МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{8}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases}3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2},\\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4.\end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x\geqslant |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{5}{2}$, $BD=\frac{13}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $3\leqslant x\leqslant 27$, $3\leqslant y\leqslant 27$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{4x-3}{2x-2}\geqslant ax+b\geqslant 8x^2-34x+30$$

выполнено для всех x на промежутке $(1;3]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $PQRS$, вершина P которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра PQ. Известно, что $QR=2$, $QS=1$, $PS=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра RS. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

© МФТИ, 2022

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} = \sin 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha$

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$\sin(2\alpha+4\beta) + \underbrace{\sin 2\alpha}_{2\cos^2 2\beta} = \sin 2\alpha\cos 4\beta + \sin 4\beta\cos 2\alpha + \sin 2\alpha =$

$= \sin 2\alpha(\cos 4\beta + 1) + 2\sin 2\beta\cos 2\beta\cdot\cos 2\alpha = 2\sin 2\alpha\cos^2 2\beta +$

$+ 2\cdot\sin 2\beta\cos 2\beta\cdot\cos 2\alpha = 2\cos 2\beta(\sin 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha) =$

$= 2\cos 2\beta\cdot\sin(2\alpha+2\beta) = 2\cdot\cos 2\beta\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right) = -\frac{8}{17}$

$\Rightarrow \cos 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}} \Rightarrow \sin 2\beta = \pm\sqrt{1-\frac{16}{17}} = \pm\frac{1}{\sqrt{17}}$

1) $\sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}$: $\frac{4}{\sqrt{17}}\cdot\sin 2\alpha + \frac{1}{\sqrt{17}}\cdot\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ $|\cdot\sqrt{17}$

$4\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1$

Если $\sin 2\alpha \geq 0$, то $0 \leq 4\sqrt{1-\cos^2 2\alpha} = -1-\cos 2\alpha \leq 0$

$\Rightarrow \cos 2\alpha = -1$, а $\sin 2\alpha = 0$, т.е. $\operatorname{tg} 2\alpha = 0 \Rightarrow 2\alpha = \pi k, k\in\mathbb{Z}$
$\alpha = \frac{\pi}{2}\cdot k, k\in\mathbb{Z}$

И т.к. $\operatorname{tg}\alpha$ сущ., он равен 0: $\operatorname{tg}\alpha = 0$.

Если $\sin 2\alpha < 0$: $4\sqrt{1-\cos^2 2\alpha} = \underbrace{\cos 2\alpha + 1}_{\geq 0}$, $t = \cos 2\alpha$.

$4\sqrt{1-t^2} = \overbrace{t+1}^{\geq 0}$ $|^2$

$4-4t^2 = t^2+2t+1$ $\quad 5t^2+2t-3=0$ $\quad D = 4+5\cdot4\cdot3 = 64$

$t_{1,2} = \frac{-2\pm8}{10} = \left[\begin{array}{l} -1 \to \cos 2\alpha = -1, \text{ а } \sin 2\alpha = 0 \text{ не уд. } \sin 2\alpha < 0 \\ \frac{3}{5} \to \cos 2\alpha = \frac{3}{5} \text{ и } \sin 2\alpha = -\frac{4}{5} \Rightarrow \operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{4}{3} \end{array}\right.$

$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\cdot\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} \Rightarrow \operatorname{tg}^2\alpha\cdot\operatorname{tg} 2\alpha + 2\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg} 2\alpha = 0$, $a = \operatorname{tg}\alpha$

$a^2\cdot\left(-\frac{4}{3}\right) + 2a + \frac{4}{3} = 0$ $\quad D = 4+4\cdot\frac{16}{9} = \frac{100}{9}$ $\quad a_{1,2} = \frac{-2\pm\frac{10}{3}}{-2\cdot\frac{4}{3}} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2 = \operatorname{tg}\alpha \\ -\frac{1}{2} = \operatorname{tg}\alpha \end{array}\right.$

2) $\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$: $4\sin 2\alpha - \cos 2\alpha = -1$

Если $\sin 2\alpha \geq 0$, то $0 \leq 4\sqrt{1-\cos^2 2\alpha} = \cos 2\alpha - 1 \leq 0$

$\Rightarrow \cos 2\alpha = 1, \sin 2\alpha = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} 2\alpha = 0$ и аналогично $\operatorname{tg}\alpha = 0$

Если $\sin 2\alpha \neq 0$, то $4\sqrt{1-\cos^2 2\alpha} = \underbrace{1-\cos 2\alpha}_{\geq 0}$, $t = \cos 2\alpha$

$4\sqrt{1-t^2} = \overset{\geq 0}{1-t}$ $|^2$

$4 - 4t^2 = 1 - 2t + t^2$

$5t^2 - 2t - 3 = 0$ $D = 4 + 4 \cdot 5 \cdot 3 = 64$ $t_{1,2} = \frac{2 \pm 8}{10} = \left[\begin{array}{l} 1 \\ -\frac{3}{5} \end{array}\right.$

$t = 1 = \cos 2\alpha \Rightarrow \sin 2\alpha = 0$, но $\sin 2\alpha \neq 0$

$\Rightarrow \cos 2\alpha = -\frac{3}{5}$, $\sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$ и $tg 2\alpha = \frac{4}{3}$.

$tg 2\alpha \cdot tg^2\alpha + 2 tg\alpha - tg 2\alpha = 0$, $a = tg\alpha$

$a^2 \cdot tg 2\alpha + 2a - tg 2\alpha = 0$

$a^2 \cdot \left(\frac{4}{3}\right) + 2a - \frac{4}{3} = 0$ $D = 4 + 4 \cdot \frac{16}{9} = \frac{100}{9}$ $a_{1,2} = \frac{-2 \pm \frac{10}{3}}{2 \cdot \frac{4}{3}} = \frac{-6 \pm 10}{8} =$

$= \left[\begin{array}{l} -2 = tg\alpha \\ \frac{1}{2} = tg\alpha \end{array}\right.$

Ответ: $tg\alpha = -2; \frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}; 2$.

№2.

$\begin{cases} 3y - 2x = \sqrt{3xy - 2x - 3y + 2} = \sqrt{3y(x-1) - 2(x-1)} = \sqrt{(3y-2)(x-1)} \\ 3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 4 \end{cases}$

$3(x-1)^2 + 3(y - \frac{2}{3})^2 = 4 + 3 + \frac{4}{3} = \frac{25}{3}$

Пусть $\begin{cases} a = x - 1 \\ b = 3y - 2 \end{cases}$ Тогда исх. систему можно переписать как: $\begin{cases} b - 2a = \sqrt{ab} \\ 3a^2 + 3(\frac{b}{3})^2 = \frac{25}{3} \rightarrow a^2 + \frac{b^2}{9} = \frac{25}{9} \rightarrow \end{cases}$

$\rightarrow \begin{cases} 9a^2 + b^2 = 25 \\ b - 2a = \sqrt{ab} \quad |^2 \ (b \geq 2a) \end{cases}$ $b^2 - 4ab + 4a^2 = ab$

$\begin{cases} b^2 - 5ab + 4a^2 = 0 \\ 9a^2 + b^2 = 25 \end{cases} \rightarrow -$

$\rightarrow 5a^2 + 5ab = 25$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3.

$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x \ge |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2$

ОДЗ: $x^2+6x>0$, поэтому $|x^2+6x|$ можно раскрыть с „+".

$x^2+6x=t$, ОДЗ: $t>0$

$3^{\log_4 t} \ge t^{\log_4 5}-t$

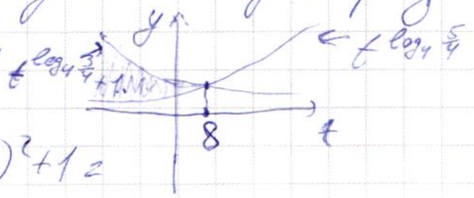
$t^{\log_4 3} \ge t^{\log_4 5}-t$

$t(t^{\log_4 3-1}-t^{\log_4 5-1}+1)\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t\ge 0 \\ t^{\log_4 \frac{3}{4}}-t^{\log_4 \frac{5}{4}}+1\ge 0 \end{array}\right.$

$t^{\log_4 \frac{3}{4}}+1 \ge t^{\log_4 \frac{5}{4}}$ где $\log_4 \frac{3}{4}<0$, а $\log_4 \frac{5}{4}>0$

$\Rightarrow$ функция x^a, где $a>0$, монот. возрастает, а ф-я x^a, где $a<0$, монот. уб.

$\Rightarrow$ $t^{\log_4 \frac{3}{4}}+1$ и $t^{\log_4 \frac{5}{4}}$ пересекутся один раз и график будет иметь вид



При $t=8$ $\quad 8^{\log_4 \frac{3}{4}}+1-8^{\log_4 \frac{5}{4}}=\left(\frac{3}{4}\right)^2-\left(\frac{5}{4}\right)^2+1=$

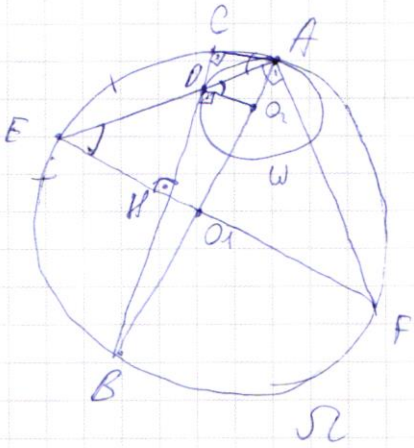
$=\frac{9-25}{16}+1=\frac{-16}{16}+1=0 \Rightarrow t\in(-\infty;8]$ и $t>0$ (ОДЗ)

$\begin{cases} x^2+6x-8\le 0 & D=36+4\cdot 8=68 \quad x_{1,2}=\frac{-6\pm2\sqrt{17}}{2}=-3\pm\sqrt{17} \quad x\in[-3-\sqrt{17};-3+\sqrt{17}] \\ x^2+6x>0 & x(x+6)>0 \quad x\in(-\infty;-6)\cup(0;+\infty) \end{cases}$

$-3-\sqrt{17}<-3-3=-6 \Rightarrow x\in[-3-\sqrt{17};-6)\cup(0;-3+\sqrt{17}]$

Ответ: $x\in[-3-\sqrt{17};-6)\cup(0;-3+\sqrt{17}]$.

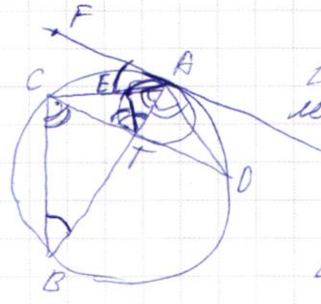
№4.



$CD = \frac{5}{2}$, $BD = \frac{13}{2}$, AB – диаметр Ω

$BC = \frac{5+13}{2} = 9$

По лемме Архимеда AE – бисс. $\angle CAB$



$\angle FAC = \angle ETA$ угол между кас. и хордой

$\angle CTE = \angle EAT$

$\angle CBA = \angle CAF \Rightarrow$

$\Rightarrow ET \parallel BC \Rightarrow \angle BCT =$

$= \angle CTE = \angle EAT =$

$= \angle BAD$ как вписанные.

$\angle BCA = 90^\circ$ (опир. на диаметр)

AD – бисс. $\Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD} = \frac{13}{5} \Rightarrow AB = \frac{13}{5} \cdot AC$

$\Rightarrow AC^2 + 81 = \frac{169}{25} AC^2 \rightarrow AC^2\left(\frac{169}{25} - 1\right) = 81$

$AC^2 = \frac{81 \cdot 25}{144} = \left(\frac{9 \cdot 5}{12}\right)^2 = \left(\frac{15}{4}\right)^2$

$AC = \frac{15}{4} \Rightarrow AB = \frac{13}{5} \cdot \frac{15}{4} = \frac{39}{4} \Rightarrow r_1$ – радиус Ω равен $\frac{39}{8}$, $AD = \sqrt{AC^2 + CD^2} = \sqrt{\frac{225}{16} + \frac{25}{4}} = \sqrt{\frac{25(9+4)}{16}} = \frac{5\sqrt{13}}{4}$

$ED \cdot DA = CD \cdot BD$ (пересек. хорды, ст. точки)

$ED = \frac{\frac{5}{2} \cdot \frac{13}{2}}{\frac{5\sqrt{13}}{4}} = \sqrt{13} \Rightarrow EA = \frac{9}{4}\sqrt{13} \Rightarrow$ По т. синусов для $\triangle AFE$ $\frac{EA}{2r_1} = \sin\angle AFE =$

$= \frac{39\sqrt{13}}{8 \cdot \frac{39}{8} 13} = \frac{3}{\sqrt{13}} = \sin\angle AFE \Rightarrow \angle AFE = \arcsin\frac{3}{\sqrt{13}}$

E – сер. дуги $BC \Rightarrow \triangle BEC$ – равнобедр. $\Rightarrow$ Высота EH явл. медианой и проходит через центр окр. Ω O_1. $\Rightarrow EF = 2r_1 = \frac{39}{4}$. $EH \perp BC$ и $CA \perp BC \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle DAC = \angle AEF$ (т.к. $EH \parallel AC$)

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin\angle CAD = \frac{CD}{AD} = \frac{\frac{8}{2}}{\frac{8\sqrt{13}}{4\cdot 2}} = \frac{2}{\sqrt{13}} = \sin\angle AEF$

EF – диаметр $\Rightarrow \angle EAF = 90° \Rightarrow AF = \sin\angle AEF \cdot EF =$
$= \frac{2}{\sqrt{13}} \cdot \frac{39}{4\cdot 2} = \frac{3\sqrt{13}}{2} \Rightarrow S_{AEF} = \frac{1}{2}\cdot AE \cdot AF = \frac{1}{2}\cdot\frac{9}{4}\sqrt{13}\cdot\frac{3\sqrt{13}}{2} =$
$= \frac{9\cdot 39}{16} = \frac{351}{16}$

BC касается $\omega \Rightarrow O_2D \perp BC$ и $O_2D \parallel AC$
$\Rightarrow \angle ADO_2 = \angle CAE \Rightarrow r_2 = \frac{AD}{2}\cdot\frac{1}{\cos\angle ADO_2}$
$\cos\angle ADO_2 = \sqrt{1-\frac{4}{13}} = \frac{3}{\sqrt{13}}$ ($\cos\angle ADO_2 > 0$ т.к. $\angle ADO_2$ половина угла $\angle CAB$)
$r_2 = \frac{5\sqrt{13}}{8}\cdot\frac{\sqrt{13}}{3} = \frac{5\cdot 13}{24} = \frac{65}{24}$

Ответ: $r_1 = \frac{39}{8}$, $r_2 = \frac{65}{24}$, $\angle AFE = \arcsin\frac{3}{\sqrt{13}}$, $S_{AFE} = \frac{351}{16}$.

№5.

$f(ab) = f(a) + f(b)$
$f(p) = [\frac{p}{4}]$, для $\forall$ простого p.
x и $y \in \mathbb{N}$; x и $y \in [3;27]$
$f(\frac{x}{y}) = f(x) + f(\frac{1}{y})$, $f(\frac{1}{y}\cdot y) = f(\frac{1}{y}) + f(y) = 0 \Rightarrow f(\frac{1}{y}) = -f(y)$

$f(1\cdot 1) = 2f(1) \Rightarrow f(1) = 0$ Нетрудно посчитать зн. функции:

Простые числа
$f(2) = 0$
$f(3) = 0$
$f(5) = 1$
$f(7) = 1$
$f(11) = 2$
$f(13) = 3$
$f(17) = 4$
$f(19) = 4$
$f(23) = 5$

$f(4) = 0$
$f(6) = 0$
$f(8) = 0$ $f(9) = 0$
$f(10) = 1$
$f(12) = 0$
$f(14) = 1$
$f(16) = 0$ $f(15) = 0$
$f(18) = 0$
$f(20) = 1$
$f(21) = 1$
$f(22) = 2$
$f(24) = 0$
$f(25) = 2$
$f(26) = 3$
$f(27) = 0$

Знач. „0" принимается 11 раз, „1" – 6, „2" – 3, „3" – 2, „4" – 2, „5" – 1.

Чтобы $f(\frac{x}{y}) = f(x) - f(y) < 0$, $f(x) < f(y)$

Если $f(x) = 0$, то $f(y) = 1; 2; 3; 4; 5$. $\Rightarrow$ $11 \cdot 14$ пар $- 154$
11 раз, 14 раз

Если $f(x) = 1$, то $f(y) = 2; 3; 4; 5$ $\Rightarrow$ $6 \cdot 8$ пар $- 48$
6 раз, 8 раз

Если $f(x) = 2$, то $f(y) = 3; 4; 5$ $\Rightarrow$ $3 \cdot 5$ пар $- 15$
3 раз, 5 раз

Если $f(x) = 3$, то $f(y) = 4; 5$ $\Rightarrow$ $2 \cdot 3$ пар $- 6$
2 раз, 3 раз

Если $f(x) = 4$, то $f(y) = 5$ $\Rightarrow$ $2 \cdot 1$ пар $- 2$
2 раз, 1 раз

Всего пар $(x; y) - 154 + 48 + 15 + 6 + 2 = 225$

Ответ: 225 пар.

№6.

$\frac{4x-3}{2x-2} \geq ax+b \geq 8x^2 - 34x + 30$ для $\forall x \in (1; 3]$

$\begin{cases} \frac{4x-3-(ax+b)(2x-2)}{2x-2} \geq 0 \\ 8x^2 - 34x + 30 - ax - b \leq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{-2ax^2 + x(4+2a-2b) - 3 + 2b}{2x-2} \geq 0 \\ 8x^2 - x(34+a) + 30 - b \leq 0 \end{cases}$

$D = (34+a)^2 - 32(30-b) = 196 + 68a + a^2 + 32b$

$\begin{cases} 8 \cdot 1 - (34+a) + 30 - b \leq 0 \\ 8 \cdot 9 - (34+a) \cdot 3 + 30 - b \leq 0 \end{cases}$

$-a - b \leq -4$

$a + b \geq 4$ $\begin{cases} a \geq 4 - b \\ a \geq -\frac{b}{3} \end{cases}$

$-3a - b \leq 0$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\frac{\sin(2\alpha)}{\cos(2\alpha)} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} = \sin 2\alpha \cos 2\beta + \sin 2\beta \cos 2\alpha$

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17} = \sin 2\alpha(\cos 4\beta + 1) + \sin 4\beta \cos 2\alpha =$

$= \sin 2\alpha \cdot 2\cos^2 2\beta + \sin 4\beta \cos 2\alpha = \sin 2\alpha \cdot 2\cos^2 2\beta + 2\sin 2\beta\cos 2\beta\cos 2\alpha =$

$= 2\cos 2\beta \underbrace{(\sin 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha)}_{= -\frac{1}{\sqrt{17}}}$

$2\beta = \pm\arccos\left(\frac{4}{\sqrt{17}}\right) + 2\pi k$

$\beta = \pm\frac{\arccos\frac{4}{\sqrt{17}}}{2} + \pi k,\ k\in\mathbb{Z}$

$\cos 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}} \Rightarrow \sin 2\beta = \pm\sqrt{1-\frac{16}{17}} = \pm\frac{1}{\sqrt{17}}$

1) $\sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}$;

$t_{1,2} = \frac{2\pm 8}{10} = \left[\begin{array}{l} 1 \quad \operatorname{tg}2\alpha = 0 \\ -\frac{3}{5} \quad \operatorname{tg}2\alpha = \frac{4}{3} \end{array}\right.$

$2.\ 4\sqrt{1-\cos^2 2\alpha} = 1-\cos 2\alpha$

$4 - 4\cos^2 2\alpha = 1 - 2\cos 2\alpha + \cos^2 2\alpha$

$5t^2 - 2t - 3 = 0 \quad D = 4 + 5\cdot 4\cdot 3 = 64$

$\operatorname{tg}(\alpha+\alpha) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$

$\frac{4}{\sqrt{17}}\sin 2\alpha + \frac{1}{\sqrt{17}}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}} \quad |\cdot\sqrt{17}$

$1.\ 4\sqrt{1-\cos^2 2\alpha} = 0 \Rightarrow \cos 2\alpha = 1$, $\sin 2\alpha = 0$, $\operatorname{tg}\alpha = 0$

$4\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1 \quad |:\cos 2\alpha$

$\frac{2x}{1-x^2} = a$

$(1-x^2)a = 2x$

$ax^2 + 2x - a = 0$

$4\operatorname{tg}2\alpha = -\frac{1}{\cos 2\alpha} - 1$

2) $\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$4\sin 2\alpha - \cos 2\alpha = -1$

$4\sin 2\alpha = \cos 2\alpha - 1$

$\sin\left(2\alpha \pm \arccos\left(\frac{4}{\sqrt{17}}\right) + \pi k\right) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\left[\begin{array}{l} 2\alpha \pm \arccos\left(\frac{4}{\sqrt{17}}\right) + \pi k = \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right) + 2\pi n,\ n\in\mathbb{Z} \\ 2\alpha \pm \arccos\left(\frac{4}{\sqrt{17}}\right) + \pi k = \pi + \arcsin\left(+\frac{1}{\sqrt{17}}\right) + 2\pi m,\ m\in\mathbb{Z} \end{array}\right.$

$\alpha = \frac{\pi k}{2}$

$\operatorname{tg}\alpha = 0$; $2\alpha = \pi k$; $\operatorname{tg}2\alpha = 0$

$\begin{cases} \sin 2\alpha = 0 \\ \cos 2\alpha = -1 \end{cases}$

$\alpha = \frac{1}{2}\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right) \pm \frac{1}{2}\arccos\left(\frac{4}{\sqrt{17}}\right) + \pi\left(n - \frac{k}{2}\right)$

1. $4\sqrt{1-\cos^2 2\alpha} + \cos 2\alpha = -1$ нет

$4\sqrt{1-\cos^2 2\alpha} = -1 - \cos 2\alpha$

$-4\sqrt{1-\cos^2 2\alpha} + \cos 2\alpha = -1$

$-\frac{4}{3}x^2 + 2x + \frac{4}{3} = 0$

$4\sqrt{1-\cos^2 2\alpha} = \cos 2\alpha + 1 \quad |^{\wedge 2}$

$D = 4 + 4\cdot\frac{16}{9} = 4 + \frac{64}{9} = \frac{100}{9}$

$4 - 4\cos^2 2\alpha = \cos^2 2\alpha + 2\cos 2\alpha + 1$

$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \frac{10}{3}}{-2\cdot\frac{4}{3}} = \left[\begin{array}{l} \frac{-6\pm 10}{3} \\ \frac{8}{3} \end{array}\right. = \left[\begin{array}{l} 2 \\ -\frac{1}{2} \end{array}\right.$

$5t^2 + 2t - 3 = 0$

$\sin 2\alpha < 0$

$\operatorname{tg}2\alpha = -\frac{4}{3}$

$D = 4 + 4\cdot 5\cdot 3 = 64 \quad t_{1,2} = \frac{-2\pm 8}{10} = \left[\begin{array}{l} \cancel{-1 = \cos 2\alpha} \\ \frac{3}{5} = \cos 2\alpha,\ \sin 2\alpha = -\frac{4}{5} \end{array}\right.$

$$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2}=\sqrt{3y(x-1)-2x+2}=\sqrt{3y(x-1)-2(x-1)} = \sqrt{(x-1)(3y-2)} \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \end{cases}$$

$$3(x-1)^2+3\left(y-\frac{2}{3}\right)^2=4+3+\frac{4}{3}=\frac{25}{3}$$

$14a^2 \geq 9a^2+b^2=25$ $\geq 14a^2$ $13a^2$

$2a^2 \leq b^2$

$$(x-1)^2+\left(y-\frac{2}{3}\right)^2=\frac{25}{9}$$

$\frac{5b^2}{4}+\frac{3}{4}b \geq 25$ $a \geq \frac{b}{2}$ $|a| \geq \frac{|b|}{\sqrt{2}}$ $b \geq 2a$

$$\begin{cases} a=x-1 \\ b=3y-2 \end{cases} \quad \begin{cases} a^2+\frac{b^2}{4}=\frac{25}{9} \\ b-2a=\sqrt{ab} \end{cases} \quad \begin{cases} 4a^2+b^2=\frac{100}{9}=\left(\frac{10}{3}\right)^2 \\ b^2-5ab+4a^2=0 \end{cases}$$

(ab)

$D=9b^2+25\cdot5\cdot4=$

$=9b^2+500$

$5ab=\left(\frac{10}{3}\right)^2$

$a_{1,2}=\frac{-3b\pm\sqrt{9b^2+500}}{10}$ $a=\frac{20}{9b}$

$4\cdot\frac{400}{81b^2}+b^2=\frac{100}{9}$

$5x^2-10x+5+3(x-1)(3y-2)=$

$=5x^2-16x+11-9y+9xy=5$

$t=b^2$

$$\frac{1600+t^2\cdot81-t\cdot900}{81t}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} t\neq0 \\ 81t^2-900t+1600=0 \end{cases}$$

$1600 \cdot 4 = 6400$, $6400\cdot81=518400$

$810000-518400=291600$

$2916 : 4 = 729$, $729 : 9 = 81$

$D=810000-518400=291600=$

$=10^2\cdot2^2\cdot9\cdot81=(10\cdot2\cdot3\cdot9)^2=(540)^2$

$$t_{1,2}=\frac{900\pm540}{2\cdot81}=\frac{450\pm540}{81}=\frac{50\pm60}{9}$$

$$b^2=\frac{50+60}{9}=\frac{110}{9}$$

$$\begin{cases} b=\pm\frac{\sqrt{110}}{3}=3y-2 \\ a=\frac{20}{9b}=\pm\frac{20}{3\sqrt{110}}=x-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3y-2=\pm\frac{\sqrt{110}}{3} \\ x-1=\pm\frac{20}{3\sqrt{110}} \end{cases} \begin{cases} y=\frac{\pm\sqrt{110}+6}{9} \\ x=\frac{\pm20+3\sqrt{110}}{3\sqrt{110}} \end{cases}$$

$$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2$$

$$(x^2+6x)^{\log_4 3}-|x^2+6x|^{\log_4 5} \geq -(x^2+6x)$$

$x\in(-\infty;-6]\cup[0;+\infty)$: $t^{\log_4 3}-t^{\log_4 5} \geq -t$

$\log_4 5=\frac{1}{\log_5 4} \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_4 3$ $\frac{3}{4}$

$$t\left(t^{\log_4 3-1}-t^{\log_4 5-1}+1\right) \geq 0$$

$$t^{\log_4\frac{3}{4}}\left(1-t^{\log_{\frac{3}{4}}\frac{5}{4}}\right)$$

$$t^{\log_4\frac{3}{4}}+1 \geq t^{\log_4\frac{5}{4}}$$

$\frac{5+3-2\sqrt{15}}{8-4}=4$

$\frac{3}{4}+1=\frac{5}{4}$ $2^{\frac{1}{2}\log_2\frac{3}{4}}+1=\sqrt{\frac{3}{4}}+1=\sqrt{\frac{5}{4}}$

$$\log_4 3=\frac{1}{\log_3 4}=\frac{\log_5 3}{\log_5 4}$$

$\frac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{2}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$3^{\log_9(x^2+6x)} + 6x \geq |x^2+6x|^{\log_9 5} - x^2$

$\begin{cases} 9a^2+b^2=25 \\ b-2a=\sqrt{ab} \end{cases}$ $(3a)^2+b^2=25$

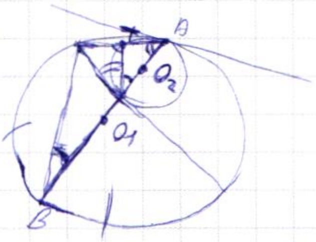
$b-2a=\sqrt{ab}$

$5a^2+3ab=25$ $ab=\left(\frac{-5a^2+25}{3}\right)$

$b=2a$

$39 \times 9 = 351$ $32 \times 30 = 960$ $11 \times 14 = 154$ $34 \times 34 = 1156$

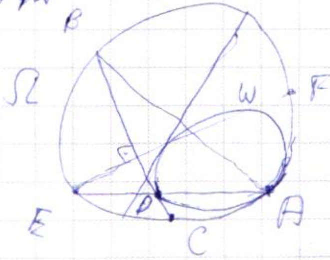
$ED \cdot EA = \sqrt{13} \cdot \frac{9}{4} \cdot \sqrt{13} = \frac{39 \cdot 3}{4}$

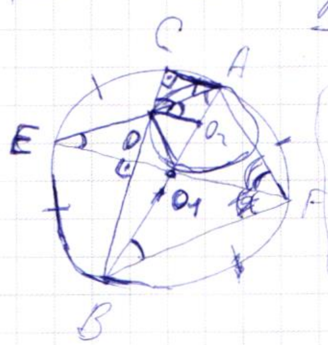


$15 \cdot 3 = 45$

$b-2a=\sqrt{\frac{25-5a^2}{3}}$

$b^2-4ab+4a^2=\frac{25-5a^2}{3}$





$\frac{AD}{2}=\frac{5}{8}\sqrt{13}$

$r_2=\frac{5}{8}\sqrt{13}\cdot\frac{1}{\cos\angle CAD}=\frac{5}{8}\cdot\sqrt{13}\cdot\frac{\sqrt{13}}{3}=\frac{5\cdot 13}{24}=\frac{195}{8}$

$CD=\frac{5}{2}$, $BD=\frac{13}{2}$ $BC=9$ S_{AFE}

$\angle AFE=\angle CAE+\angle ABC$

$ED\cdot DA=\frac{5\cdot 13}{4}$

$\frac{AB}{AC}=\frac{13}{5}=\frac{2r}{AC}=\frac{13}{5}$ $AB=\frac{13}{5}AC$

$ED=\frac{5\cdot 13}{4}\cdot\frac{4}{5\sqrt{13}}=\sqrt{13}$

$AC^2+81=\frac{169}{25}AC^2$

$AE=\frac{9}{4}\sqrt{13}$

$AC^2\cdot\frac{144}{25}=81$

$\Rightarrow \sin\angle AFE=\frac{39}{4}\sqrt{13}\cdot\frac{4}{\frac{39}{13}}=\frac{3}{\sqrt{13}}$

$AC^2=\frac{81\cdot 25}{144}=\left(\frac{9\cdot 5}{12}\right)^2=\left(\frac{45}{12}\right)^2=\left(\frac{15}{4}\right)^2$

$AD=\sqrt{\frac{25}{4}+\frac{225}{16}}=\sqrt{\frac{100+225}{16}}=\sqrt{\frac{25\cdot(4+9)}{16}}=\frac{5}{4}\sqrt{13}$

$AC=\frac{15}{4}\Rightarrow AB=\frac{13}{5}\cdot\frac{15}{4}=\frac{39}{4}\Rightarrow \boxed{r_1=\frac{39}{8}}$

$\sin\angle ABC=\frac{AC}{AB}=\frac{15}{4}\cdot\frac{4}{39}=\frac{15}{39}$

$\sin\angle CAB=\frac{9}{\frac{39}{4}}=\frac{36}{39}$

$EF=AB=\frac{39}{4}$

$\sin\angle CAD=\frac{5}{2}\cdot\frac{4}{5\sqrt{13}}=\frac{2}{\sqrt{13}}$

$AF=\frac{39}{4}\cdot\frac{2}{\sqrt{13}}=\frac{3\sqrt{13}}{2}$

$\cos\angle CAD=\sqrt{1-\frac{4}{13}}=\frac{3}{\sqrt{13}}$

$S_{AFE}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{\sqrt{13}}\cdot\frac{39}{4}\cdot\frac{3\sqrt{13}}{2}=\frac{9\cdot 39}{16}$

$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2$

$t=x^2+6x$

$3^{\log_4 t} \geq |t|^{\log_4 5}-t = \log 5^{\log_4 |t|}-t$

$t^{\log_4 3} \geq |t|^{\log_4 5}-t$

$t \geq 0$

$t^{\log_4 3} \geq t^{\log_4 5}-t$

$t(t^{\log_4 \frac{3}{4}} - \cancel{\log} t^{\log_4 \frac{5}{4}}+1) \geq 0$

$t^{\log_4 \frac{3}{4}}(1-t^{\log}$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}}\frac{3}{4}} - \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}}\frac{5}{4}}+1 = \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}}^2} - \frac{1}{\sqrt{\frac{5}{4}}^2}+1 = \frac{1}{\frac{9}{16}} - \frac{1}{\frac{25}{16}}+1=$

$\cancel{= \frac{16}{9} - \frac{16}{25}+1 = \frac{16\cdot 25-16\cdot 9}{9\cdot 25}+1 = \frac{256}{9\cdot 25}+1} = \frac{2}{\sqrt{3}}+\frac{2}{\sqrt{5}}+1 = \frac{2(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{\sqrt{15}}+1$

$\left(\frac{3}{4}\right)^2 - \left(\frac{5}{4}\right)^2+1 = -\left(\frac{25-9}{16}\right)+1 = -1+1=0$

$x \in (-\infty; -6) \cup (0; +\infty)$

$x^2+6x>0$

$t=8 \qquad t \leq 8 \Rightarrow x^2+6x \leq 8$

$x^2+6x-8 \leq 0 \qquad D = 36+4\cdot 8 = 36+32 = 68 = 4\cdot 17$

$x_{1,2} = \frac{-6 \pm 2\sqrt{17}}{2} = -3 \pm \sqrt{17}$

$\cancel{\begin{cases} x \in [-3-\sqrt{17}; -3+\sqrt{17}] \\ x \in (-\infty; -6) \cup (0; +\infty) \end{cases}}$ $\qquad x \in [-3-\sqrt{17}; -6) \cup (0; -3+\sqrt{17}]$

$f(\frac{1}{8}) = -2f(2)$

$f(2)=f(8)+f(\frac{1}{4}) \Rightarrow$

$f(1)=0 \qquad f(2)=f(4)+f(\frac{1}{2}) \Rightarrow f(\frac{1}{2}) = -f(2)$

$f(8)=3f(2)$

$f(4)=2f(2) \qquad f(9)=2f(3)$

$f(3)=f(\frac{1}{3})+f(9) \Rightarrow f(\frac{1}{3}) = -f(3)$

$f(\frac{x}{y}) = f(x)+f(\frac{1}{y})$

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 — простые числа

9 чисел $\quad 3 \leq x \leq 27$
$3 \leq y \leq 27$

$f(2)=0 \quad f(3)=0 \quad f(7)=1 \quad f(13)=3$
$f(4)=0 \quad f(5)=1 \quad f(11)=2 \quad f(17)=4$
$f(19)=4$

Пусть для x полож. прост. ч., тогда: $f(x)>0$ $\quad f(x)\geq 0$ $\quad f(23)=5$

Для x-а отриц.: ~~$f(x)$~~ ≥ 0 $\quad f(6)=0 \quad f(\frac{1}{x})<0$

$f(10)=1 \quad f(16)=0 \quad f(22)=2$

$f(\frac{1}{x}) \geq 0 \quad f(12)=0 \quad f(18)=0 \quad f(24)=0$

$f(14)=1 \quad f(20)=1 \quad f(25)=2$

$f(15)=1 \quad f(21)=1 \quad f(26)=3$

$f(27)=0$

Если $f(x)=0$, то $f(\frac{1}{y}) = -1; -2; -3; -4$.

$f(x)=1$, то $f(\frac{1}{y}) = -2; -3; -4$.

$f(x)=2$, то $f(\frac{1}{y}) = -3; -4$.

$f(x)=3 \quad f(\frac{1}{y}) = -4$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)