# МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

# ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

## 11 класс

ВАРИАНТ 4

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы $\alpha$ и $\beta$ удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6}, \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$\left|x^2-26x\right|^{\log_5 12}+26x \geqslant x^2+13^{\log_5\left(26x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности $\Omega$ и $\omega$ касаются в точке $A$ внутренним образом. Отрезок $AB$ – диаметр большей окружности $\Omega$, а хорда $BC$ окружности $\Omega$ касается $\omega$ в точке $D$. Луч $AD$ повторно пересекает $\Omega$ в точке $E$. Прямая, проходящая через точку $E$ перпендикулярно $BC$, повторно пересекает $\Omega$ в точке $F$. Найдите радиусы окружностей, угол $AFE$ и площадь треугольника $AEF$, если известно, что $CD=12$, $BD=13$.

5. [5 баллов] Функция $f$ определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел $a$ и $b$ из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа $p$ ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее $x$). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $4\leqslant x\leqslant 28$, $4\leqslant y\leqslant 28$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{8-6x}{3x-2}\geqslant ax+b\geqslant 18x^2-51x+28$$

выполнено для всех $x$ на промежутке $\left(\frac{2}{3};2\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $TXYZ$, вершина $Y$ которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра $TY$. Известно, что $XY=\sqrt{3}$, $TX=\sqrt{2}$, $TZ=2$. Найдите длину ребра $XZ$. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6} & (1) \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45 & (2) \end{cases}$$

(1) $y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6}$

$y-6x=\sqrt{x(y-6)-(y-6)}$

$y-6x=\sqrt{(y-6)(x-1)}$

(2) $9x^2+y^2-18x-12y=45$

$(3x)^2-2\cdot3\cdot3x+3^2+y^2-2\cdot y\cdot 6+(6)^2=45+9+36$

$(3x-3)^2+(y-6)^2=90$

$9(x-1)^2+(y-6)^2=90$

$$\text{Т}\begin{cases} u=\sqrt{|x-1|} \\ v=\sqrt{|y-6|} \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix}(x-1)^2=u^4 \\ (y-6)^2=v^4\end{matrix}$$

~~$; y-6x=v^2-6x^2$~~

~~$(v^2-6x^2)=y-6-6(x-1)=y-6x,$~~

~~если $x\geq1$ $y\geq6$~~

$D(y)$: $\boxed{(x-1)(y-6)\geq0}$

Т.к. необходимо, чтобы $(x-1)(y-6)\geq0$, то разделим решение на 3 случая 1) $\begin{cases}x\geq1\\y\geq6\end{cases}$; 2) $\begin{cases}x<1\\y<6\end{cases}$

3) $\begin{cases}x=1\\y=6\end{cases}$

1) $\begin{cases}x>1\\y>6\end{cases}$

$y-6x=v^2-6u^2=y-6-6(x-1)=y-6x$ (ч.)

$$\begin{cases} v^2-6u^2=uv & (a) \\ 9u^4+v^4=90 & (б) \end{cases}$$

(a) $v^2-6u^2=uv$

$v^2-6u^2-uv=0 \quad /:u^2$

т.к. $\begin{cases} x>1 \\ y>6 \end{cases}$, п/п, то $\begin{cases} u\neq 0 \\ v\neq 0 \end{cases}$

$\left(\frac{v}{u}\right)^2-\left(\frac{v}{u}\right)-6=0$

$t=\frac{v}{u}$

$t^2-t-6=0$

$D=1^2+6\cdot 4=25=5^2$

$\left[\begin{array}{l} t_1=\frac{1+5}{2}=3 \\ t_2=\frac{1-5}{2}=-2 \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} \frac{v}{u}=3 \\ \frac{v}{u}=-2\text{, т.к. } \begin{cases} u>0 \\ v>0 \end{cases}\text{, то } \frac{v}{u}>0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \frac{v}{u}=3$

$v=3u$

$9u^4+(3u)^4=90$

$u^4=1$

$u=\pm 1$, но т.к. $u>0$, то $\begin{cases} u=1 \\ v=3 \end{cases}$

$u=\sqrt{x-1}$
$v=\sqrt{y-6}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-1}=1 \\ \sqrt{y-6}=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=15 \end{cases}$ – первое решение

Пр-ка

$\begin{cases} 15-6\cdot 2=\sqrt{2\cdot 15-6\cdot 2-15+6} \text{ (и.)} \\ 9\cdot 2^2+15^2-18\cdot 2-12\cdot 15=45 \text{ (и)} \end{cases}$

2) $\begin{cases} x<1 \\ y<6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u=\sqrt{1-x} \\ v=\sqrt{6-y} \end{cases} \Rightarrow y-6x=6u^2-v^2=6-6x-6+y=$
$=y-6x$

$\begin{cases} 6u^2-v^2=uv & (a) \\ 9u^4+v^4=90 & (б) \end{cases}$

(a) $6u^2-v^2-uv=0 \quad /:u^2 \quad (u<0)$

$6-\left(\frac{v}{u}\right)^2-\frac{v}{u}=0$

$\left(\frac{v}{u}\right)^2+\left(\frac{v}{u}\right)\cancel{+}6=0$

☐ черновик ☒ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$t = \frac{v}{u}$

$t^2 + t - 6 = 0$

$\cancel{t_1 = 3}$ $\quad D = 1 + 24 = 5^2$

$\cancel{t_2 = -2}$ $\quad \left[\begin{array}{l} t_1 = \frac{-1+5}{2} = 2 \quad ① \\ t_2 = \frac{-1-5}{2} = -3 \quad ② \end{array}\right.$

① $\frac{v}{u} = 2 \Rightarrow v = 2u$

$9u^4 + (2u)^4 = 90$

$25u^4 = 90$

$u^4 = \frac{18}{5} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} u = \pm\sqrt[4]{\frac{18}{5}} \\ v = \pm 2\sqrt[4]{\frac{18}{5}} \end{array}\right.$, т.к. $\begin{cases} u = \sqrt{1-x} \\ v = \sqrt{6-y} \end{cases}$, то $\begin{cases} u = \sqrt[4]{\frac{18}{5}} \\ v = 2\sqrt[4]{\frac{18}{5}} \end{cases}$

$v =$

$\begin{cases} \sqrt{1-x} = \sqrt[4]{\frac{18}{5}} \\ \sqrt{6-y} = 2\sqrt[4]{\frac{18}{5}} \end{cases}$ $\quad 1 - x = \sqrt{\frac{18}{5}}$ $\quad 6 - y = 4\sqrt{\frac{18}{5}}$ $\quad \begin{cases} x = 1 - \sqrt{\frac{18}{5}} \\ y = 6 - 4\sqrt{\frac{18}{5}} \end{cases}$ – второе реш.

3) $\begin{cases} x = 1 \\ y = 6 \end{cases}$

1) $x = 1$

~~$y = 6 0$, но $\sqrt{y - 6 + y + 6} \Rightarrow y = 6$~~

~~$9 + 0 - 18 = 0 \neq 45 \Rightarrow \varnothing$~~

2) $y = 6$

$6 = 6x$

$y - 6 \cdot 1 = \sqrt{y - 6 - y + 6} \Rightarrow y = 6$

$\underset{45}{9 + 6^2} - \underset{27}{18 \cdot 1} - 12 \cdot 6 \neq 45 \Rightarrow \varnothing$

Ответ: 1) $\begin{cases} x = 2 \\ y = 15 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x = 1 - \sqrt{\frac{18}{5}} \\ y = 6 - 4\sqrt{\frac{18}{5}} \end{cases}$

☐ черновик ☒ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

№1

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ ; $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$

$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha \cos 2\beta + \cos 2\alpha \cdot \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = \sin 2\alpha \cos 4\beta + \cos 2\alpha \sin 4\beta + \sin 2\alpha =$

$= \sin 2\alpha(\cos 4\beta + 1) + \cos 2\alpha \sin 4\beta \circledcirc$

$\cos 4\beta + 1 = 2\cos^2 2\beta - 1 + 1 = 2\cos^2 2\beta$

$\circledcirc\ \sin 2\alpha \cdot 2\cos^2 2\beta + \cos 2\alpha \cdot \sin 4\beta = 2\sin 2\alpha \cdot \cos^2 2\beta + \cos 2\alpha \cdot 2 \cdot$

$\cdot \sin 2\beta \cos 2\beta = 2\cos 2\beta(\underbrace{\sin 2\alpha \cos 2\beta + \cos 2\alpha \cdot \sin 2\beta}_{= -\frac{1}{\sqrt{17}}\ (\text{док.})}) = -\frac{2}{17}$

$2\cos 2\beta \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right) = -\frac{2}{17}$

$\cos 2\beta = \frac{2}{17} \cdot \frac{\sqrt{17}}{2} = \frac{1}{\sqrt{17}}$

$\left[\begin{array}{l} \sin 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}} \quad (1) \\ \sin 2\beta = -\frac{4}{\sqrt{17}} \quad (2) \end{array}\right.$

(1) $\sin 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}$

$\frac{\sin 2\alpha}{\sqrt{17}} + \frac{4\cos 2\alpha}{\sqrt{17}} = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha + 4\cos 2\alpha = -1$

$\sin^2 2\alpha + 16\cos^2 2\alpha + 8\sin 2\alpha \cos 2\alpha = 1$

$1 + 15\cos^2 2\alpha + 8\sin 2\alpha \cos 2\alpha = 1$

$\cos 2\alpha(15\cos 2\alpha + 8\sin 2\alpha) = 0$

$\left[\begin{array}{l} \cos 2\alpha = 0 \quad (а) \\ 15\cos 2\alpha + 8\sin 2\alpha = 0 \quad (б) \end{array}\right.$

(а) $\cos 2\alpha = 0$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$2\sin\alpha\cos\alpha + 2\cos^2\alpha - 1 + 3\cos 2\alpha = -1$

$2\sin\alpha\cos\alpha + 5\cos^2\alpha - 3\sin^2\alpha = 0$

$3\sin^2\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha - 5\cos^2\alpha = 0 \ / : \cos^2\alpha$

$\cos\alpha \neq 0$ (н/у)

$3tg^2\alpha - 2tg\alpha - 5 = 0$

$t = tg\alpha$

$3t^2 - 2t - 5$

$D = 4 + 4\cdot5\cdot3 = 8^2$

$\left[\begin{array}{l} t_1 = \frac{2+8}{2\cdot3} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3} \\ t_2 = \frac{2-8}{2\cdot3} = -1 \end{array}\right.$

$tg\alpha = \frac{5}{3}$

– два значения

$tg\alpha = -1$

② $\sin 2\beta = -\frac{4}{\sqrt{17}}$

$\frac{\sin 2\alpha}{\sqrt{17}} - \frac{4\cos 2\alpha}{\sqrt{17}} = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha - 4\cos 2\alpha = -1$

$2\sin\alpha\cos\alpha - (1 - 2\sin^2\alpha) - 3\cos 2\alpha = -1$

$2\sin\alpha\cos\alpha + 2\sin^2\alpha - 3\cos^2\alpha + 3\sin^2\alpha = 0$

$5\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha - 3\cos^2\alpha = 0 \ / : \cos^2\alpha$

$\cos\alpha \neq 0$

$5tg^2\alpha + 2tg\alpha - 3 = 0$

$D = 4 + 4\cdot3\cdot5 = 8^2$

$\left[\begin{array}{l} t_1 = \frac{-2+8}{10} = \frac{3}{5} \\ t_2 = \frac{-2-8}{10} = -1 \end{array}\right.$

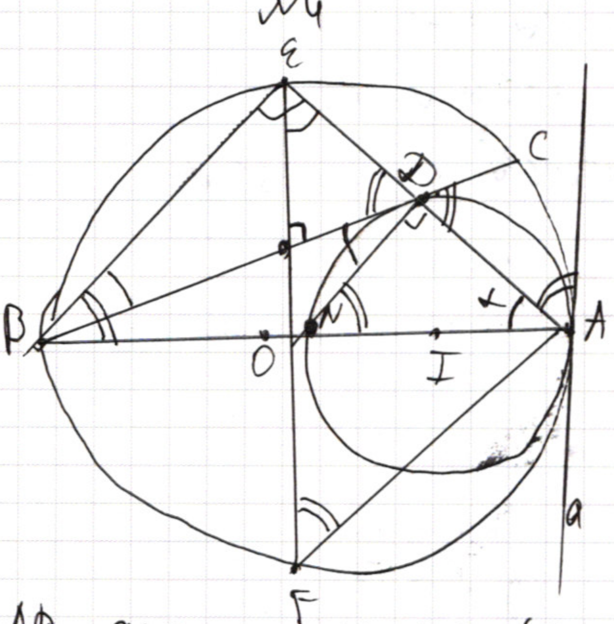
– еще одно значение $tg\alpha = \frac{3}{5}$

– уже было

☐ черновик ☒ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Ответ: $\left[\begin{array}{l} tg\,\alpha = -1 \\ tg\,\alpha = \frac{3}{5} \\ tg\,\alpha = \frac{5}{3} \end{array}\right.$

№4




$CD = 12$
$BD = 13$

Т.к. AB - диам, $AB \perp a$ ($a$ - кас, $A \in a$)

$\exists$ O - центр $\Omega$, I - ц. $\omega$ => $OA \perp a$, но $IA \perp a$ (кас) => по единств. пер-р; O, I, $A \in$ прям.

$ED \cdot DA = BD \cdot DC$ (пересек. хорды)

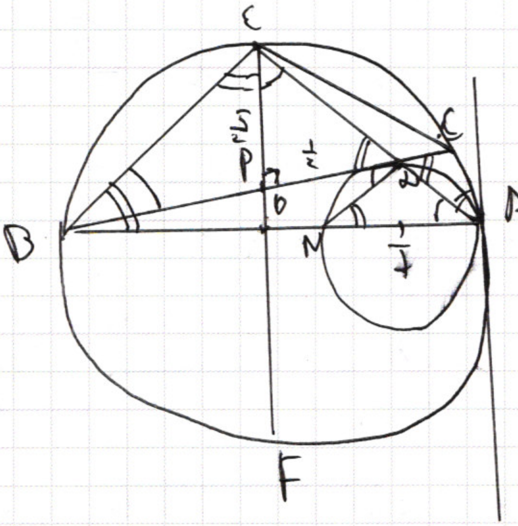
$BD^2 = BN \cdot BA$ ($BA \cap \omega = N$); $BN = 2R - 2r$; $BA = 2R$

($\exists$ R - рад $\Omega$; r - рад $\omega$) => $BD^2 = (2R-2r)2R = 4R(R-r)$

$\angle BEA = \angle NDA = 90°$ (опир на диам)

$\exists$ $\angle DAB = \alpha$ => $\angle BDN = \alpha$ ($\angle$ между кас и хордой) => $\angle DNA = 90 - \alpha$ => $\angle EBA = 90 - \alpha$; $\angle CDA = 180° - \angle NDA - \angle BDN = 90 - \alpha$ => $\angle EDB = 90 - \alpha$ (верт) => $\angle FEA = 180° - 90° - \angle EDB = \alpha$ => $\angle BEF = 90° - \angle FEA = 90° - \alpha$ => $\angle BEF = \angle BAF = 90 - \alpha$ (вписс) => $\angle EAF = 90°$ ($\angle EAB + \angle BAF$) => EF - диам. $\Omega$ (т.к. впис $\angle = 90°$) => $O \in EF$

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА




Р-м $\triangle BED$ и $\triangle NDA$

$\triangle BED \sim \triangle DNA$ (прямоуг, $\angle EBC = \angle DAN$) $\Rightarrow$

$$\frac{ED}{ND} = \frac{BD}{AN} = \frac{BE}{AD}$$

$$\frac{BD}{2r} = \frac{BE}{AD}$$

Р-м $\triangle BED$ и $\triangle EBA$ $\triangle BED \sim \triangle EBA$ (прямоуг; $\angle EBD = \angle EAB$)

$$\frac{BE}{EA} = \frac{BD}{AB} = \frac{ED}{BE} \Rightarrow \frac{BD}{\underset{2R}{AB}} = \frac{ED}{BE}$$

$$\frac{BD}{2r} = \frac{BE}{AD}; \quad \frac{BD}{2R} = \cancel{\frac{BA}{AB}}\ \frac{ED}{BE} \Rightarrow \frac{R}{r} = \frac{BE^2}{AD \cdot ED}$$

$AD \cdot ED = BD \cdot CD = 12 \cdot 13 \Rightarrow$

$$\frac{R}{r} = \frac{BE^2}{12 \cdot 13}$$ Р-м $\triangle BEC$: $BC \perp EF$ ($EF$ - диам) $\Rightarrow$

$\exists BC \cap EF = P \Rightarrow BP = PC$ (диам делит $\perp$ хорду пополам)

$\Rightarrow BP = \frac{BD + CD}{2} = \frac{25}{2} \Rightarrow PD = BD - BP = \frac{1}{2}$

$EP^2 = PB \cdot PD$ (метр). $EP = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \frac{25}{2}} = \frac{5}{2} \Rightarrow BE^2 = EP^2 + BP^2 \Rightarrow$

$$BE^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{25}{2}\right)^2 = \frac{25(1+25)}{4} = \frac{25 \cdot 26}{4}$$

$$\frac{R}{r} = \frac{25 \cdot \cancel{26}\,\cancel{2}^{1}}{4 \cdot \underset{6}{\cancel{12}} \cdot \underset{1}{\cancel{13}}} = \frac{25}{24}$$

$BD^2 = 4(R - r)R \qquad R - r = R - \frac{24}{25}R = \frac{1}{25}R$

$BD^2 = 4 \cdot \frac{1}{25} R^2$

$\frac{13^2 \cdot 25}{4} = R^2$ $\qquad R = \frac{13 \cdot 5}{4} = 21\frac{1}{4} = \frac{65}{4} = 21{,}25$

$r = \frac{\cancel{24}^{6}}{\cancel{25}_5} : \frac{\cancel{65}}{\cancel{4}_1} 13 = \frac{78}{5} = 15{,}6$

$ED^2 = EP^2 + PD^2$; $ED^2 = \frac{25}{4} + \frac{1}{4} = \frac{26}{4} \Rightarrow ED = \frac{\sqrt{26}}{2}$

$ED \cdot DA = BD \cdot DC = 12 \cdot 13 \Rightarrow AD = \frac{12 \cdot 13 \cdot 2}{\sqrt{26}} = \frac{12\sqrt{26}}{\cancel{\sqrt{26}}}$

$\Rightarrow EA = 12\sqrt{26} + \frac{1}{2}\sqrt{26} = \frac{25}{2}\sqrt{26}$

$2R = \frac{EA}{\sin\angle EFA} \Rightarrow \sin\angle EFA = \frac{EA}{2R} \Rightarrow \frac{25\sqrt{26}}{2 \cdot 2 \frac{65}{4}} = \frac{25\sqrt{26}}{65}$

$\angle EFA = \angle EBA = 90 - \alpha$ (внеш) $\Rightarrow \angle EFA = \angle EDB$;

$tg\angle EDB = \frac{EP}{PD} = \frac{5}{2} : \frac{1}{2} = 5 \Rightarrow \angle EFA = arctg\, 5$

$S_{EPD} = \frac{EP \cdot PD}{2} = \frac{\frac{5}{2} \cdot \frac{1}{2}}{2} = \frac{5}{8}$

$\frac{S_{EPD}}{S_{EFA}} = \left(\frac{ED}{EF}\right)^2 = \frac{26}{4} : \frac{65^2}{4^2} = \frac{\cancel{26} \cdot 4^{2}}{\cancel{65}\, 5 \cdot 65} = \frac{8}{5 \cdot 65} = \cancel{\frac{4}{26}} \Rightarrow$

$S_{EFA} = \frac{5}{8} \cdot \frac{5 \cdot 65}{8} = \frac{25 \cdot 65}{64} = \frac{1625}{64}$

Ответ: 1) $R = 21{,}25$

$r = 15{,}6$

2) $arctg\, 5$

3) $\frac{1625}{64}$

№3

$|x^2 - 26x|^{\log_{25} 12} + 26x \geq x^2 + 13^{\log_5 (26x - x^2)}$

☐ черновик ☒ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$D(y)$: $26-x^2>0 \Rightarrow$

$|x^2-26x| = 26x-x^2$

$t = 26x-x^2$

$t^{\log_5 12} \geq x^2-26x+13^{\log_5 t}$

$t^{\log_5 12} \geq -t+13^{\log_5 t}$

$a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$, т.к. $a^{\log_b c} = \frac{\log_a c}{\log_a b} \Rightarrow a^{\log_b c} =$

$= a^{\frac{\log_a c}{\log_a b}} = c^{\frac{1}{\log_a b}} = c^{\log_b a}$ ч.т.д. $\Rightarrow$

$13^{\log_5 t} = t^{\log_5 13}$

~~$t^{\log_5 12} + t - t^{\log_5 13} \geq 0$~~

$t^{\log_5 12} + t - t^{\log_5 13} \geq 0 \quad |:t$

$t = 26x-x^2$ по $D(y) > 0 \Rightarrow$

$t^{\log_5 \frac{12}{5}} - t^{\log_5 \frac{13}{5}} + 1 \geq 0 \quad |\cdot(-1)$

$t^{\log_5 \frac{13}{5}} - t^{\log_5 \frac{12}{5}} \leq 1$

$t^{\log_5 \frac{12}{5}}\left(t^{\log_5 \frac{13}{5} - \log_5 \frac{12}{5}} - 1\right) \leq 1$

$t^{\log_5 2,4}\left(t^{\log_5 \frac{13}{12}} - 1\right) \leq 1$

$\log_5 13 = \frac{\log_t 13}{\log_t 5}$

$12^{\frac{1}{\log_t 5}}$

☐ черновик ☒ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

$$t^{\frac{\log_t \frac{13}{5}}{\log_t 5}} - t^{\frac{\log_t \frac{12}{5}}{\log_t 5}} \le 1$$

$$\left(\frac{13}{5}\right)^{\log_5 t} - \cancel{t}\,\frac{12}{5}^{\log_5 t} \le 1$$

$a = \log_5 t$

$2{,}6^a - 2{,}4^a \le 1$

$a \le 2 \quad \left( \left(\frac{13}{5}\right)^a - \left(\frac{12}{5}\right)^a \le 1 \quad \frac{13^a - 12^a}{5^a} \le 1 \right.$

$13^a - 12^a \le 5^a \Leftrightarrow \underline{a \le 2}$

$\log_5 t \le 2$

$\boxed{0 < t \le 25}$

$0 < 26x - x^2 \le 25$

$x^2 - 26x + 25 \ge 0$

~~$D = 26^2 - 4 \cdot 25$~~

$x_1 = 1$

$x_2 = 25$

ОДЗ

$x \in (0; 1] \cup [25; +\infty)$

Ответ: $x \in (0; 1] \cup [25; +\infty)$

№5

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$b = 1 \Rightarrow f(a \cdot 1) = f(a) + f(1) \Rightarrow f(1) = 0 \quad (!)$

~~$f(a) = f(a \cdot \frac{1}{a})$~~

$f(1) = f(a) + f\left(\frac{1}{a}\right) = 0 \Rightarrow f\left(\frac{1}{a}\right) = -f(a)$

☐ черновик ☒ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

найдем $f(x)$ для всех $x$ 4 ... 28

$f(4) = f(2) + f(2) = 0$

$f(5) = 1$

$f(6) = 0$

$f(7) = 1$

$f(8) = f(2) + f(4) = 0$

$f(9) = f(3) + f(3) = 0$

$f(10) = f(2) + f(5) = 1$

$f(11) = f(11) = 2$

$f(20) = f(4) + f(5) = 1$

$f(21) = f(3) + f(7) = 1$

$f(22) = f(2) + f(11) = 2$

$f(27) = f(3) \cdot f(9) = 0$

$f(12) = f(3) + f(4) = 0$

$f(13) = 3$

$f(14) = f(2) + f(7) = 0 + 1 = 1$

$f(15) = f(3) + f(5) = 1$

$f(16) = 0$

$f(17) = 4$

$f(18) = f(2) + f(9) = 0$

$f(19) = 4$

$f(23) = 5$

$f(24) = f(4) + f(1) = 0$

$f(25) = f(5) \cdot f(5) = 1$

$f(26) = f(2) + f(13) = 3$

$f(28) = f(4) \cdot f(7) = 1$

Р-ни 5; 7; 10; 11; 13; 14; 15; 17; 19; 20; 21; 22; 23; 25; 26; ~~27~~; 28 — таких 16 чисел, т.к. доказано, что $f(x) = -f\left(\frac{1}{x}\right)$, то $f(x/y) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) =$

$= f(x) - f(y) \Rightarrow$ ~~можно выразить любые числа x, y из данных, кроме x = y~~

а вариантов $f(x) = 0$, таких 9 чисел, и берем $f(y) > 0 \Rightarrow 9 \cdot 16$

$f(x) > 0$, то $f(y) > f(x)$

Сколько $x \in [4; 28]$

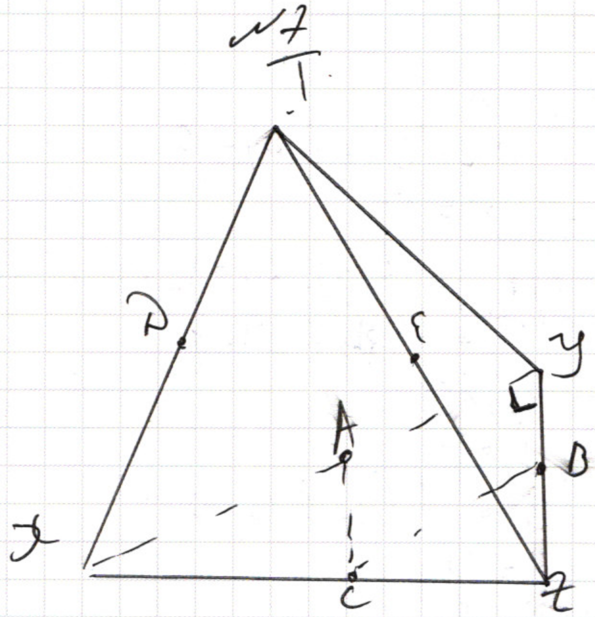
| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x) =$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| | 9 | 2 | 2 | 2 | 1 $\Rightarrow$ |

таких $9 \cdot 7 + 2 \cdot 5 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 1 = \boxed{81}$

всего $81+9\cdot16=81+144=225$

Ответ: 225

№7




A - у. XY, B - у. YZ, C - у. XZ, D - у. XT, E - у. TZ $\Rightarrow$ около A, B, C, E, D, Y можно описать сферу, т.к. A, Y, B, C $\in$ плоскости $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ A, Y, Z, C - впис чет $\Rightarrow$ $\begin{cases} \angle CBZ = \angle XYZ \\ \angle XAC = \angle XYZ \end{cases}$ (AC, CB - ср. лин)

$\angle CAY + \angle CBY = 180°$ (AYBC - впис) $\Rightarrow$

$360 - 2\angle XYZ = 180° \Rightarrow \boxed{\angle XYZ = 90°}$

$\triangle XYZ$ - прямоуг.

$\begin{array}{r} 28 \\ \times 18 \\ \hline 224 \\ 28 \\ \hline 504 \\ \times\ 4 \\ \hline 2016 \end{array}$

$\frac{8-6x}{3x-2}=0 \quad x=\frac{8}{6}=\boxed{\frac{4}{3}}$

$= \boxed{-2+\frac{4}{3x-2}} > -2 \qquad x > \frac{2}{3}$

$\cancel{8-6x+1} \qquad -6x+8 \mid 3x-2 \qquad -6x+4 \mid -2 \qquad 4 \qquad \frac{2}{3}$

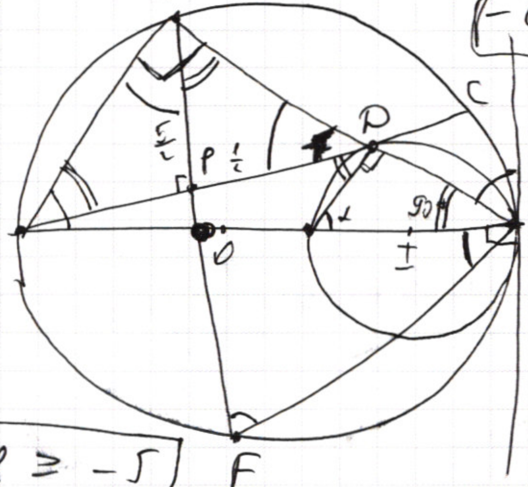
$x=2$

$\boxed{-2+\frac{4}{4} > -1}$

$CD=12$

$BD=13$

$x_0=\frac{51}{2\cdot18}=\frac{51}{36}=1\frac{15}{36}$



$BD\cdot CD = ED\cdot DA$

$BD^2=(2R-2r)\cdot 2R$

$18+28=46 \quad -51$

$\frac{2r}{2R}=\frac{AD}{AE}=\frac{AD}{ED+DA}$

$\boxed{2 \ge a+b \ge -5}$

$0 \ge \frac{4}{3}a+b \qquad -1 \ge 2a+b$

$\cancel{\frac{BD}{2R}=\frac{ED}{BE}=BE} \qquad \frac{BD}{2R}=\frac{ED}{BE}$

$BC \cap EF = P \qquad BP=PC$

$0 \ge$

$\frac{BD}{2r}=\cancel{\frac{ED}{DA}}\ \frac{BE}{DA}$

$-\ \frac{25}{2}$

$PD=13-\frac{25}{2}=\frac{1}{2}$

$\frac{BP}{EP}=\frac{PD}{EP}=$

$EP^2=\frac{25}{2}\cdot\frac{1}{2}$

$EP=\frac{5}{2}$

$\frac{2r}{2R}=\frac{DA\cdot ED}{BE\cdot BE}=\frac{BD\cdot DC}{BE^2}$

$BE^2=\frac{25}{4}+\frac{25^2}{4}=\frac{25(25+1)}{4}=\frac{25\cdot26}{4}$

$\begin{array}{r} 51 \\ \times 51 \\ \hline 51 \\ 255 \\ \hline 2601 \\ -2016 \\ \hline \boxed{585} \end{array}$

$\frac{r}{R}=\frac{12\cdot13\cdot4}{25\cdot26}=\frac{24}{25}$

$12\cdot13=4(\cancel{R-\frac{r}{2}})\ \frac{1}{25}R\cdot R$

$39\cdot25=R^2$

$\boxed{R=5\sqrt{39}}$

$ED+DA=$

$18x^2+51x+28=0$

$D=51^2-4\cdot28\cdot18$

$\frac{8-6x}{3x-2} \ge ax+b \ge 18x^2+51x+28$

$\frac{18\cdot 3^2}{25}-16\cdot\frac{3}{5}-15$

- [x] черновик
- [ ] чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$1 = \sqrt{|x-1|}$

$(x-1)(y-6)$

$|x-1| = 1$

$x = 2 \quad x = 0$

$\sqrt{|y-6|} = 3$ — проверение угуши

$y - 6 = 9$

$y = 15 \quad y = -3$

$|x^2 - 26x|^{\log_5 12} + 26x \geq x^2 + 13^{\log_5(26x - x^2)}$

$|x^2 - 26x|^{\log_5 12} \geq x^2 - 26x + 13^{\log_5(26x - x^2)}$

$t = x^2 - 26x$

$|t|^{\log_5 12} \geq t + 13^{\log_5 -t}$

$D(y)$ : $t < 0 \qquad a = -t$

$a^{\log_5 12} \geq -a + 13^{\log_5 a}$

$a^{\log_5 12} + a - 13^{\log_5 a} \geq 0$

$a^{\log_a c} =$

$\log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b}$

$\cancel{a^{\log_5 12}} + a^{\log_5 5}$

$= a^{\frac{\log_a c}{\log_a b}} =$

$a(1 + \cancel{\log} a^{\log_5 12 - 1}) - 13$

$= c^{\frac{1}{\log_a b}} = \boxed{c^{\log_b a}}$

$13^{\log_5 a} = a^{\log_5 13}$

$a^{\log_5 12} + a - a^{\log_5 13} \geq 0$

$a^{\log_5}$

$a^{\log_5 5} + a$

$a^{\cancel{\log}}$

$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} =$

$\boxed{\sin 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}}$

$\frac{\sin 2\alpha}{\sqrt{17}} + \frac{\cos 2\alpha\, 4}{\sqrt{17}} = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha + 4\cos 2\alpha = -1$ ?

$2\sin\alpha\cos\alpha + 4 - 8\sin^2\alpha = -1$

$\sin^2 2\alpha + 16\cos^2 2\alpha + \underbrace{8\sin 2\alpha\cos 2\alpha}_{4\sin 4\alpha} = 1$

$15\cos^2 2\alpha + 4\sin 4\alpha = 0$

$\cos 2\alpha(15\cos 2\alpha + 4) = 0$

$\left[\begin{array}{l}\cos 2\alpha = 0\\ 15\cos 2\alpha + 4 = 0\end{array}\right.$

$\boxed{\cos 2\alpha = 0}$

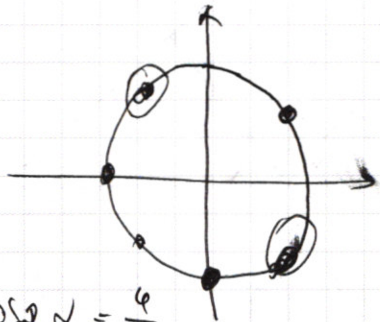
$2\alpha = \pi k + \frac{\pi}{2}$

$2\alpha = \pi k + \frac{\pi}{2}$

$\alpha = \frac{\pi k}{2} + \frac{\pi}{4}$

$tg\,\alpha = 1$

$tg\,\alpha = -1$



$\cos 2\alpha = \frac{4}{15}$

$2\cos^2\alpha - 1 = \frac{4}{15}$

$\cos^2\alpha = \frac{19}{30}$

$\frac{48}{30}$

$\sin 2\alpha = -1$

$2\alpha = 2\pi k - \frac{\pi}{2}$

$\alpha = \frac{\pi k}{2}$

$\alpha = \pi k - \frac{\pi}{4}$

$\boxed{-1}$

$\cos 2\alpha = -\frac{4}{15}$

$\cos^2\alpha - 1 = -\frac{4}{15}$

$\cos^2\alpha = \frac{11}{15}$

$\cos\alpha =$

$tg\alpha =$

$a^2 - (a-2)(a-2) =$

$= a^2 - (a^2 - 4a + 4)$

$= 4a - 4$

$$\begin{array}{r} 25\\ \times\ 65\\ \hline 125\\ 150\ \\ \hline 1625 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 34\\ \times\ 36\\ \hline 136\\ 102\ \\ \hline 1156 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 15\\ \times\ 60\\ \hline 900\\ +\ 256\\ \hline 1156 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 36\\ \times\ 36\\ \hline 216\\ 108\ \\ \hline 1296 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 34\\ \times\ 34\\ \hline 136\\ 102\ \\ \hline 1156 \end{array}$$

$2{,}6^a - 2{,}4^a = 1$

$\frac{13^a - 12^a}{5^a} = 1$

$13^a - 12^a = 5^a$

$4 \cdot 36 - 4 =$

☒ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

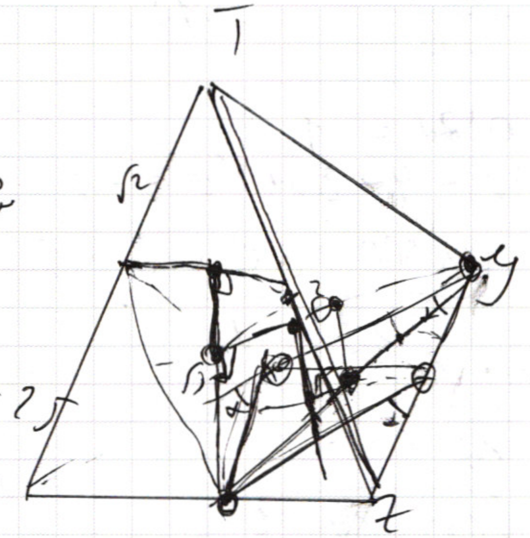
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$4 \le x \le 28$




$28-(4+1)=25$

$25-16$

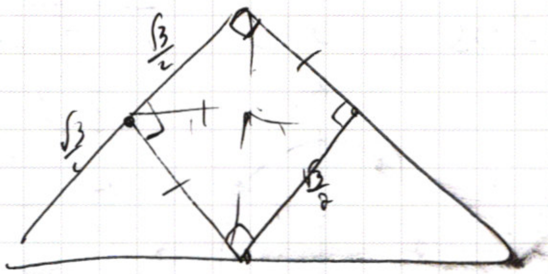
$xy=\sqrt{7}$

$Tx=\sqrt{2}$

$360-2\alpha=180°$

$\alpha=90°$

$9-18$




$\frac{\cancel{90}\,18}{\cancel{25}\,5}$

$16+9=25$

$f(a\cdot b)=f(a)+f(b)$

$f(1)=0$

$f(a)+f(b)$

$f(ab)=f(a)+f(b)$

$6\sqrt{\frac{18}{5}}-4\sqrt{\frac{18}{5}}=2\sqrt{\frac{18}{5}}$

$\sqrt{2}$

$2;\ 15$

$15-12=\sqrt{30-12-15+\ldots}$

$v^2=6-y$

$6u^2=6-6x$

$6u^2-v^2$

$2\sqrt[4]{\frac{18}{5}}\sqrt[4]{\frac{18}{5}}=2\sqrt{\frac{18}{5}}$

$36+15^2-18\cdot2-12\cdot15=$

$=18(15-12)=45(6)$

$9\cdot\frac{18}{5}+\frac{18}{5}\cdot16=$

$=25\cdot\frac{18}{5}=90$

144

$\begin{array}{r}144\\+\ 81\\\hline 225\end{array}$

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6}$

$9x^2+y^2-18x-12y=45$

$\sin 2\alpha + 2\sin^2\alpha - 1 + 3\cos^2\alpha = 0$

$2\sin\alpha\cos\alpha + \cancel{8}\sin^2\alpha + 3\cos^2\alpha = 0$

$-t^2+2t+3=0$

$xy-6x-y+6=x(y-6)-(y-6)=(y-6)(x-1)$

$9x^2+y^2-18x-12y=45$

$t^2-2t-3=0$

$D=4+12=4$

$t_1=\frac{2+4}{}=3$

$t_2=\frac{2-4}{2\cdot 3}=-1$

$\cancel{9(x^2-2x+1)}$

$9(x)(x-2)+y(y-12)=45$

$\cancel{9x}\ (3x-3)^2+(y-6)^2=45+9+36$

$\cancel{9x^2-18x+9+y^2-12y+36}$

$9(x-1)^2+(y-6)^2=\cancel{45+45}=90$

$u=\sqrt{x-1}$

$v=\sqrt{y-6}$

$$\begin{cases} 9u^4+v^4=90 \\ v^2-6u^2=uv \end{cases}$$

$y-6x \quad u^2=x-1$

$v^2-6u^2=$

$=y-6-6(x-1)=$

$=y-6x$

$v^2-6u^2-uv=0 \quad /:u^2$

$\left(\frac{v}{u}\right)^2-\frac{v}{u}-6=0 \qquad t=\frac{v}{u}$

$\frac{v}{u}=3$

$t^2-t-6=0$

$D=1+24=5^2$

$$\left[\begin{aligned} t_1 &= \frac{1+5}{2}=3 \\ t_2 &= \frac{1-5}{2}=-2 \end{aligned}\right.$$

$D=4+60=8$

$t_1=\frac{10}{6}=\frac{5}{3}$

$t_2=\frac{2-8}{6}=-1$

$v=3u$

$\cancel{9\cdot 3^4 u}$

$9u^4+81u^4=90$

$90u^4=90$

$u^4=1$

$u=\pm 1 \quad v=\pm 3$

$2\sin\alpha\cos\alpha+5\cos^2\alpha-3\sin^2\alpha=0 \quad 3t^2-2t-5=0$

$-3t^2+2t+5=0$

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=\frac{-2}{17}$

$\sin(2\alpha+2\beta)=\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta+\cos 2\alpha\sin 2\beta=-\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha+4\beta)=\sin 2\alpha\cdot\cos 4\beta+\boxed{\cos 2\alpha\cdot\sin 4\beta}+\sin 2\alpha=-\frac{2}{17}$

$\cos 4\beta=1$ $\sin\alpha$ - определен

~~$\sin 2\alpha =$~~

$\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1$

$\cos\alpha\neq 0\Rightarrow$

$\cos\alpha$ - два значения

$\sin 2\alpha(\cos 4\beta+1)=$ $\Rightarrow$ $\cos 2\alpha$ - также принимает $\geq 2$ значений

$\cos 4\beta=2\cos^2 2\beta-1$

$=\sin 2\alpha\cdot 2\cos^2 2\beta=2\sin 2\alpha\cdot\cos^2 2\beta+$

$+\cos 2\alpha\cdot\sin 4\beta=$

$=2\cos 2\beta\underbrace{(\sin 2\alpha\cos 2\beta+\cos 2\alpha\cdot\sin 2\beta)}_{-\frac{1}{\sqrt{17}}}=-\frac{2}{17}$

$2\cos 2\beta$

$2\cos 2\beta=-\frac{2}{17}:-\frac{1}{\sqrt{17}}=\frac{2}{17}\cdot\sqrt{17}=\frac{2}{\sqrt{17}}$

$\cos 2\beta=\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha\frac{1}{\sqrt{17}}+\cos 2\alpha\cdot\frac{4}{\sqrt{17}}=-\frac{1}{17}$

$\sin 2\beta=\sqrt{1-\frac{1}{17}}=\frac{\pm 4}{\sqrt{17}}$

$\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sqrt{17}}+\frac{4(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)}{\sqrt{17}}=-\frac{1}{17}$

$2\sin\alpha\cos\alpha+4(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)=-\frac{1}{\sqrt{17}}$

$+2\sin\alpha\cos\alpha+4(2\cos^2\alpha-1)=-\frac{1}{\sqrt{17}}$

$8\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha-4+\frac{1}{\sqrt{17}}=0$

$\frac{18\cdot 4}{9}-17\cdot\frac{2}{3}+28$

$8-17+28=\boxed{19}$ $\boxed{\frac{2}{3}a+b=19}$

☒ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

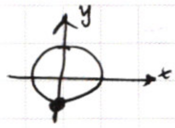
(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\begin{cases} \sin 2\alpha = -1 \\ \cos 2\alpha = 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2\alpha = 2\pi k - \frac{\pi}{2}$

$\alpha = \pi k - \frac{\pi}{4} \Rightarrow$

$tg\,\alpha = -1$ - однозначение



(б) $15\cos 2\alpha + 8\sin 2\alpha = 0$

$15\cos^2\alpha - 15\sin^2\alpha + 16\sin\alpha\cos\alpha = 0$

$\cos\alpha \neq 0$ (н/у) $\Rightarrow$

$15 - 15tg^2\alpha + 16tg\,\alpha = 0$

$t = tg\,\alpha$

$15t^2 - 16t - 15 = 0$

$D = 16^2 + 4\cdot15\cdot15 = 32^2$

$\left[\begin{array}{l} t_1 = \frac{16+32}{30} = \frac{\cancel{48}\,24}{\cancel{30}\,15} = \frac{24}{15} \text{ — второе знач } tg\alpha = \frac{24}{15} \\ t_2 = \frac{16-32}{30} = \frac{\cancel{-16}\,8}{\cancel{30}\,15} = -\frac{8}{15} \text{ — первое знач } tg = -\frac{24}{15} \end{array}\right.$

(2) 2) $\sin 2\beta = -\frac{4}{\sqrt{17}}$

$\frac{\sin 2\alpha}{\sqrt{17}} - \frac{4\cos 2\alpha}{\sqrt{17}} = -\frac{1}{\sqrt{17}} \quad |\cdot\sqrt{17}$

$\sin 2\alpha - 4\cos 2\alpha = -1$

$\sin^2 2\alpha + 16\cos^2 2\alpha - 8\cos 2\alpha\sin 2\alpha = 1$

$15\cos^2 2\alpha - 8\cos 2\alpha\sin 2\alpha = 0$

~~cos 2β(~~

$\cos 2\alpha(15\cos 2\alpha - 8\sin 2\alpha) = 0$

$\left[\cos 2\alpha = 0\right.$ (а)

☒ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$15\cos 2\alpha - 8\sin 2\alpha = 0$ б

а) $\begin{cases} \cos 2\alpha = 0 \\ \sin 2\alpha = -1 \end{cases}$

$2\alpha = 2\pi k - \frac{\pi}{2}$

$\alpha = \pi k - \frac{\pi}{4}$

$tg\,\alpha = -1$

б) $15\cos 2\alpha - 8\sin 2\alpha = 0$

$15\cos^2\alpha - 15\sin^2\alpha - 16\sin\alpha\cos\alpha = 0 \quad |:\cos^2\alpha$

$\cos\alpha \neq 0 \Rightarrow$

$15 - 15\,tg^2\alpha - 16\,tg\,\alpha = 0$

$t = tg\,\alpha$

$15t^2 + 16 - 15 = 0$

$D = 16^2 + 4\cdot 15\cdot 15 = 32^2$

$t_1 = \frac{-16+32}{30} = \frac{\cancel{16}\,8}{\cancel{30}\,15} = \frac{8}{15}$

$t_2 = \frac{-16-32}{30} = -\frac{\cancel{48}\,24}{\cancel{30}\,15} = -\frac{24}{15}$

☒ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)