}{2}a+b \leq 6 \\ \frac{3}{2}a+b < 2 \end{cases}$

1) $\begin{cases} 2b-a \leq 12 \\ 3a+2b<4 \end{cases} \Rightarrow$ $-4a<8$ $a \geq -2$.

$10 \leq -a+2b \leq 12$

$3a+2b<4$.

2) $\begin{cases} 3a+2b<4 \\ 2b-a \geq 10 \end{cases}$ $b \leq 5$.

$10 \leq 2b-a \leq 12$

$3a+2b<4$

~~$4a<8$~~

$2 < ax+b \leq 6$

$\begin{cases} -2+2b<4 \\ 2b+2 \geq 10 \end{cases}$ $\begin{cases} b \leq 5 \\ b \geq 4 \end{cases}$

№5.

$\begin{cases} \sqrt{3}\cos(x+y) = 5\sin(\frac{\pi}{3}-x) \\ \sin(x+2y) + \sqrt{3}\cos(x+2y) = 8\cos(x+\frac{\pi}{6}) \end{cases}$

$\sin(x+2y) + \sqrt{3}\cos(x+2y) = 8\cos(x+\frac{\pi}{6})$

$2(\sin(x+2y)\cdot\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(x+2y)) = 8\cos(x+\frac{\pi}{6})$

$\begin{cases} \sin(x+2y+\frac{\pi}{3}) = 4\cos(x+\frac{\pi}{6}) \\ \sqrt{3}\cos(x+y) = 5\sin(\frac{\pi}{3}-x) \end{cases}$

$\frac{12x-14}{2x-3} \leq ax+b \leq 2+\sqrt{\frac{51}{4}-7x-x^2}$

$\frac{51}{4}-7x-x^2 =$

$= -(x^2+7x-\frac{51}{4}) =$

$= -(x+\frac{7}{2})^2 + \frac{100}{4} =$

$= -(x+\frac{7}{2})^2 + 25$

$2+\sqrt{-(\frac{7}{2}+x)^2+25} \leq 7.$

$f(-\frac{1}{2}) = \frac{-6-14}{-1-3} = 5.$

$f(\frac{3}{2}) = \frac{18-14}{3-3}$

$f(x) = \frac{12x-14}{2x-3}$

$f'(x) = \frac{12(2x-3)-2(12x-14)}{(2x-3)^2} = \frac{-8}{(2x-3)^2}$ ↓.

$x=\frac{3}{2}$: $f_2(x) = 2+0 = 2$ $f_2(-\frac{1}{2}) = 2+4 = 6.$

☐ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

12414.

1. Деление на 10 100 и 1000.

$\overline{abcdefg}$

$g + \overline{fg} + \overline{efg} = 1214.$

2. Деление на 1000, 10000 и 100000

$\overline{efg} + \overline{defg} + \overline{cdefg} = 12414.$

$\leq 999 \quad \leq 9999 \quad \leq 99999.$

$3g + 30f + 300e + 2000d + 10000c = 12414.$

1) $10000c$ – остаток 1 или 2, на :3

$c = 0. \quad d = 6.$

$3g + 30f + 300e = 414.$

$g + 10f + 100e = 138.$

$\overline{efg} = 138$ — 1 комбинация. (90 вариантов)

2) $c = 1.$ $3g + 30f + 300e + 2000d = 2414.$

$2000d$ – остаток 2 на :3.

$d = 1.$

$3g + 30f + 300e = 138$ (90 вариантов)

3. Деление на $10^4, 10^5, 10^6.$

$\overline{defg} + \overline{cdefg} + \overline{bcdefg} = 12414.$

$3 \cdot 10^3 d + 3 \cdot 10^2 e + 3 \cdot 10 f + 3g + 2 \cdot 10^4 c + 10^5 b = 12414.$

$b = 0.$ $\cancel{2 \cdot 10^4 c + 3}$

$c = 0.$ $3000d + 300e + 30f + 3g = 12414$

·06138

6138+6138+138

··1414.

··11138.

11138+1138+138

4138+4138+4138

·004138

9 вариантов

$1000d + 3 \cdot 100e + 10f + g = 4138.$

$d = 4.$ $100e + 10f + g = 138$

$\sqrt{3}\cos(x+y)=5\sin(\frac{\pi}{3}-x)$

$\sin(x+2y)+\sqrt{3}\cos(x+2y)=8\cos(x+\frac{\pi}{6})$

$\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}+x)=8\cos(x+\frac{\pi}{6})$.

$\frac{\sqrt{3}\cos(x+y)}{5}=\frac{\sin(x+2y)+\sqrt{3}\cos(x+2y)}{8}$

$8\sqrt{3}\cos(x+y)=5\sin(x+2y)+5\sqrt{3}\cos(x+2y)$

$ctgx+ctgy=\frac{\cos x\cdot\sin y+\cos y\cdot\sin x}{\sin x\cdot\sin y}=\frac{\sin(x+y)}{\sin x\cdot\sin y}$

$\cos(x+y)=\cos x\cdot\cos y-\sin x\cdot\sin y$

$-\cos(x-y)=\cos x\cdot\cos y+\sin x\cdot\sin y$.

$-2\sin x\cdot\sin y=\cos(x+y)-\cos(x-y)$

$x+y=\alpha$ $\qquad \frac{\alpha+\beta}{2}=x$

$\cos(x-y)=\beta$ $\qquad \frac{\alpha-\beta}{2}=y$.

$ctgx+ctgy=\frac{-2\sin(x+y)}{\cos(x+y)-\cos(x-y)}=\frac{\sin(x+y)\cdot 2}{\cos(x-y)-\cos(x+y)}$

$8\sqrt{3}\cos(x+y)=5\sin(x+y)\cdot\cos y+5\cos(x+y)\cdot\sin y+5\sqrt{3}\cos(x+y)\cdot\cos y-$
$-5\sqrt{3}\sin(x+y)\cdot\sin y$

$8\sqrt{3}\cos(x+y)=10\cos(x+2y+\frac{\pi}{6})$

$\sqrt{3}\cos(x+y)$

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$ctg x + ctg y = \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\cos y}{\sin y} = \frac{\cos x \cdot \sin y + \cos y \cdot \sin x}{\sin x \cdot \sin y} =$$

$$= \frac{\sin(y+x)}{\sin x \cdot \sin y}$$

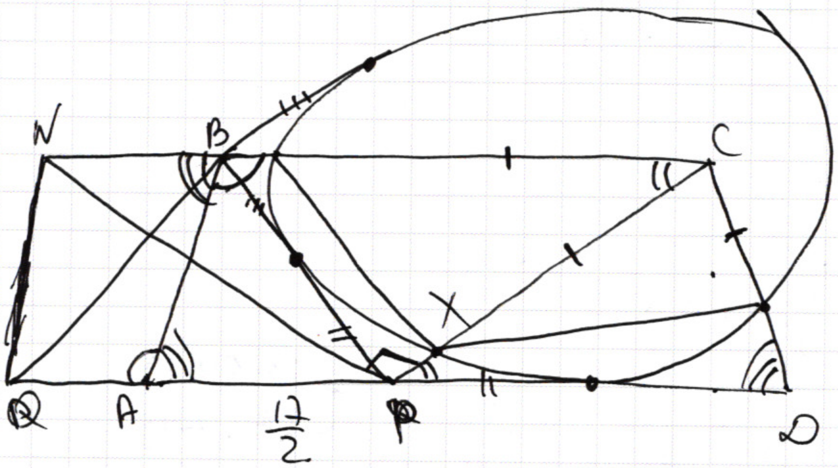
$$\sqrt{3}\cos(x+y) = 5\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$$

$$\cancel{\sin\left(x+2y+\frac{\pi}{3}\right) = 8\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}$$

$$\cancel{2}\cos\left(x+2y-\frac{\pi}{6}\right) = \cancel{8}4\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\sqrt{3}\cos x \cdot \cos y - \sqrt{3}\sin x \cdot \sin y = \frac{5\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{5}{2}\sin x$$

$$\begin{cases} \cos\left(x+2y-\frac{\pi}{6}\right) = 4\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right) \\ \sqrt{3}\cos(x+y) = 5\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \end{cases}$$



$\angle ADC$ - ?

$\angle NQC$ - ?

S_{NCDQ} - ?

$\angle NCP = arctg\,\frac{8}{15}$

$AP = \frac{17}{2}$

$NC = 17.$

$NP = 8;\ CP = 15;\quad \cos NCP = \frac{15}{17}.\quad \sin NCP = \frac{8}{17}.$

$$\sqrt{\log_{2x^3} x^9} \le \log_{2x} \frac{1}{x^3}$$

$$\sqrt{\log_{2x^3} x} \le \log_{2x} \frac{1}{x}$$

$$\sqrt{\log_{2x^3} x} \le \log_{2x} \frac{1}{x}$$

$$\log_{2x} \frac{1}{x} \ge 0 \Rightarrow (2x-1)\left(\frac{1}{x}-1\right) \ge 0$$

$$(2x-1)\left(\frac{1-x}{x}\right) \ge 0$$

$+\quad -\quad +\quad -$; $0\quad \frac{1}{2}\quad 1$

$\log_{2x^3} x \ge 0$

$(2x^3-1)(x-1) \ge 0$ $\quad + \quad - \quad +$; $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\quad 1$ $\quad x \in (-\infty;0) \cup [1]$

$x \in (-\infty;0) \cup [\frac{1}{2};1]$

$$\begin{cases} 2x^3 \neq 1 \\ x > 0 \\ x \neq \frac{1}{2} \end{cases}$$

$x \in (-\infty; 0) \cup \{1\}$.

С учетом ОДЗ: $x = 1$.

Ответ: $x = 1$.

$\log_{2x} \frac{1}{x^3} \geq 0 \Rightarrow (2x-1)(\frac{1}{x^3} - 1) \geq 0$

$+ \quad 0 \quad - \quad \frac{1}{2} \quad + \quad 1 \quad -$

№6.

~~$2 < \leq 6$~~ $\in (2; 6]$

$$\frac{12x-14}{2x-3} \leq ax+b \leq 2 + \sqrt{\frac{51}{4} - 7x - x^2}$$

$\leq 5.$

$$\sqrt{\frac{51}{4} - 7x - x^2} = -(x^2 + 7x - \frac{51}{4}) = -(x+\frac{7}{2})^2 - \frac{49}{4} - \frac{51}{4}) = 25 - (x+\frac{7}{2})^2$$

$x \in [-\frac{1}{2}; \frac{3}{2})$

$2 < 2 + \sqrt{25 - (x+\frac{7}{2})^2} \leq 6.$ (при $x = -\frac{1}{2}$)

$$\frac{12x-14}{2x-3} = 6 + \frac{4}{2x-3}$$

$-\infty < 6 + \frac{4}{2x-3} \leq 5.$ (при $x = -\frac{1}{2}$)

$x = -\frac{1}{2}$:

$\sqrt[3]{\frac{1}{2}} > \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2} > \frac{1}{8}$

$$\begin{cases} 2b \geq 10 + a \\ 2b < 4 - 3a \end{cases}$$

$4 - 3a > 10 + a$

$\frac{12x-14}{2x-3} = 2 \Rightarrow 12x - 4 = 4x - 6 \Rightarrow 8x = -2 \Rightarrow x = -\frac{1}{4}$. $-6 > 4a \Rightarrow a < -1,5$.

$a \in (-2; -1,5)$

$b \in (\frac{7}{4}; 5)$

$x \in [-\frac{1}{2}; \frac{1}{4})$

$5 \leq -\frac{1}{2}a + b \leq 6$

$-\infty < \frac{3}{2}a + b < 2.$

$$\begin{cases} 10 \leq 2b - a \leq 12 \\ 3a + 2b < 4 \end{cases}$$

1) $\begin{cases} 2b - a \leq 12 \\ 3a + 2b < 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2b \leq 12 + a \\ 2b < 4 - 3a \end{cases}$

$12 + a - 4 + 3a > 0$

$\begin{cases} a > -2 \\ b < 5 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2b - a \geq 10 \\ 3a + 2b < 4 \end{cases}$

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)