МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 3 ШИФР ______

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{8}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases}3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2},\\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4.\end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x\geqslant |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{5}{2}$, $BD=\frac{13}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $3\leqslant x\leqslant 27$, $3\leqslant y\leqslant 27$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{4x-3}{2x-2}\geqslant ax+b\geqslant 8x^2-34x+30$$

выполнено для всех x на промежутке $(1;3]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $PQRS$, вершина P которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра PQ. Известно, что $QR=2$, $QS=1$, $PS=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра RS. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 1.

Рассмотрим первое равенство системы (i):

$$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \Leftrightarrow \sin 2\alpha\cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}} \overset{(ii)}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin 2\alpha \cdot \frac{4}{\sqrt{17}} + \cos 2\alpha \cdot \frac{1}{\sqrt{17}} = -\frac{1}{\sqrt{17}}, \\ \sin 2\alpha \cdot \frac{4}{\sqrt{17}} - \cos 2\alpha \cdot \frac{1}{\sqrt{17}} = -\frac{1}{\sqrt{17}} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1, \\ 4\sin 2\alpha - \cos 2\alpha = -1. \end{array}\right.$$

С такими выражениями работать неудобно, лучше из (ii)&(i) просто найдём 2β:

$$2\beta = \pm\arccos\frac{4}{\sqrt{17}} \quad \text{или} \quad \left\{ 2\beta = \left[\begin{array}{l} \arcsin\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \pi - \arcsin\frac{1}{\sqrt{17}} \end{array}\right. \right. \quad (iii)$$

Снова к первому равенству системы (i):

$$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\alpha+2\beta = \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right), \\ 2\alpha+2\beta = \pi - \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right) \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\alpha+2\beta = -\arcsin\frac{1}{\sqrt{17}}, \\ 2\alpha+2\beta = \pi + \arcsin\frac{1}{\sqrt{17}} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow$

1) $$2\beta = \left[\begin{array}{l} \arccos\frac{4}{\sqrt{17}} + 2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}, \\ -\arccos\frac{4}{\sqrt{17}} + 2\pi k,\ k\in\mathbb{Z} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\beta = \left[\begin{array}{l} \arcsin\frac{1}{\sqrt{17}} + 2\pi n, \\ -\arcsin\frac{1}{\sqrt{17}} + 2\pi k. \end{array}\right. \quad (iii)$$

Задача 2

$$\begin{cases} 3y - 2x = \sqrt{3xy - 2x - 3y + 2}, \\ 3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3y - 2x = \sqrt{(x-1)(3y-2)}, \\ 3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3y \geq 2x, \\ 9y^2 + 4x^2 - 12xy = 3xy - 2x - 3y + 2, \\ 3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3y \geq 2x, \\ 9y^2 + 4x^2 - 15xy + 2x + 3y = 2, \\ 3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 4 \end{cases} \Rightarrow \cancel{3y \geq 2x, \quad \left(3y + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} -}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3y \geq 2x, \\ \left(3y + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + \left(2x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 15xy = 2, \\ (3x - 3)^2 - 9 + (3y - 2)^2 - 4 = 12 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3y \geq 2x, & (i) \\ \left(3y + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(2x + \frac{1}{2}\right)^2 - 15xy = 2 + \frac{1}{2}, & (ii) \\ (3x - 3)^2 + (3y - 2)^2 = 25 & (iii) \end{cases}$$

Попробуем тригонометрическую замену ($\varphi \in [0, 2\pi[$):

$$\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{3x - 3}{5}, \\ \sin\varphi = \dfrac{3y - 2}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - 3 = 5\cos\varphi, \\ 3y - 2 = 5\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{5\cos\varphi + 3}{3}, \\ y = \dfrac{5\sin\varphi + 2}{3}. \end{cases}$$

Так (iii) заведомо выполняется. Подставим в (i):

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 1.

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}, \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{8}{17} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cancel{\sin 2\alpha\cos 2\beta+\cos 2\alpha\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}}, \\ \cancel{\sin 2\alpha\cos 4\beta+\cos 2\alpha\sin 4\beta+\sin 2\alpha = -\frac{8}{17}} \end{cases}$$

$$\overset{(*)}{\Rightarrow} \begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}, \\ 2\sin\left(\frac{2\alpha+4\beta+2\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{2\alpha+4\beta-2\alpha}{2}\right) = -\frac{8}{17}. \end{cases} \Rightarrow$$

(*): при переходе во втором равенстве пользовались известной тригонометрической формулой:

$$\sin x+\sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}, \\ \sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = -\frac{4}{17} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}, \\ \left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right)\cos 2\beta = \cancel{-\frac{4}{\sqrt{17}}} = -\frac{4}{17} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin 2(\alpha+\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}, \\ \cos 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}; \end{cases} \quad (i)$$

Из второго равенства системы (i) следует, что

$$\sin 2\beta = \pm\sqrt{1-\frac{16}{17}}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\sin 2\beta = \pm\frac{1}{\sqrt{17}}. \quad (ii)$$

Запоминаем результат (ii).

$\boxed{1}$

$\cancel{\sin t + \sin}$

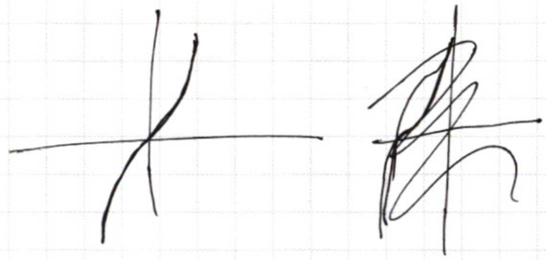
$\sin\alpha + \sin\beta = [\ ?\ ] = \sin(t+y) + \sin(t-y) =$

$?\ \begin{cases} \alpha = t+y, \\ \beta = t-y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{\alpha+\beta}{2} \\ y = \frac{\alpha-\beta}{2} \end{cases}$

$= \sin t\cos y + \underline{\cos t\sin y} + \sin t\cos y - \underline{\cos t\sin y} = 2\sin t\cos y =$

$= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$

$\arccos\sqrt{1-t^2} = \varphi = \cancel{\alpha} = \varphi$



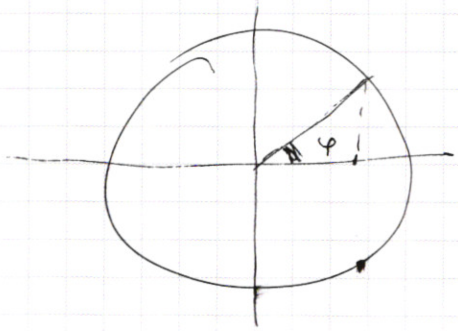
$\cos\varphi = \sqrt{1-t^2}$

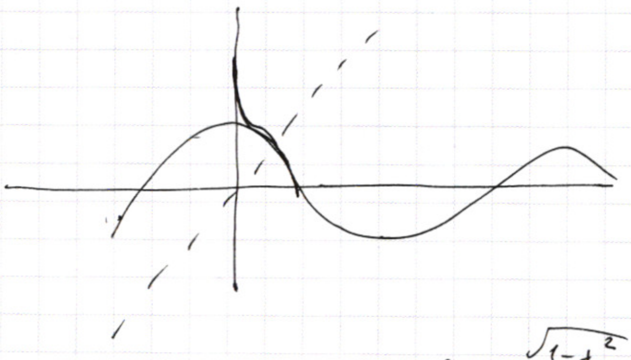
$\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$

$1 - t^2 + \sin^2\varphi = 1$

$\sin^2\varphi = t^2$

$\left[\begin{array}{l} \sin\varphi = t \\ \sin\varphi = -t \end{array}\right. \Rightarrow \cancel{\arcsin\varphi}\ \left[\begin{array}{l} \varphi = \arcsin t \\ \varphi = \pi - \arcsin t \\ \varphi = -\arcsin t \\ \varphi = \pi + \arcsin t \end{array}\right.$





$\cancel{tg}$

$\arcsin t = \varphi$

$\sin\varphi = t$

$\sin^2\varphi = t^2$

$\frac{1}{\sin^2\varphi} = \frac{1}{t^2}$

$\frac{1}{\sin^2\varphi} = \frac{1}{t^2}$

$1 + ctg^2\varphi = \frac{1}{t^2}$

$ctg^2\varphi = \frac{1}{t^2} - 1 = \frac{1-t^2}{t^2}$

$ctg\,\varphi = \frac{\sqrt{1-t^2}}{t}$

$tg\,\varphi = \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}$

☒ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 1

Возращаемся к первому равенству системы (i)

$$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\alpha+2\beta = -\arcsin\frac{1}{\sqrt{17}} + 2\pi q \quad (iii) \\ 2\alpha+2\beta = \pi + \arcsin\frac{1}{\sqrt{17}} + 2\pi r, \quad q, r \in \mathbb{Z} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\alpha + \arcsin\frac{1}{\sqrt{17}} = -\arcsin\frac{1}{\sqrt{17}} + 2\pi q_1, \\ 2\alpha - \arcsin\frac{1}{\sqrt{17}} = -\arcsin\frac{1}{\sqrt{17}} + 2\pi q_2, \\ 2\alpha + \arcsin\frac{1}{\sqrt{17}} = \pi + \arcsin\frac{1}{\sqrt{17}} + 2\pi q_3, \\ 2\alpha - \arcsin\frac{1}{\sqrt{17}} = \pi + \arcsin\frac{1}{\sqrt{17}} + 2\pi q_4, \quad q_i \in \mathbb{Z}\ \forall i = \overline{1,4}. \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \alpha = -\arcsin\frac{1}{\sqrt{17}} + \pi q_1, \\ \alpha = \pi q_2, \\ \alpha = \frac{\pi}{2} + \pi q_3, \\ \alpha = \frac{\pi}{2} + \arcsin\frac{1}{\sqrt{17}} + \pi q_4 \end{array}\right. \qquad \forall q_3 \nexists \operatorname{tg}\alpha \Longleftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \alpha = -\arcsin\frac{1}{\sqrt{17}} + \pi q_1, \\ \alpha = \pi q_2, \\ \alpha = \frac{\pi}{2} + \arcsin\frac{1}{\sqrt{17}} + \pi q_4 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \operatorname{tg}\alpha = -\operatorname{tg}\arcsin\frac{1}{\sqrt{17}}, \\ \operatorname{tg}\alpha = 0, \\ \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{1}{\sqrt{17}} + \frac{\pi}{2}\right) \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \operatorname{tg}\alpha = -\dfrac{\frac{1}{\sqrt{17}}}{\sqrt{1-\frac{1}{17}}} \\ \operatorname{tg}\alpha = 0 \\ \operatorname{tg}\alpha = -\operatorname{ctg}\arcsin\frac{1}{\sqrt{17}} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \operatorname{tg}\alpha = -\dfrac{1}{\sqrt{17-1}}, \\ \operatorname{tg}\alpha = 0 \\ \operatorname{tg}\alpha = -\dfrac{\sqrt{1-\frac{1}{17}}}{\frac{1}{\sqrt{17}}} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$3xy - 2x - 3y + 2 = 3y(x-1) - 2(x-1) =$

$= (x-1)(3y-2)$

$\begin{cases} 3y - 2x \geq 0, \\ (x-1)(3y-2) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow 3y \geq 2x$

работает

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} (x-1) \geq 0 \\ (3y-2) \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} (x-1) \leq 0 \\ (3y-2) \leq 0 \end{cases} \end{array} \right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq 1, \\ 3y \geq 2, \end{cases} \\ \begin{cases} x < 1, \\ 3y \leq 2 \end{cases} \end{array} \right.$

$\sqrt{\frac{2}{5}} \cdot 5 = \sqrt{10} - \sqrt{\frac{5}{2}} = \sqrt{10} - \frac{\sqrt{10}}{2} = \frac{\sqrt{10}}{2}$

$39 \times 5 = 195$

? $\begin{cases} 3y \geq 2x \\ x < 1 \\ 3y \leq 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3y \geq 2x, \\ 2x < 2, \\ 3y \leq 2 \end{cases}$

ну бывает, да.

$(3y - 2x)^2 = 9y^2 + 4x^2 - 12xy$

$6x + 4y + 4 \geq 0$

$3x + 2y + 2 \geq 0$

$3x$

$3(x+y) + 2(y-x) + 2 \geq 0$

$12 + 13 = 25$

$-\sqrt{10} + \frac{\sqrt{10}}{2}$

Одновременно:

$\begin{cases} 3x + 2y + 2 \geq 0, \\ 3y - 2x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y + 3x + 2 \geq 0, \\ 3y - 2x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow$

$-12y$

$3y \cdot 2 = 6y \; / -2$

① $\Rightarrow \begin{cases} 4y + 6x + 4 \geq 0, \\ 9y - 6x \geq 0 \end{cases} \rightarrow \boxed{13y + 4 \geq 0}$

$13y \geq -4$

① $\Rightarrow$ $6y + 9x + 6 \geq 0,$

$6y -$

$-18x$

$3x \cdot 2 = 6x \; / (-3)$

$(3y + \frac{1}{2})^2 = 9y^2 + \frac{1}{4} + 3y$

☒ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 2.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b \geq 2a, \\ (b-2a)^2 = ab, \\ 9a^2+b^2=25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b \geq 2a, \\ b^2+4a^2-5ab=0, \\ 9a^2+b^2=25; \end{cases}$$

Из последних двух уравнений выведем что-то:

1) $$-\begin{cases} b^2+4a^2=5ab, \\ 9a^2+b^2=25 \end{cases} \Rightarrow 5a^2 = 25-5ab \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 = 5-ab,$$

2) $$\begin{cases} b^2+4a^2=5ab, & /\cdot 9 \\ 9a^2+b^2=25 & /\cdot 4 \end{cases} \Rightarrow -\begin{cases} 9b^2+36a^2=45ab, \\ 36a^2+4b^2=100 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5b^2 = 45ab-100 \Rightarrow b^2 = 9ab-20.$$

По идее пара уравнений

$$\begin{cases} a^2 = 5-ab, \\ b^2 = 9ab-20 \end{cases}$$

Эквивалента паре той, т. к. возможно получить их обратно.
Поэтому такая вещь:

$$\begin{cases} b \geq 2a, \\ a^2+ab=5, \\ b^2-9ab=-20. \end{cases} \overset{\text{если } a\neq 0}{\Leftrightarrow} \begin{cases} b \geq 2a, & (iv) \\ b = \frac{5}{a}-a, & (v) \\ b^2-9ab=-20 & (vi) \end{cases}$$ работаем с последним (vi) $\Rightarrow$

{Проверим, возможно ли, что $a=0 \Leftrightarrow x=1$?
Если $x=1$, то с данным уравнением беда сразу будет.

$$\Rightarrow \left(\frac{5}{a}-a\right)^2 - 9a\left(\frac{5}{a}-a\right) = -20$$

$$\frac{25}{a^2}+a^2-10-45+9a^2=-20$$

Задача 2

$$10a^2 + \frac{25}{a^2} - 35 = 0$$

$$2a^2 + \frac{5}{a^2} - 7 = 0 \quad \Big| \text{ т.к. } a \neq 0$$

$$2a^4 - 7a^2 + 5 = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} a^2 = 1, \\ a^2 = \frac{5}{2} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} a = 1, \\ a = -1, \\ a = \sqrt{\frac{5}{2}}, \\ a = -\sqrt{\frac{5}{2}}; \end{array}\right.$$

И вот эти значения соответственно подставим в (v):

$$\left[\begin{array}{ll} b = \frac{5}{1} - 1 = 3, & \text{при } a = 1, \\ b = \frac{5}{-1} + 1 = -4, & \text{при } a = -1, \\ b = \frac{5}{\sqrt{\frac{5}{2}}} - \sqrt{\frac{5}{2}} = \frac{\sqrt{10}}{2}, & \text{при } a = \sqrt{\frac{5}{2}} = \frac{\sqrt{10}}{2} \\ b = \frac{5}{-\sqrt{\frac{5}{2}}} + \sqrt{\frac{5}{2}} = -\frac{\sqrt{10}}{2}, & \text{при } a = -\sqrt{\frac{5}{2}} = -\frac{\sqrt{10}}{2} \end{array}\right.$$

Так вот, если соответственные пары удовлетворяют (iv), то мы найдём все решения.

1) $(a, b) = (1, 3)$

$3 \geq 2 \cdot 1$ — правда

2) $(a, b) = (-1, -4)$

$-4 \geq 2(-1) = -2$ — ложь

3) $(a, b) = \cancel{(\sqrt{\frac{5}{2}}} = \left(\frac{\sqrt{10}}{2}, \frac{\sqrt{10}}{2}\right)$

$\frac{\sqrt{10}}{2} \geq 2 \cdot \sqrt{10}$ — ложь

4) $(a, b) = \left(-\frac{\sqrt{10}}{2}, -\frac{\sqrt{10}}{2}\right)$

$-\frac{\sqrt{10}}{2} \geq -\sqrt{10}$ — правда

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 1

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} tg\alpha = 0, \\ tg\alpha = -\frac{1}{4}, \\ tg\alpha = -4 \quad ; \end{array}\right.$$

Ответ: $tg\alpha \in \{0, -\frac{1}{4}, -4\}$.

☐ черновик ☒ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 4

(Нумеровать только чистовики)

Задача 2

$3y \geq 2x$

$5\sin\varphi + 2 \geq \frac{2}{3}(5\cos\varphi + 3)$

$15\sin\varphi + 6 \geq 10\cos\varphi + 6$

$15\sin\varphi \geq 10\cos\varphi$

$3\sin\varphi \geq 2\cos\varphi$

$3\sin\varphi - 2\cos\varphi \geq 0$.

Попробуем ещё разок. Можно записать систему так:

$$\begin{cases} 3y \geq 2x, \\ 9y^2 + 4x^2 - 15xy + 2x + 3y = 2, \\ (3x-3)^2 + (3y-2)^2 = 25 \end{cases};$$

или так,

$$\begin{cases} 3y \geq 2x, \\ (3y-2x)^2 = (x-1)(3y-2), \\ (3x-3)^2 + (3y-2)^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3y \geq 2x, \\ (3y-2x)^2 = (x-1)(3y-2), \\ 9(x-1)^2 + (3y-2)^2 = 25 \end{cases}$$

Такая замена: $\begin{cases} a = x-1, \\ b = 3y-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = a+1, \\ 3y = b+2 \end{cases};$

Итак,

$$\begin{cases} b+2 \geq 2a+2, \\ (b+2-2a-2)^2 = ab, \\ 9a^2 + b^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow$$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 3

$$3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5} - x^2 \iff$$

$$\iff \begin{cases} x^2+6x \geq 0, \\ (x^2+6x)^{\log_4 3} + 6x \geq (x^2+6x)^{\log_4 5} - x^2 \end{cases} \iff$$

$\iff$ Совершим замену $t = x^2+6x$.

$$\iff \begin{cases} t \geq 0 \\ t^{\log_4 3} + t - t^{\log_4 5} \geq 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} t^{\log_4 5} - t^{\log_4 4} - t^{\log_4 3} \leq 0, \\ t \geq 0 \end{cases} \quad (*)$$

Попробуем найти нули функции в ~~правой час~~ ~~ле~~ левой части $(*)$:

$$f(t) = t^{\log_4 5} - t^{\log_4 4} - t^{\log_4 3}$$

<u>1 сл</u> $t \in [0, 1]$. Интересно, как себе ведёт каждое слагаемое.

Во-первых, сходу говорим, что

$$t^{\log_4 4} \geq t^{\log_4 5},$$

$$t^{\log_4 3} \geq t^{\log_4 5};$$

причём равенство в обоих записях достигается лишь при

$t \in \{0, 1\}$.

☐ черновик ☒ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Задача 2

Выходит, мы сейчас доказали эквивалентность систем:

$$(iv)\ \&\ (v)\ \&\ (vi) \iff \left[\begin{array}{l}(a, b) = (1, 3), \\ (a, b) = \left(-\frac{\sqrt{10}}{2}, -\frac{\sqrt{10}}{2}\right)\end{array}\right.$$

Вспоминаем нашу замену =>

$$\left[\begin{array}{l}(x, 3y) = (2, 5), \\ (x, 3y) = \left(1-\frac{\sqrt{10}}{2}, 2-\frac{\sqrt{10}}{2}\right)\end{array}\right. \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l}(x, y) = \left(2, \frac{5}{3}\right), \\ (x, y) = \left(1-\frac{\sqrt{10}}{2}, \frac{2}{3}-\frac{\sqrt{10}}{6}\right).\end{array}\right.$$

Ответ: $(x, y) \in \left\{\left(2, \frac{5}{3}\right), \left(1-\frac{\sqrt{10}}{2}, \frac{2}{3}-\frac{\sqrt{10}}{6}\right)\right\}$.

☐ черновик ☒ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$a^{\log_b c} = c^{\log_b a} = c^{\frac{\ln a}{\ln b}}$$

$$a^{\log_b c} = a^{\frac{\ln c}{\ln b}} = \left(a^{\ln c}\right)^{\frac{1}{\ln b}} = a^{\ln}$$

$$a^{\log_b c} = a^{\log_b a^{\log_a c}} = a^{\log_a c \cdot \log_b a} = c^{\log_b a}$$

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

Задача 3

Поэтому, на интервале]0, 1[верно неравенство:

$$t^{\log_4 4} + t^{\log_4 3} > t^{\log_4 5}.$$

Более того, оно верно работает даже на полуинтервале

]0, 1]

А в $t=0$ достигается равенство.

<u>2 сл</u> $t > 1$.

А здесь сходу имеешь что:

$$\left.\begin{aligned} t^{\log_4 5} &> t^{\log_4 4}, \\ t^{\log_4 5} &> t^{\log_4 3} \end{aligned}\right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 2t^{\log_4 5} > t^{\log_4 4} + t^{\log_4 3}$$

~~Разбираемся с $f(t)$:~~

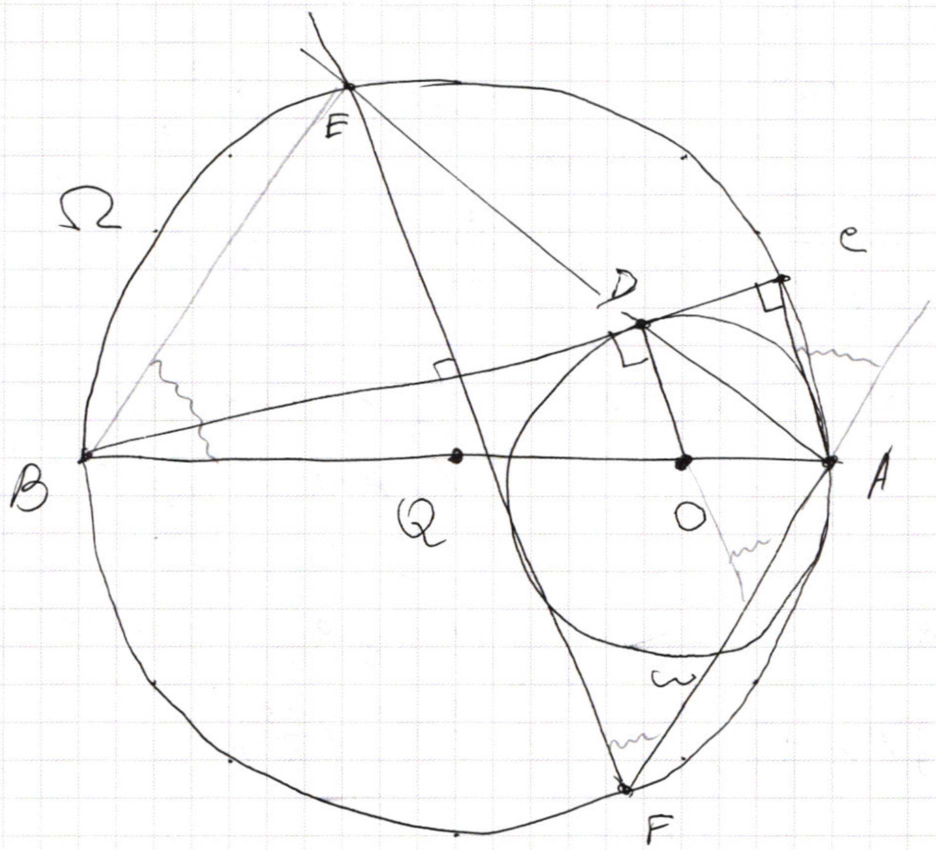
$$\cancel{t^{\log_4 5} = t^{\log_4 \left(4 \cdot \frac{5}{4}\right)} = t^{\log_4 4 + \log_4 \frac{5}{4}}} =$$

$$\cancel{= t^{\log_4 4} \, t^{\log_4 \frac{5}{4}}}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 4

$|CD| = \frac{5}{2}$, $|BD| = \frac{13}{2}$



Решение:

Заметим параллельность прямых:

$$(EF) \parallel (OD) \parallel (CA), \qquad (*)$$

т.к. $(OD) \perp (BC)$, $(CA) \perp (BC)$ как и $(EF) \perp (BC)$.

Обозначим радиусы r и R у ω и Ω, соответственно.

По теореме о квадрате касательной для ω:

$$|BD|^2 = 2R(2R-2r) = 4R(R-r) \qquad (i)$$

Теперь из $(*) \Rightarrow \triangle BOD \sim \triangle BAC \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{|BO|}{|BA|} = \frac{|BD|}{|BD|+|DC|} \Rightarrow$$

Задача 4

$$\Rightarrow \quad \frac{2R-r}{2R} = \frac{|BD|}{|BD|+|DC|} \qquad (ii)$$

В уравнение (i) & (ii) подставим известное и решим полученную систему:

$$\begin{cases} 4R(R-r) = \frac{13^2}{4}, \\ \frac{2R-r}{2R} = \frac{\frac{13}{2}}{\frac{13}{2}+\frac{5}{2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R(R-r) = \left(\frac{13}{4}\right)^2, \\ \frac{2R-r}{2R} = \frac{13}{18} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2R-r = \frac{13}{18}\cdot 2R = \frac{13}{9}\cdot R, \\ R(R-r) = \left(\frac{13}{4}\right)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = -\frac{13}{9}R + 2R, \\ R(R-r) = \left(\frac{13}{4}\right)^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r = \frac{5}{9}R, \\ R\left(R - \frac{5}{9}R\right) = \left(\frac{13}{4}\right)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = \frac{5}{9}R, \\ \frac{4}{9}R^2 = \left(\frac{13}{4}\right)^2 \end{cases} \quad \overset{R>0}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} R = \frac{13}{4}\cdot\frac{3}{2} \\ r = \frac{5}{9}R \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R = \frac{39}{8}, \\ r = \cancel{\frac{195}{72}} = \frac{65}{24} \end{cases}$$

К углу $\angle AFE$:

~~AFE =~~

$$\operatorname{tg}\widehat{CBA} = \frac{|OD|}{|BD|}, \text{ т.к. } (OD)\perp(BC)$$

$$\operatorname{tg}\widehat{CBA} = \frac{r}{|BD|} = \frac{195/72}{13/2} = \frac{13\cdot 3\cdot 5}{4\cdot 2\cdot 9}\cdot\frac{2}{13} =$$

$$= \frac{3\cdot 5}{4\cdot 9} = \frac{15}{36} \Rightarrow \widehat{CBA} = \cancel{\operatorname{arctg}\frac{15}{36}} = \operatorname{arctg}\frac{5}{12}$$

☐ черновик ☒ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 4

Т.к. $\triangle BDO$ – прямоугольный, то

$\widehat{BOD} = \cancel{\widehat{OBA}} = \frac{\pi}{2} - \widehat{CBA} = \frac{\pi}{2} - \cancel{\operatorname{arctg} \frac{12}{5}} - \operatorname{arctg}\frac{5}{12}$;

~~$[BA]$ – диаметр Ω $\Rightarrow$ $\widehat{BEA} = \frac{\pi}{2}$ $\Rightarrow$~~

~~$\Rightarrow \widehat{EBA} = \frac{\pi}{2} -$~~

Из $\triangle ODA$ – равнобедренного $\Rightarrow$

$$\widehat{BOD} = 2\,\widehat{OAD} \Rightarrow \widehat{OAD} = \frac{1}{2}\widehat{BOD} =$$

$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{5}{12}$;

$[BA]$ – диаметр Ω $\Rightarrow$ $\triangle BEA$ – прямоугольный $\Rightarrow$

$\Rightarrow \widehat{EBA} = \frac{\pi}{2} - \widehat{BAE} = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{5}{12}\right) =$

$= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{5}{12}$;

Т.к. $[EA]$ – хорда Ω и $B, F \in \Omega$, то

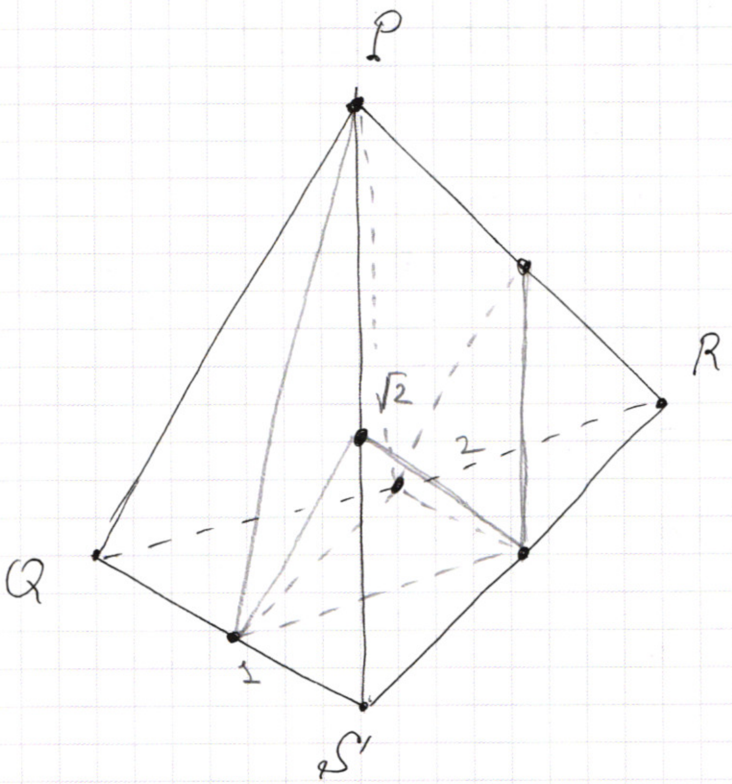
$$\widehat{EFA} = \widehat{EBA} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{5}{12}.$$

Ответ (на 2/3 вопросов): $r = \frac{65}{24}$,

$R = \frac{39}{8}$,

$\widehat{EFA} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{5}{12}$.

Задача 7



Задача 5.

$\forall a, b \in \mathbb{Q}^+ \Rightarrow f(ab) = f(a) + f(b)$, где $\mathbb{Q}^+ = \{r \in \mathbb{Q} : r > 0\}$.

$\forall p$ - простое $\Rightarrow f(p) = \left[\frac{p}{4}\right]$. } Будем обозначать $\mathbb{P}$ - простые числа

Известно: $3 \leq x, y \leq 27$, и $f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$.

Что можно сказать.

$$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$$

Это раз. А вообще:

$$f(ab) = f(a) + f(b).$$

Хотим какие-нибудь следствия:

~~$f(0) = f(a \cdot 0) = f(a) + f(0)$~~

~~$f(a \cdot 1$~~

$$f(1) = f(1 \cdot 1) = f(1) + f(1)$$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 5

$f(1)=0.$

$\forall n \in \mathbb{N}\ \forall a \in \mathbb{Q}^+ : \ f(a^n) = f(a) + f(a^{n-1}) = \ldots =$
$= n f(a).$

$\forall n \in \mathbb{N}\ \forall p \in \mathbb{P} : \ f(p^n) = n f(p) = n\left[\frac{p}{4}\right].$

Берём $\forall a \in \mathbb{N}$. Представляем его в каноническом разложении на множители простые:

$$a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_s^{\alpha_s}.$$

Тогда

$$f(a) = f(p_1^{\alpha_1}) + f(p_2^{\alpha_2}) + \ldots + f(p_s^{\alpha_s}) =$$
$$= \alpha_1\left[\frac{p_1}{4}\right] + \alpha_2\left[\frac{p_2}{4}\right] + \ldots + \alpha_s\left[\frac{p_s}{4}\right]$$

Теперь умеем считать $f(x)$ для целых положительных! А хотим для рациональных положительных.

Берём $\forall a \in \mathbb{Q}^+ \Rightarrow \exists\, q, r \in \mathbb{N} : \ a = \frac{q}{r}.$

$$f(a) = f\left(\frac{q}{r}\right) = f(q) + f\left(\frac{1}{r}\right).$$

А как считать $f\left(\frac{1}{r}\right)$.

Ну так пробуем:

$$f(1) = f\left(\frac{1}{r}\cdot r\right) = f\left(\frac{1}{r}\right) + f(r), \ \text{т.к.} \quad f(1)=0, \text{то}$$

$$f\left(\frac{1}{r}\right) = -f(r)$$

Тогда $\quad f(a) = f(q) - f(r).$

Теперь для любого желаемого числа $a \in \mathbb{Q}^+$ $f(a)$ мы можем вычислить.

Правило счёта:

☐ черновик ☒ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Задача 5

1)

$f(1) = 0.$

2)

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = \sum_{i=1}^{s} \alpha_i \left[\frac{p_i}{4}\right] - \sum_{i=1}^{t} \beta_i \left[\frac{q_i}{4}\right],$$

где $p, q \in \mathbb{N}$ и $p = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_s^{\alpha_s}$,

$q = q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2} \cdots q_t^{\beta_t}$ —

это каноническое разложение на простые множители.

К нашему вопросу задачи возвращаемся.

$$f\left(\frac{p}{q}\right) < 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{t} \beta_i \left[\frac{q_i}{4}\right] > \sum_{i=1}^{s} \alpha_i \left[\frac{p_i}{4}\right].$$

А мне кажется, что всё проще. У нас такое:

$\cancel{x, y \in}$

$x, y = \overline{3, 27}.$

Будем рассматривать два числа

$$A = \frac{x}{y}, \quad B = \frac{y}{x}.$$

Мы ранее показывали, что $f(r) = -f\left(\frac{1}{r}\right)$. Поэтому возможен один из трёх сценариев:

а) $f(A) = f(B) = 0$

б) $\cancel{f(A), f(B) = 0}$ $f(A) > 0 \ \& \ f(B) < 0$

в) $f(B) > 0 \ \& \ f(A) < 0.$

Выясним, когда $f(r) = 0$, если $r \in \mathbb{Q}^+$.

1 сл $r = 1$, всё ок. $f(1) = 0$.

2 сл $\cancel{r \neq 0}$ $r \neq 1$. Предположим, нашлось такое $r \neq 1$, что

$$f(r) = 0$$

Тогда $f(ar) = f(a)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 5

Представим r в виде несократимой дроби

~~$r = \frac{y}{x}, x \neq 0$.~~ $r = \frac{p}{q}$

Тогда

$$f(r) = f\left(\frac{p}{q}\right) = f(p) - f(q)$$

$$\Downarrow$$

$$f(p) = f(q). \Rightarrow$$

~~В конце концов уже не так много цифр:~~

$f(3) =$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{i=1}^{s} \alpha_i \left[\frac{p_i}{4}\right] = \sum_{i=1}^{t} \beta_i \left[\frac{q_i}{4}\right].$$

А попробуем перебор:

$f(3) = 0$

$f(4) = f(2^2) = 2 \cdot \left[\frac{2}{4}\right] = 0$

$f(5) = 1 \cdot \left[\frac{5}{4}\right] = 1$

$f(6) = f(2) + f(3) = 0$

$f(7) = 1 \cdot \left[\frac{7}{4}\right] = 1$

$f(8) = f(2^3) = 3 \cdot \left[\frac{2}{4}\right] = 0$

$f(9) = f(3^2) + 2f(3) = 0$

$f(10) = f(2) + f(5) = 1$

$f(11) = 1 \cdot \left[\frac{11}{4}\right] = 2$

$f(12) = f(4) + f(3) = 0$

Задача 5

$f(13) = \left[\frac{13}{4}\right] = 3$

$f(14) = 1$

$f(15) = 1$

$f(16) = 0$

$f(17) = \left[\frac{17}{4}\right] = 4$

$f(18) = 0$

$f(19) = \left[\frac{19}{4}\right] = 4$

$f(20) = 1$

$f(21) = 1$

$f(22) = 2$

$f(23) = \left[\frac{23}{4}\right] = 5$

$f(24) = 0$

$f(25) = 2$

$f(26) = 3$

$f(27) = 0.$

Что с этим делать. Когда $f(x) = f(y) = \overline{X}$.

1) $\underline{\overline{X} = 0}$

$x \in \{3, 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18, 24, 27\}$

2) $\underline{\overline{X} = 1}$

$x \in \{5, 7, 10, 14, 15, 20, 21\}.$