МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 2

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6}, \\ x^2+36y^2-12x-36y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$10x+\left|x^2-10x\right|^{\log_3 4}\geqslant x^2+5^{\log_3\left(10x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{15}{2}$, $BD=\frac{17}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $2\leqslant x\leqslant 25$, $2\leqslant y\leqslant 25$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{16x-16}{4x-5}\leqslant ax+b\leqslant -32x^2+36x-3$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[\frac{1}{4};1\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $KLMN$, вершина N которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра KN. Известно, что $KL=3$, $KM=1$, $MN=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра LM. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6} & (1)\\ x^2+36y^2-12x-36y=45 & (2)\end{cases}$$

$$(1)\quad \begin{cases}(x-12y)^2=2xy-12y-x+6\\ x\geq 12y\end{cases}$$

$$x^2-24xy+144y^2=2xy-12y-x+6$$

$$x^2-26xy+144y^2=-12y-x+6$$

$$x^2-(26y-1)x+144y^2+12y-6=0$$

Решим отн. x: $D=(26y-1)^2-4(144y^2+12y-6)=676y^2-52y+$ $+1-576y^2-48y+24=100y^2-100y+25=25(4y^2-4y+1)=(5(2y-1))^2$

$$\left[\begin{array}{l} x=\frac{26y-1-5(2y-1)}{2}\\ x=\frac{26y-1+5(2y-1)}{2}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x=8y+2\\ x=18y-3\end{array}\right.$$

Т.к. $x\geq 12y$, то при $x=8y+2$: $8y+2\geq 12y \Rightarrow y\leq \frac{1}{2}$

при $x=18y-3$: $18y-3\geq 12y \Rightarrow y\geq \frac{1}{2}$

Подставим $x=8y+2$ во (2) равенство:

$$(8y+2)^2+36y^2-12(8y+2)-36y=45$$

$$4+64y^2+32y+36y^2-96y-24-36y-45=0$$

$$100y^2-100y-65=0$$

$$20y^2-20y-13=0$$

$$D=20^2+4\cdot 20\cdot 13=4^2\cdot 25+4\cdot 4\cdot 5\cdot 13=4^2\cdot 9\cdot 10$$

$$\left[\begin{array}{l} y=\frac{20-12\sqrt{10}}{40}\\ y=\frac{20+12\sqrt{10}}{40}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} y=\frac{1}{2}-\frac{3\sqrt{10}}{10}\\ y=\frac{1}{2}+\frac{3\sqrt{10}}{10}\end{array}\right.$$; Т.к. при $x=8y+2$, $y\leq\frac{1}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow y=\frac{1}{2}-\frac{3\sqrt{10}}{10} \Rightarrow x=8\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{3\sqrt{10}}{10}\right)+2=6-\frac{12\sqrt{10}}{\cancel{10}5}$, т.с.

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

$\left(6-\frac{12\sqrt{10}}{5}; \frac{1}{2}-\frac{3\sqrt{10}}{10}\right)$ — решение системы

Подставим $x=18y-3$ во (2) ур-е:

$(18y-3)^2-12(18y-3)+36y^2-36y-45=0$

$324y^2-108y+9-216y+36+36y^2-36y-45=0$

$360y^2-360y=0$

$\left[\begin{array}{l} y=0 \\ y=1 \end{array}\right.$; т.к. при $x=18y-3$, $y\geq\frac{1}{2}$, то $y=1 \Rightarrow x=18-3=15 \Rightarrow$

$\Rightarrow (15;1)$ — решение системы

Ответ: $\left(6-\frac{12\sqrt{10}}{5}; \frac{1}{2}-\frac{3\sqrt{10}}{10}\right)$; $(15;1)$.

№3.

$10x+|x^2-10x|^{\log_3 4} \geq x^2+5^{\log_3(10x-x^2)}$

1) $10x-x^2>0$; $x(10-x)>0 \Rightarrow x\in(0;10)$

2) Из п.1 $\Rightarrow |x^2-10x|=10x-x^2$, тогда

$\cancel{(x^2-10x)^{\log_3 4}}$ $(10x-x^2)+(10x-x^2)^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3(10x-x^2)}$

$3^{\log_3(10x-x^2)}+4^{\log_3(10x-x^2)} \geq 5^{\log_3(10x-x^2)}$

Пусть $\log_3(10x-x^2)=t$, тогда

$3^t+4^t\geq 5^t$

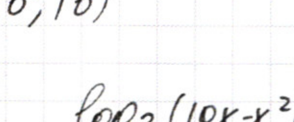
Заметим, что ~~данное~~ данное нер-во верно только для $t\leq 2$ ~~тогда~~ (=> по теореме Ферма)

$\log_3(10x-x^2)\leq 2$

$10x-x^2\leq 9$

$x^2-10x+9\geq 0$

$(x-9)(x-1)\geq 0$



С уч. п.1 $x\in(0;1]\cup[9;10)$

Ответ: $(0;1]\cup[9;10)$.

№1.

$\left.\begin{array}{l} \sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-2/5 \end{array}\right\} \Rightarrow \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}\sin(2\alpha+2\beta)$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$2\sin\frac{2\alpha+4\beta+2\alpha}{2}\cdot\cos\frac{2\alpha+4\beta-2\alpha}{2}=\frac{2}{\sqrt5}\cdot\sin(2\alpha+2\beta)$$

$$2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos2\beta=\frac{2}{\sqrt5}\cdot\sin(2\alpha+2\beta)\,\Big|:\sin(2\alpha+2\beta),\ \sin(2\alpha+2\beta)\neq0$$

$$2\cos2\beta=\frac{2}{\sqrt5},$$

$$\cos2\beta=\frac{1}{\sqrt5}$$, тогда

$$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin2\alpha=-\frac25$$

$$\sin(2\alpha+2\beta)\cos2\beta+\sin2\beta\cos(2\alpha+2\beta)+\sin2\alpha=-\frac25$$

$$\left(-\frac{1}{\sqrt5}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt5}+\sin2\beta\cos(2\alpha+2\beta)+\sin2\alpha=-\frac25$$

Т.к. $\cos2\beta=\frac{1}{\sqrt5}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\sin2\beta=\frac{2}{\sqrt5}\\ \sin2\beta=-\frac{2}{\sqrt5}\end{array}\right.$

Т.к. $\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt5}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\cos(2\alpha+2\beta)=\frac{2}{\sqrt5}\\ \cos(2\alpha+2\beta)=-\frac{2}{\sqrt5}\end{array}\right.$

1) Пусть $\sin2\beta=\frac{2}{\sqrt5}$ и $\cos(2\alpha+2\beta)=\frac{2}{\sqrt5}$ или $\sin2\beta=-\frac{2}{\sqrt5}$ и $\cos(2\alpha+2\beta)=-\frac{2}{\sqrt5}$, тогда

$$-\frac15+\frac{2}{\sqrt5}\cdot\frac{2}{\sqrt5}+\sin2\alpha=-\frac25$$

$$\sin2\alpha=-1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\alpha=-\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z\Rightarrow\alpha=-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z\Rightarrow$$

$$\Rightarrow tg\alpha=tg\left(-\frac{\pi}{4}+\pi n\right)=-tg\frac{\pi}{4}=\underline{-1}$$

2) Пусть $\sin2\beta$ и $\cos(2\alpha+2\beta)$ будут разных знаков, тогда

$$-\frac15-\frac{2}{\sqrt5}\cdot\frac{2}{\sqrt5}+\sin2\alpha=-\frac25\Rightarrow\sin2\alpha=\frac35\Rightarrow\left[\begin{array}{l}tg2\alpha=\frac34\\ tg2\alpha=-\frac34\end{array}\right.$$

$$tg2\alpha=\frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}\Rightarrow tg2\alpha-tg2\alpha\,tg^2\alpha=2tg\alpha$$

$$tg2\alpha\,tg^2\alpha+2tg\alpha-tg2\alpha=0$$

Заметим, что от знака $tg\,2\alpha$ корни ур-я ~~будут~~ не зависят, тогда:

$$\frac{3}{4}tg^2\alpha + 2tg\alpha - \frac{3}{4} = 0$$

$$3tg^2\alpha + 8tg\alpha - 3 = 0$$

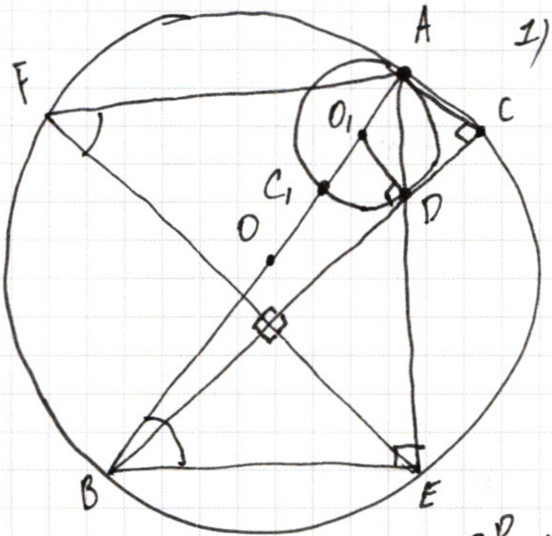
$$3\left(tg\alpha - \frac{-8-\sqrt{64+4\cdot 9}}{2\cdot 3}\right)\left(tg\alpha - \frac{-8+\sqrt{64+4\cdot 9}}{2\cdot 3}\right) = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} tg\alpha = -3 \\ tg\alpha = \frac{1}{3} \end{array}\right.$$

Таким образом: $\left[\begin{array}{l} tg\alpha = -1 \\ tg\alpha = -3 \\ tg\alpha = \frac{1}{3} \end{array}\right.$ — три значения по условию меньше быть не может, поэтому мы их можем не проверять.

<u>Ответ</u>: $-3; -1; \frac{1}{3}$.

№4.



1) $\angle ACB = 90°$ (опирается на диаметр)

Пусть $O_1C_1 = O_1A = r$, $BO = OA = R$

$O_1D \perp BC$ (BC касается ω в т. D)

$\triangle BO_1D \sim \triangle BAC$ (по общему и прямому углу) =>

$$\Rightarrow \frac{BO_1}{BA} = \frac{BD}{BC}$$

$$\frac{2R-r}{2R} = \frac{\frac{17}{2}}{\frac{32}{2}} = \frac{17}{32}$$

$$\frac{2R-r}{R} = \frac{17}{16}$$

$$2 - \frac{r}{R} = \frac{17}{16} \Rightarrow \frac{r}{R} = \frac{15}{16} \Rightarrow 16r = 15R \Rightarrow r = \frac{15}{16}R$$

2) По т-ме Пифагора в $\triangle BO_1D$: $\left(\frac{17}{2}\right)^2 + r^2 = (2R-r)^2$

$$\frac{17^2}{4} + r^2 = 4R^2 - 4Rr + r^2$$

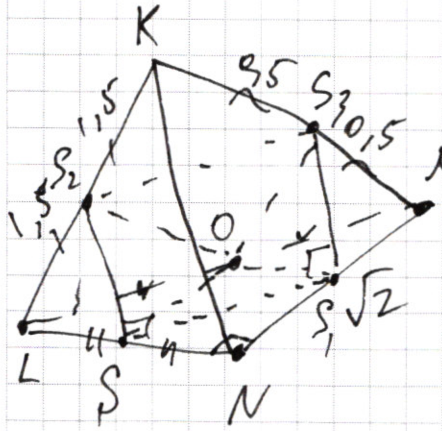
$$\frac{17^2}{4} = 4R(R-r)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

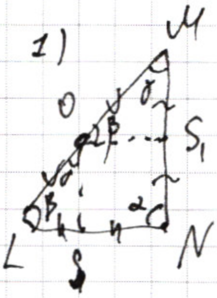
$\frac{17^2}{16} = R \cdot \frac{1}{16} R \Rightarrow R = 17 \Rightarrow r = \frac{15 \cdot 17}{16} = \frac{255}{16}$

Ответ: $R_\Omega = 17$; $R_\omega = \frac{255}{16}$

№7.



1)



$\angle SBS_1 + \angle SNS_1 = 180°$ (т.к. четырёхугольник вписан в окр.)

Из рис.:

$180° - \gamma - \beta + \alpha = 180°$

$180° - \gamma - \beta + 180° - \gamma - \beta = 180° \Rightarrow$

$\Rightarrow \gamma + \beta = 90° \Rightarrow \alpha = 90° \Rightarrow \angle LNM = 90°$

2) $\left.\begin{array}{l} SS_2 \parallel KN \\ SS_3 \parallel KN \end{array}\right\} \Rightarrow SS_2 \parallel SS_3$ $\Big\} \Rightarrow SS_1S_2S_3$ - параллелогр.

аналогично $S_2S_3 \parallel SS_1$

$SS_2S_3S_1$ - вписан в окр. $\Big\} \Rightarrow$

$\Rightarrow SS_2S_3S_1$ - прямоугольник

3) $\left.\begin{array}{l} SS_2 \perp SS_1 \\ SS_2 \parallel KN \end{array}\right\} \Rightarrow KN \perp SS_1$

$t^{\log_3 4} + t \geq t^{\log_3 5}$

$\cancel{\log_3 4 = x^2}$

$4^{\log_3 t} + t \geq 5^{\log_3 t}$

$\log_3 t = y \Rightarrow t = 3^y$

$4^y + 3^y \geq 5^y$

$3^y + 4^y \geq 5^y$

$f'(x) =$

$3^y + 3^y \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^y \geq 3^y$

$1 + \left(\frac{4}{3}\right)^y \geq \left(\frac{5}{3}\right)^y$

$\ln(3^y + 4^y) \geq y \ln 5$

$\log_5(3^y + 4^y) - y$

$\frac{\ln(3^y + 4^y)}{\ln 5} - y =$

$= \frac{3^y \ln 3 + 4^y \ln 4}{\ln 5 (3^y + 4^y)} - 1$

$3^y \ln 3 + 4^y \ln 4 = \ln 5 (3^y + 4^y)$

$f' = 4^y \ln 4 + 3^y \ln 3 - 5^y \ln 5$

$\ln 4^{4^y} + \ln 3^{3^y} - \ln 5^{5^y}$

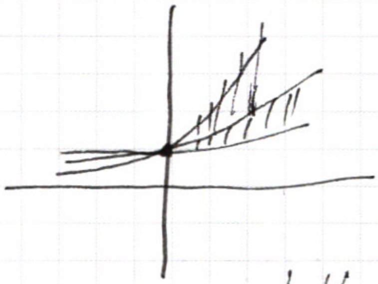
$\ln \frac{4^{4^y} \cdot 3^{3^y}}{5^{5^y}} \geq 0$

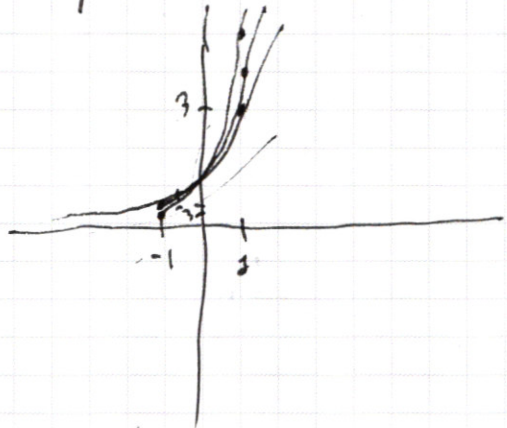
$\frac{4^{4^y} \cdot 3^{4^y}}{5^{5^y}} \geq 1$

$4^{4^y} \cdot 3^{3^y} \geq 5^{5^y}$

$(4 \cdot 2)^y$ $\ln(ab)$

$\ln a + \ln$





$3^x + 4^x \geq 5^x$

$3^x + 4^x \leq 5^x$

$\ln(3^x + 4^x) \leq x \ln 5$

$(a^x)' = a^x \ln a$

$3^x + 4^x \geq 2\sqrt{12^x}$

$2 \cdot 12^{\frac{x}{2}} \geq 5^x$

$3^t + 4^t \geq$

$3^t + 4^t - 5^t \geq 0$

$t = 2$ $t = 1 \Rightarrow 3 + 4 - 5 \geq 0$

$t = 3$

$9 + 16 - 25 \geq 0$

$\left(\frac{3}{5}\right)^t \ln 3 + \left(\frac{4}{5}\right)^t \ln 4 - \ln 5$

$\log_5(3^t + 4^t) \geq t$

$3^t \left(1 + \left(\frac{4}{3}\right)^t\right)$

$3^t \ln 3 + 4^t \ln 4 - 5^t \ln 5$

$e^x = e^x \ln e = e^x$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{16x-16}{4x-5} = \frac{4(4x-5)+4}{4x-5} = 4 + \frac{4}{4x-5}$$

$-32x^2+36x-3$

$D = 36^2 - 4\cdot 32\cdot 3 =$

$= 4^2\cdot 9^2 - 4^2\cdot 3\cdot 8 =$

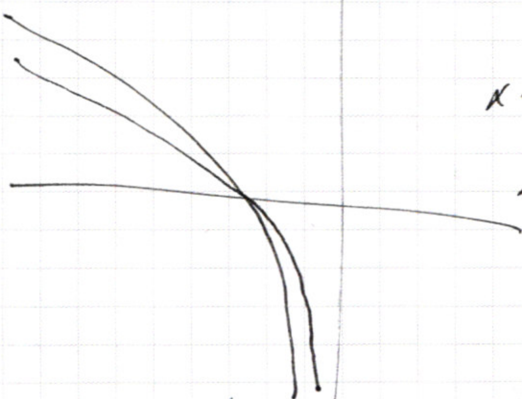
$= 4^2\cdot 3(27-24) = 4^2 3^2 = 12$

$\frac{-36 \pm 12}{-2\cdot 32}$

$x = \frac{-48}{-2\cdot 32} = \frac{24}{32} = \frac{3}{4} = \frac{6}{8}$

$x = \frac{-24}{-2\cdot 32} = \frac{12}{32} = \frac{3}{8}$

$\left(\frac{3}{5}\right)^{\log_3 t} + \left(\frac{4}{5}\right)^{\log_3 t} = 1$



$|x^2-10x|^{\log_3 4} \geq (x^2-10x) + (10x-x^2)^{\log_3 5}$

$(10x-x^2)^{\log_3 4} \geq -(10x-x^2) + (10x-x^2)^{\log_3 5}$

$(10x-x^2)^{\log_3 4} + (10x-x^2) \geq (10x-x^2)^{\log_3 5}$

$t^{\log_3 4} + t \geq t^{\log_3 5}$ $t>0$

$t^{\log_3 4} + t \geq 2\sqrt{t^{\log_3 4}\cdot t}$

$\geq 2\cdot t^{\log_3 4+1}$

$2\cdot t^{\log_3 12} \geq t^{\log_3 5}$

$t^{\log_3 \frac{12}{5}} \geq \frac{1}{2}$

$t \geq \frac{1}{2^{\log_3 \frac{12}{5}}}$

$5^x - 4^x$

$\left(\frac{3}{5}\right)^x \ln\frac{3}{5} + \left(\frac{4}{5}\right)^x \ln\frac{4}{5}$

$4^{\log_3 t} - 5^{\log_3 t} + t \geq 0$

$t \geq 5^{\log_3 t} - 4^{\log_3 t}$

$y = 5^x$ $x = \log_3 t$ $t = 3^x$

$3^x + 4^x \geq 5^x$

$f'(x) = 3^x \ln 3 + 4^x \ln 4 - 5^x \ln 5$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$f' = 3^t \ln 3 + 4^t \ln 4 - 5^t \ln 5$

$y^t \ln y$

$\frac{3^{3^t} \cdot 4^{4^t}}{5^{5^t}} \geq 1$ при $t \leq 2$

$\sqrt{5}\,tg^2 + 2tg - \sqrt{5} = 0$

$D = 4 + 4 \cdot 5 = 4 \cdot$

$\sqrt{5} - \sqrt{5}\,tg^2\alpha = 2tg\alpha$

$tg 2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha}$

O.

$\cos 2\beta = 1$

$2\sin(2\alpha + 2\beta) \cdot \cos 2\beta = -2\sin(2\alpha + 2\beta)$

$2\sin\left(\frac{2\alpha + 2\beta + 2\beta + 2\alpha}{2}\right) \cdot \cos\frac{2\alpha + 2\beta + 2\beta - 2\alpha}{2} = -2\sin(2\alpha + 2\beta)$

$2\sin\left(\frac{x + a + b}{2}\right)\cos\frac{x + a - b}{2} = -2\sin x$

$\sin(x + a) + \sin \alpha = -2\sin x$

$\sqrt{6}$, $\sqrt{5}$, 1

$\sin x = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

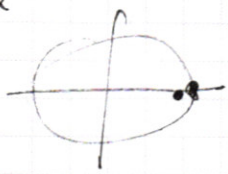
$\sin(a + b) = -1$

$\sin 2\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin(2\alpha + \pi) = -\sin 2\alpha$

$\sin(x + a) + \sin$

$\sin x = -\frac{1}{\sqrt{5}}$



$= -\frac{1}{\sqrt{5}}\cos 2\beta + \frac{2}{\sqrt{5}}\sin 2\beta + \sin 2\alpha$

$= \sin(2\alpha + 2\beta)\cos 2\beta + \cos(2\alpha + 2\beta)\sin 2\beta =$

$\sin(2\alpha + 4\beta) = \cancel{2\sin(\alpha + 2\beta)\cos(\alpha + 2\beta)} +$

$= 2\sin\alpha\cos\beta$

$\sin 2\alpha\cos 2\beta + \cos 2\alpha \cdot \sin 2\beta =$

$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta) = -\frac{2}{5}$

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5} = 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos$

$2\cdot\left(+\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\cdot\cos = +\frac{2}{5}$

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = +\frac{2}{\sqrt{5}}\sin(2\alpha+2\beta)$

$\cos = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$2\sin\frac{4\alpha+4\beta}{2}\cos 2\beta = +\frac{2}{\sqrt{5}}\sin(2\alpha+2\beta)$

$2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = +\frac{2}{\sqrt{5}}\sin(2\alpha+2\beta)$

$2\cos 2\beta = +\frac{2}{\sqrt{5}}$

sin

$\cos 2\beta = +\frac{1}{\sqrt{5}}$

$2|\sin = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$\sin 2\alpha\cos 2\beta + \cos 2\alpha\cdot\sin 2\beta = +\frac{1}{\sqrt{5}}$

$-\frac{1}{\sqrt{5}}\sin 2\alpha + \frac{2}{\sqrt{5}}\cos 2\alpha = +\frac{1}{\sqrt{5}}$

$tg 2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$

$-\sin 2\alpha + 2\cos 2\alpha = \sqrt{5}$

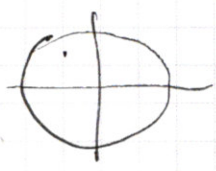
$tg 2\alpha -$

$\sin\left(x + \arccos\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = 1$

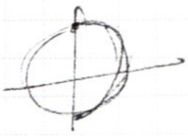
$(-1)^n$ $+\pi n$

$x + \arccos\frac{1}{\sqrt{5}} = -\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}} + \pi n$

$x = \left(-\frac{\pi}{2}\right)^{-1} + \pi n$

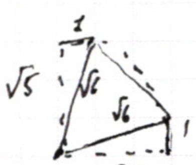


$x = (-1)^{n+1}\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}} - \arccos\frac{1}{\sqrt{5}} + \pi n$ $\left(-\frac{\pi}{6}\right)^n$



$n = \varphi$

$n =$



$-\frac{\pi}{2} + \pi n$

$x = (-1)^n\frac{\pi}{2} + \pi n$

$tg 2x =$

$n = \varphi$

$n = 2$

$n = 1 = -\frac{\pi}{2} + \pi$

$tg\left(\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}} - arc\right.$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$10x + |x^2-10x|^{\log_3 4} \geq x^2 + 5^{\log_3(10x-x^2)}$

$|x^2-10x|^{\log_3 4} \geq (x^2-10x) + 5^{\log_3(10x-x^2)}$

$|x^2-10x| = t, t \geq 0$

$t^{\log_3 4} \geq t + 5^{\log_3 t}$

$t^{\log_3 4} \geq t + t^{\log_3 5}$

$t \geq 0 \quad t^{\log_3 4} \geq t + t^{\log_{\frac{5}{4}} 3 \cdot 4}$

$x^3 \geq x + x^2$

$f(t) = t + t^{\log_3 5} - t^{\log_3 4}$

$f'(t) = 1 + \log_3 5\, t^{\log_3 5 - 1} - \log_3 4\, t^{\log_3 4 - 1}$

$1 + \log_3 5\, t^{\log_3 5 - 1} - \log_3 4\, t^{\log_3 4 - 1} \geq 0$

$\frac{a-n-1}{2} \log_{\frac{1}{2}} x \leq 1$

$x \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{\frac{a-n-1}{2}}}$

$\log_{\frac{1}{2}} x \leq \frac{2}{a-n-1}$

$\log_3 5 - \log_3 4 = \log_3 \frac{5}{4} - \log_3 4$

$\log_2 x \leq \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{a-n-1}}$

$x^n \geq x + x^{n+a}$

$\log_3 \frac{5}{16} - 1$

$x^{\frac{a-n-1}{2}} \leq \frac{1}{2} \quad x^n \geq x^n\left(\frac{1}{x^{n-1}} + x^a\right)$

$a+b \quad \sqrt{ab}$

$1+1=2$

$1 \geq \left(\frac{1}{x^{n-1}} + x^a\right)$

$\frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2} \geq 2\sqrt{1}$

$\frac{1}{x^{n-1}} + x^a \geq 2\sqrt{\frac{x^a}{x^{n-1}}}$

$1 \geq 2 \cdot x^{\frac{a-n-1}{2}} \quad x^{\frac{a-n-1}{2}} = \frac{1}{2} \quad 2\sqrt{}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6}$

$x^2+36y^2-12x-36y=45$

$144=12^2=3^2\cdot4^2=3^2\cdot$

$324=18^2=9^2\cdot2^2$

$(3\cdot2)$

$\cancel{9\cdot2}$

$x^2-12x+(36y^2-36y-45)=0$

$D=144-144y^2+144y+180=-144y^2+144y+324=$

$=\cancel{12^2y}\quad -36(4y^2-\cancel{3}4y-9)$

400
160
16
576

$(x-12y)^2=2xy-12y-x+6,\ x\geq12y$

$x^2-\cancel{144}24xy+144y^2=2xy-12y-x+6$

26
26
156
52
676

$x^2-26xy+144y^2=-12y-x+6$

$x^2-(26y-1)x+144y^2+12y-6=0$

$D=(26y-1)^2-4(144y^2+12y-6)=676y^2-52y+1-576y^2-$

$-48y+24=100y^2-100y+25=25(4y^2-4y+1)=$

$=(5(2y-1))^2$

$x=\dfrac{26y-1-5(2y-1)}{2}=8y+2$ $\qquad 8y+2\geq12y$

$x=\dfrac{26y-1+5(2y-1)}{2}=18y-3\quad \geq12y\Rightarrow y\geq\frac{1}{2}$ $\qquad 4y\leq2$

$y\leq\frac{1}{2}$

$36y^2+(8y+2)^2-12\cancel{x}\cancel{36}(8y+2)-36y=45$

$36y^2+64y^2+32y+4-96y-24-36y-45=0$

$100y^2-100y-65=0$

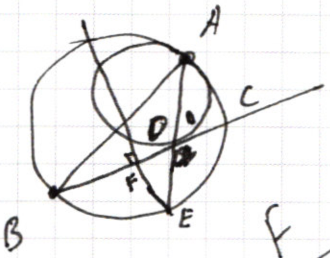
$20y^2-20y-13=0$ $\qquad \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{230}}{200}$

$D=400+40\cdot13=40\cdot23=4\cdot230$

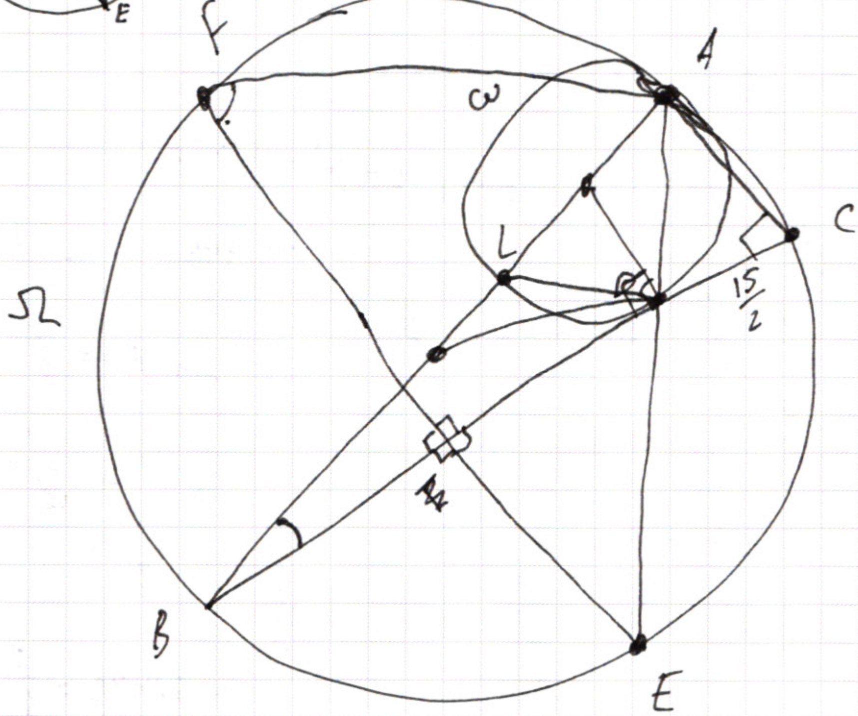
$\dfrac{100\pm2\sqrt{230}}{2\cdot100}=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{230}}{200}$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

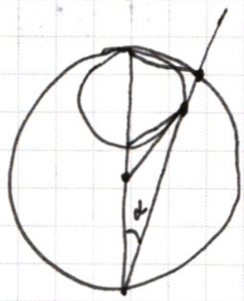
Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

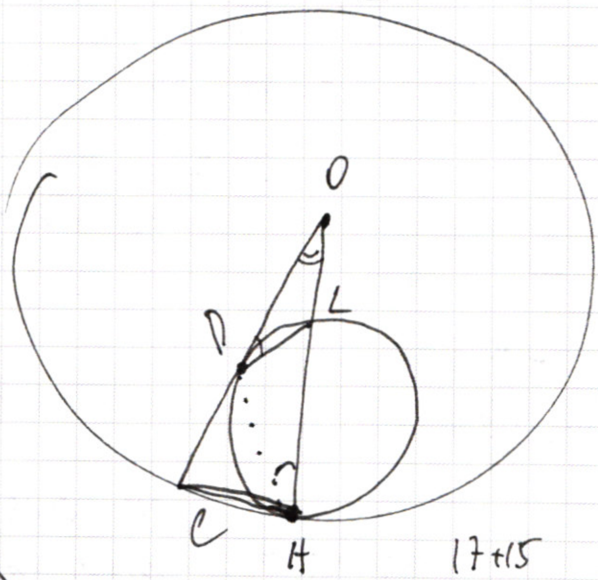


R_{Ω} – ? R_{ω} – ?
$\angle AFE$
$S(\triangle AFE)$



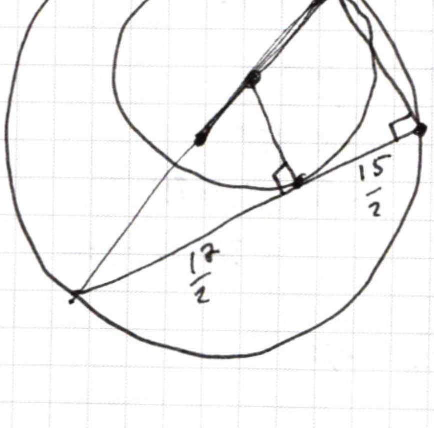
$15 \cdot 17 =$
$150 + 15 \cdot 7 =$
$= 150 + 70 + 35 =$
$= 220 + 35 =$





$\frac{32}{17} = \frac{R}{R-r}$

$32R - 32r = 17R$
$15R = 32r$



$1 - \frac{15}{32}$

$\frac{\frac{17+15}{2}}{\frac{17}{2}} = \frac{32}{17} = \frac{2R}{2R-2r}$

$17 \cdot 2 = 34$
$\sqrt{34}$

$\frac{289}{4} + r^2 = (2R-r)^2$
$\frac{289}{4} + \cancel{r^2} = 4R^2 - 4Rr + \cancel{r^2}$
$\frac{289}{4} = 4R(R-r)$

$\frac{289}{16} = R^2 \cdot \frac{17}{32}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta + \cos(2\alpha+2\beta)\cdot\sin 2\beta + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$ $\quad \sin(-\pi+4\beta) - 1 = -\frac{2}{5}$

$\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt5}$ $\quad -\sin 4\beta - 1 = -\frac{2}{5}$

$\cos 2\beta$ $\quad -\frac{1}{\sqrt5}\cdot\frac{1}{\sqrt5} \pm \frac{4}{5} + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$ $\quad \sin 4\beta = = \frac{3}{5}$

$\alpha = -\frac{\pi}{4} + \pi n$ $\quad -\frac{1}{5} - \frac{4}{5} + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$ $\quad 4 \quad 5 \quad 3$ $\quad \frac{1}{\sqrt5} = \frac{3}{10}$

$-1 + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$-\pi$ $\quad -\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt5}$ $\quad \sin 2\alpha = \frac{3}{5}$ $\quad tg$

$\frac{3}{4} = \frac{\cancel{1}2x}{1\cancel{+}x^2}$ $\quad -\sin 4\beta = \frac{3}{5}$

$-\frac{1}{5} + \frac{4}{5} + z = -\frac{2}{5}$ $\quad 3 - 3x^2 = 8x$ $\quad -2\sin 2\beta\cdot\frac{1}{\sqrt5} = \frac{3}{\sqrt5}$

$3x^2 + 8x - 3 = 0$

$\frac{3}{5} + z.$

$x = \frac{-8 \pm \sqrt{64+4\cdot 9}}{6} = \frac{-8 \pm 10}{6}$

$\cos 4\beta - 1 = \frac{2}{\cancel{5}}$ $\quad z = -1$

$2\alpha = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$ $\quad \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = \frac{1}{3} \end{array}\right.$

$\frac{3}{5}$

$2\cos^2 - 1$ $\quad \alpha = -\frac{\pi}{4} + \pi n$

$2\cos^2 = \frac{8}{5}$

$\cos^2 = \frac{2}{\sqrt5}$ $\quad \frac{3}{4}$

$tg(\alpha+\beta) = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}$

$\frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha\cdot tg\beta}$

$-3 + 3x^2 = 8x$

$-\frac{3}{4} = \frac{2\cancel{tg}x}{1-x^2}$ $\quad -3 + 3x^2 = 4x$ $\quad 3x^2 - 8x - 3 = 0$

$3x^2 - 4x - 3 = 0$

$\frac{3}{4} = 3 - 3x^2 = 8x$ $\quad D = 16 + 4\cdot 9 = 16 + 36$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$f(ab) = f(a) + F($

$f(2) = [2/4]$

$2, 3 = 0$

$5, 7 = 1$

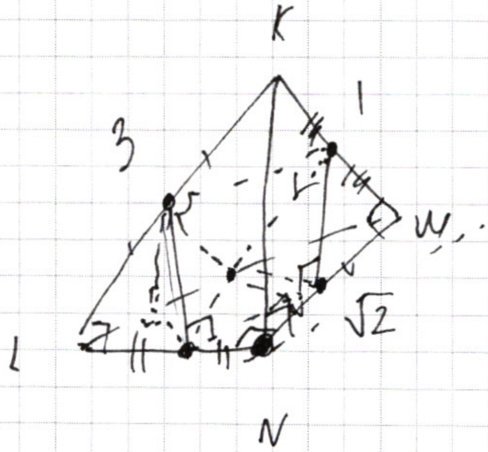
$11, \cancel{1} = 2$

$13 = 3$

$17 = 4$

$19 = 4$

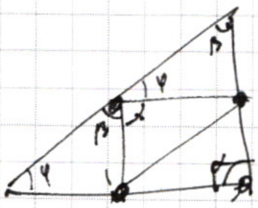
$23 = 5$



$1{,}5 + 0{,}5 + a = 2a$

$a = 2$

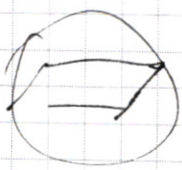
$\frac{1}{5}$



$180 - \varphi - \beta + 180 - \varphi - \beta = 180$

$-2(\varphi - \beta) + 180$

$a^2 + b^2 =$



☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) $\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin 2\alpha + \sin(2\alpha+4\beta) = -\frac{2}{5}$

$\frac{1}{5} = \frac{2}{\sqrt5}$

$\sin(2\alpha+2\beta+2\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta + \cos(2\alpha+2\beta)\cdot\sin 2\beta + \sin 2\alpha = -2/5$

$-\frac{1}{\sqrt5}\cos 2\beta + \frac{2}{\sqrt5}\sin 2\beta + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$\sin 2\alpha \cos 2\beta + \cos 2\alpha\cdot\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt5}$

$10x + |x^2-10x|^{\log_3 4} \geq x^2 + 5^{\log_3(10x-x^2)}$

$(x^2-10x)^{\log_3 4} \geq x^2-10x + 5^{\log_3(10x-x^2)}$

$t^{\log_3 4} \geq t + 5^{\log_3 t}$

$t^{\log_3 4} = 4^{\log_3 t}$

$\log_3 4 \log_3 t \vee \log_3 4 \log_3 t$

$4^{\log_3 t} \geq t + 5^{\log_3 t}$

$t = 1$

$4^0 \geq 1 + 5^0$

$1 \geq 2$

$4^{\log_3 t} \geq 5^{\log_3 t}$

$4^x \geq 5^x$

$x - 12y = \sqrt{2xy-12x-12y-x+6}$

$x^2 + 36y^2 - 12x - 36y = 45$

$x^2 - 24xy + 144y^2 = 2xy - 12x - 12y - x + 6$

$x^2 = 26xy$

$36(y^2 - y$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin(2\alpha+2\beta+2\beta) + \sin 2\alpha = \sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta + \cos(2\alpha+2\beta)\sin 2\beta +$
$+ \sin 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}\cos 2\beta \pm \frac{2}{\sqrt{5}}\sin 2\beta + \sin 2\alpha =$

если $\cos(2\alpha+2\beta) = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$= -\frac{1}{\sqrt{5}}\cos 2\beta + \frac{1}{\sqrt{5}}\sin 2\beta$

$\sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta + \cos 2\alpha \cdot \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin 2\alpha \cdot \cos 4\beta + \cos 2\alpha \cdot \sin 4\beta + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$\sin 2\alpha(\cos 4\beta + 1) + \cos 2\alpha \cdot \sin 4\beta = -\frac{2}{5}$

$\sin 2\alpha \cdot 2\cos^2 2\beta + 2\cos 2\alpha \cdot \sin 2\beta \cdot \cos 2\beta = -\frac{2}{5}$

$2\cos 2\beta(2\sin 2\alpha + 2\cos 2\alpha \cdot \cos 2\beta) = -\frac{2}{5}$

$$\begin{cases} x^2 - 24xy + 144y^2 = 2xy - 12y - x + 6 \\ x^2 + 36y^2 - 12x - 36y = 45 \end{cases} \qquad x \geq 12y$$

$36 \cdot 3 = 90$, 18

$x^2 - 12x + 36 + 36y^2$ $\quad 05,\ 65,\ 80$

$$\begin{cases} x - 12y = \sqrt{2xy - (x+12y) + 6} \\ x^2 \end{cases}$$

$18 \cdot 12 = 36,\ 18,\ 216$

$x^2 - 26xy + x + 144y^2 + 12y - 6 = 0$

$D = (1-26y)^2 - 4(144y^2 + 12y - 6) =$

$= 1 - 52y + 676y^2 - 400y^2 - 160y^2 \cdot 16y - 48y + 24 =$ $\quad 286,\ 160,\ 116$

$= 100y^2 - 100y + 25 =$
$= 25(4y^2 - 4y + 1)$
$25(2y-1)^2$

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{26y - 1 \pm 5(2y-1)}{2} \\ x = \end{array}\right.$$

$6 \quad -\frac{1}{2} \quad 16$

$x = \frac{26y - 1 - 10y + 5}{2} = 8y + 2$

$x = \frac{26y - 1 + 10y - 5}{2} = 18y - 3 \quad -\frac{1}{2}$

$216,\ 108,\ 324$

$x^2 - 12\cancel{x} + 36y^2 - 36y - 45 = 0$

$D = 144 - 144y^2 - 144y - 180 =$

$\frac{12}{2} = 6 \quad = -144y^2 + 144y + 36 =$

$= -36(-4y^2 + 4y + 1) = 0 \Rightarrow$

$x = \quad 144$

$(2y+1)^2 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}$

$x =$

$\boxtimes$ черновик $\quad \square$ чистовик $\qquad$ Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) $\qquad$ (Нумеровать только чистовики)