МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 2

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6},\\ x^2+36y^2-12x-36y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$10x+\left|x^2-10x\right|^{\log_3 4}\geqslant x^2+5^{\log_3\left(10x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{15}{2}$, $BD=\frac{17}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $2\leqslant x\leqslant 25$, $2\leqslant y\leqslant 25$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{16x-16}{4x-5}\leqslant ax+b\leqslant -32x^2+36x-3$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[\frac{1}{4};1\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $KLMN$, вершина N которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра KN. Известно, что $KL=3$, $KM=1$, $MN=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра LM. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

$2\alpha+2\beta=\gamma$

$\sin(\gamma+2\beta)+\sin(\gamma-2\beta) = -\frac{2}{5}$

$2\sin\gamma\cos 2\beta = -\frac{2}{5}$

$\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \sin 2\beta = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$

$\sin 2\alpha\cos 2\alpha + \sin 2\beta\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin 2\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt{5}} \pm \frac{2}{\sqrt{5}}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin 2\alpha \pm 2\cos 2\alpha = -1 \Rightarrow tg 2\alpha \pm 2 = -\frac{1}{\cos 2\alpha}$

$tg^2 2\alpha \pm 4 tg 2\alpha + 4 = tg^2 2\alpha + 1$

$\cancel{tg\alpha =}\ tg 2\alpha = \pm\frac{3}{4}$

$tg 2\alpha = \frac{2 tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$

$$\left[\begin{aligned} &3tg^2\alpha + 8tg\alpha - 3 = 0 \\ &3tg^2\alpha - 8tg\alpha - 3 = 0 \end{aligned}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &tg\alpha = \pm\frac{1}{3} \\ &tg\alpha = \pm 3 \end{aligned}\right.$$

Ответ: $\pm\frac{1}{3}$; ± 3

№2

$$\begin{cases} x-12y = \sqrt{2xy-12y-x+6} \\ x^2+36y^2-12x-36y=45 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-12y)^2 = 2xy-12y-x+6 \\ x \geq 12y \\ (x-6)^2+(6y-3)^2 = 90 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-12y)^2 = (x-6)(2y-1) \\ (x-6)^2 + 9(2y-1)^2 = 90 \\ x \geq 12y \end{cases}$$

Пусть $(x-6) = a$

$(2y-1) = b$

$$\begin{cases} (a-6b)^2 = ab \\ a^2 + 9b^2 = 90 \\ x \geq 12y \end{cases}$$

$a^2 - 13ab + 36b^2 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a = 4b \\ a = 9b \end{array}\right.$

$\cancel{a^2 + 9b^2 = 90}$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = 4b \\ b = \pm\frac{3\sqrt{2}}{5} \end{cases} \\ \begin{cases} a = 9b \\ b = \pm 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = \frac{12\sqrt{2}}{5} \\ b = \frac{3\sqrt{2}}{5} \end{cases} \\ \begin{cases} a = -\frac{12\sqrt{2}}{5} \\ b = -\frac{3\sqrt{2}}{5} \end{cases} \\ \begin{cases} a = 9 \\ b = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} a = -9 \\ b = -1 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \frac{12\sqrt{2}}{5} + 6 \\ y = \frac{3\sqrt{2}}{10} + \frac{1}{2} \end{cases} \text{ не уд. ОДЗ} \\ \begin{cases} x = -\frac{12\sqrt{2}}{5} + 6 \\ y = -\frac{3\sqrt{2}}{10} + \frac{1}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x = 15 \\ y = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -3 \\ y = 0 \end{cases} \text{ не уд. ОДЗ} \end{array}\right.$$

ОДЗ: $x \geq 12y$

Ответ: $\left(-\frac{12\sqrt{2}}{5} + 6;\ -\frac{3\sqrt{2}}{10} + \frac{1}{2}\right)$; $(15;\ 1)$

№3

$10x + |x^2 - 10x|^{\log_3 4} \geq x^2 + 5^{\log_3(10x - x^2)}$

$10x - x^2 > 0$

Пусть $10x - x^2 = a > 0$

$a^{\log_3 4} \geq -a + 5^{\log_3 a}$

$4^{\log_3 a} \geq -a + 5^{\log_3 a}$

$5^{\log_3 a} - 4^{\log_3 a} \leq a \Rightarrow 0 < a \leq 9$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\cancel{10-x}$ $10x-x^2>0$ $\qquad$ $10x-x^2\le 9$

$0<x<10$ $\qquad$ $x^2-10x+9\ge 0$

$\left[\begin{array}{l} x\ge 9 \\ x\le 1 \end{array}\right.$

$x\in(0;1]\cup[9;10)$

Ответ: $x\in(0;1]\cup[9;10)$

№5

$f(x/y)=f(x)+f(\frac{1}{y})$ Рассмотрим ~~знач~~ значение f от дроби $f(\frac{1}{a})+f(a)=f(1)=0 \Rightarrow f(\frac{1}{a})=-f(a)$

$f(x/y)<0 \Rightarrow f(x)<f(y)$

Среди значений $f(a)$ при $2\le a\le 26$ есть:

10 нулей, 7 единиц, 3 двойки, 1 тройка, 2 четвёрки, 1 пятёрка

. если $f(x)=0 \Rightarrow$ 14 вариантов для y

$10\cdot 14=140$

. если $f(x)=1 \Rightarrow$ 7 вариантов для y

$7\cdot 7=49$

. если $f(x)=2 \Rightarrow$ 4 варианта для y

$3\cdot 4=12$

. если $f(x)=3 \Rightarrow$ 3 вар для y

$1\cdot 3=3$

если $f(x)=4 \Rightarrow 1$ вариант для 1

$2\cdot 1=2$

Итого: $140+49+12+3+2=216$

Ответ: 216

№6

$\frac{16x-16}{4x-5} \leq ax+b \leq -32x^2+36x-3$

$\frac{16x-16}{4x-5} = 4+\frac{4}{4x-5} = f(x)$

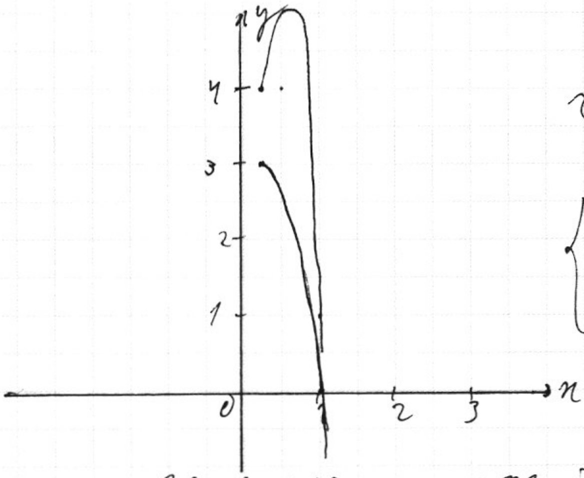
$-32x^2+36x-3 = g(x)$

$g(\frac{1}{4})=4$

$g(1)=1$

$f(\frac{1}{4})=3$

$f(1)=0$



Рассм. прямую, прох. через точки $(\frac{1}{4};4)$ и $(1;1)$

$\begin{cases} 4=\frac{1}{4}a+b \\ 1=a+b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-4 \\ b=5 \end{cases}$

Прямая $y=-4x+5$

Проверим пересечение этой прямой с ганью гиперболы:

$\frac{16x-16}{4x-5}=-4x+5 \Rightarrow 16x^2-24x+9=0$

$(4x-3)=0$

$\Downarrow$

один корень

$\Downarrow$

прямая $y=-4x+5$ является единственной подходящей $\Leftarrow$ | прямая касается гиперболы

Ответ: $a=-4$

$b=5$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\frac{16x-16}{4x-5} \le ax+b \le -32x^2+36x-3$

$4+\frac{4}{4x-5} \le ax+b$

$f(\frac{1}{4}) = 4+\frac{4}{-4} = 3$

$f(1) = 0$

$A(1;0) \in l$

$y = ax+b$

$0 = a+b$

$a = -b$

$y = ax-a$

$4 = \frac{1}{4}a - a$

$4 = -\frac{3}{4}a$

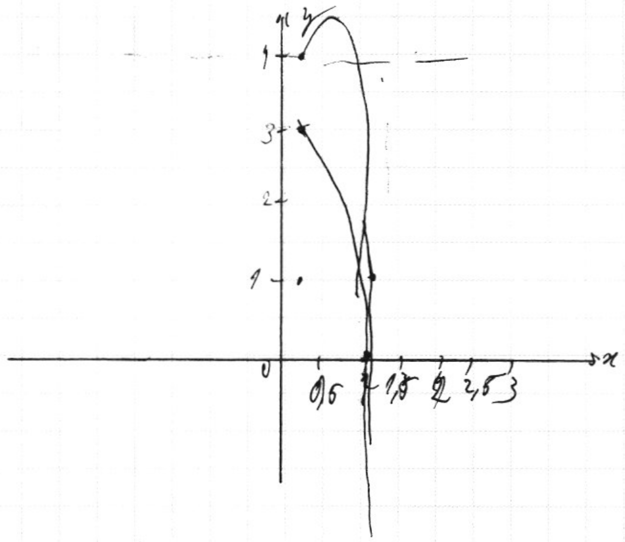
$a = -\frac{16}{3}$

$-\frac{16}{3} \le a \le -\frac{20}{9}$

$b = -a$

$f(\frac{1}{4}) = -2+9-3 = 4$

$f(1) = 1$



$4+\frac{4}{4x-5} = ax-a$

$\frac{16x-16}{4x-5} = ax-a$

$16x-16 = 4ax^2-4ax-5ax+5a$

$4ax^2 - x(9a+16)+21$

$D = 81a^2+9\cdot16a+256-16\cdot21$

$81a^2+144a-80=0$

$D = 12^4+4\cdot9^2\cdot80 = 2^8\cdot3^4+2^2\cdot3^4\cdot2^4\cdot5 =$

$= 2^6\cdot3^4(4+5) = 2^6\cdot3^6 = 6^6$

$a = \frac{-144\pm216}{2\cdot81} = -\frac{360}{2\cdot81} =$

$= -\frac{180}{81} = -\frac{20}{9}$

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$\frac{1}{4} = 4a + b$

$1 = a + b$

$\cancel{\frac{3}{4} = 3a \quad a = -\frac{1}{4}}$

$4 = \frac{1}{4}a + b$

$1 = a + b$

$3 = -\frac{3}{4}a \quad a = -4$

$b = 5$

$y = -4x + 5$

$\frac{16x - 16}{4x - 5} = -4x + 5 \Rightarrow 16x - 16 = -16x^2 + 40x - 25$

$16x^2 - 24x + 9 = 0$

$(4x - 3)^2 = 0$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$x-6=\frac{12\sqrt{2}}{5}$

$2y-1=\frac{3\sqrt{2}}{5}$

$\begin{cases} x=\frac{12\sqrt{2}}{5}+6 \\ y=\frac{3\sqrt{2}}{10}+\frac{1}{2} \end{cases}$ ×

$x-6=9$

$2y-1=1$

$\begin{cases} x=15 \\ y=1 \end{cases}$ ✓

$x-6=-\frac{12\sqrt{2}}{5}$

$2y-1=-\frac{3\sqrt{2}}{5}$

$\begin{cases} x=-\frac{12\sqrt{2}}{5}+6 \\ y=-\frac{3\sqrt{2}}{10}+\frac{1}{2} \end{cases}$ ✓

$x-6=-9$

$2y-1=-1$

$\begin{cases} x=-3 \\ y=0 \end{cases}$ ×

$x\geq 12y$

$\frac{\cancel{24\sqrt{2}+60}}{\cancel{10}}$ $\quad \frac{3\sqrt{2}+5}{10}$

$24\sqrt{2}+60 \overset{?}{\geq} 36\sqrt{2}+60$ ×

$-24\sqrt{2}+60 \geq 12(-3\sqrt{2}+5)$

$-24\sqrt{2}+60 \geq -36\sqrt{2}+60$ ✓

3) $10x+|x^2-10x|^{\log_3 4} \geq x^2+5^{\log_3(10x-x^2)}$

$10x-x^2>0$

$10x-x^2=a$

$a^{\log_3 4} \geq -a+5^{\log_3 a}$

$a^{\log_3 4} \geq -a+a^{\log_3 5}$

$a^{\log_3 5}-a^{\log_3 4} \leq a$

$a^{\log_3 4}(a^{\log_3 5-\log_3 4}-1) \leq a$

$a^{\log_3 4}(a^{\log_3\frac{5}{4}}-1) \leq a$

$\cancel{a^{\log_3 5-\log_3 4} \leq a^0}$

$5^{\log_3 a}=(3^{\log_3 5})^{\log_3 a}$

$a^{\log_3 5}$

$a(a^{\log_3 5-1}-a^{\log_3 4-1}-1) \leq 0$

$a^{\log_3\frac{5}{3}}-a^{\log_3\frac{4}{3}}-1 \leq 0$

$\cancel{a^{\log_3\frac{4}{3}}(a^{\log_3\frac{5}{3}-\log_3\frac{4}{3}}-1) \leq 1}$

$\cancel{a^{\log_3\frac{5}{3}-\log_3\frac{4}{3}} \leq a^0}$

$0<a\leq 1$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$4^{\log_3 a} \geq -a + 5^{\log_3 a}$

$5^{\log_3 a} - 4^{\log_3 a} \leq a$

$a = 9$ $\quad 0 < a \leq 9$

$5^2 - 4^2 = 9$

$5^3 - 4^3 = 27$

$125 - 16 \leq 27$

$110 + 49 + 12 13 + 2 = 189 + 27 =$

$= 216$

$\cancel{10 - x^2 \geq 0}$ $\quad 10 - x^2 > 0$

$\cancel{x <}$ $\quad -\sqrt{10} < x < \sqrt{10}$

$10 - x^4 \leq 9$

$x^4 \geq 1$

$x \geq 1$

$x \leq 1$

$x \in (-\sqrt{10}; -1] \cup [1; +\sqrt{10})$

$x^2 < 10x$

$x \in (0; 10)$

б) $f(x/y) = f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) < 0$

$2 \leq x \leq 25$

$2 \leq y \leq 25$

$f(1) = 0$

$f(2) = 0$

$f(3) = 0$

$f(4) = f(2) + f(2) = 0$

$f(5) = 1$

$f(6) = f(2 \cdot 3) = 0$

$f(7) = 1$

$f(8) = f(4 \cdot 2) = 0$

$f(9) = 0$

$f(10) = 1$

$f(11) = 2$

$f(12) = 0$

$f(13) = 3$

$f(14) = 1$

$f(15) = 1$

$f(16) = 0$

$f(17) = 4$

$f(18) = 0$

$f(19) = 4$

$f(20) = 1$

$f(21) = 1$

$f(22) = 2$

$f(23) = 5$

$f(24) = 0$

$f(25) = 2$

$f\left(\frac{1}{a}\right) = -f(a)$

$f(2) = f\left(\frac{4}{2}\right) = f(4) + f\left(\frac{2}{2}\right) =$

$= 0 + 0 = 0$

$f\left(\frac{1}{3}\right) + f(3) = 1$

$f\left(\frac{1}{5}\right) + f(5) = f(1)$

-1

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$ $\quad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$2\alpha+2\beta = c \quad \sin c = -\frac{1}{\sqrt5}$ $\quad ; \sin(c+2\beta)+\sin(c-2\beta) = -\frac{2}{5}$

$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2}$

$\sin(c+2\beta)+\sin(c-2\beta) = 2\sin c\cdot\cos 2\beta = -\frac{2}{5}$

$-\frac{1}{\sqrt5}\cos 2\beta = -\frac{1}{5}$ $\quad \cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt5}$

$\sin 2\beta = \pm\frac{2}{\sqrt5}$

$\sin 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5}$ $\quad \cos^2\alpha+\sin^2\alpha = 1 \,|:\cos^2$

$\sin 2\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt5} \pm \frac{2}{\sqrt5}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5}$ $\quad \frac{1}{\cos^2\alpha} = tg^2\alpha+1$ (ОТТ)

$:\cos 2\alpha$

$\sin 2\alpha \pm 2\cos 2\alpha = -1$ $\quad tg 2\alpha \pm 2 = -\frac{1}{\cos 2\alpha} \;|\uparrow^2$

$2\sin\alpha\cos\alpha \pm 2(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha) = -1$

$\left[\begin{array}{l} 2\cos^2\alpha - 2\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha + 1 = 0 \\ 2\sin^2\alpha - 2\cos^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha + 1 = 0 \end{array}\right.$

$2a^2 - 2b^2 + 2ab + 1 = 0$

$tg^2 2\alpha \pm 4 tg 2\alpha + 4 = tg^2 2\alpha + 1$

$\pm 4 tg 2\alpha = -3$

$tg 2\alpha = \pm\frac{3}{4}$

$tg 2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$ $\quad \pm\frac{3}{4} \mp \frac{3}{4}tg^2\alpha = 2tg\alpha$

$3tg^2\alpha + 8tg\alpha - 3 = 0$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} 3tg^2\alpha + 8tg\alpha - 3 = 0 \\ 3tg^2\alpha - 8tg\alpha - 3 = 0 \end{cases}$$

$D = 64 + 36 = 100$

$tg\alpha = \frac{-8 \pm 10}{6} = \begin{matrix} -3 \\ \frac{1}{3} \end{matrix}$

$tg\alpha = \frac{8 \pm 10}{6} \quad -\frac{1}{3} \quad 3$

№2

$$\begin{cases} x - 12y = \sqrt{2xy - 12y - x + 6} \\ x^2 + 36y^2 - 12x - 36y = 45 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-12y)^2 = 2xy - 12y - x + 6 \\ x^2 - 12x + 36 + 36y^2 - 36y + 9 = 90 \\ x \geq 12y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 24xy + 144y^2 - 2xy + 12y + x - 6 = 0 \\ (x-6)^2 + (6y-3)^2 = 90 \end{cases}$$

$81b^2 + 9b^2 = 90$

$b = \pm 1 \quad a = \pm 9$

$16b^2 + 9b^2 = 90$

$25b^2 = 90$

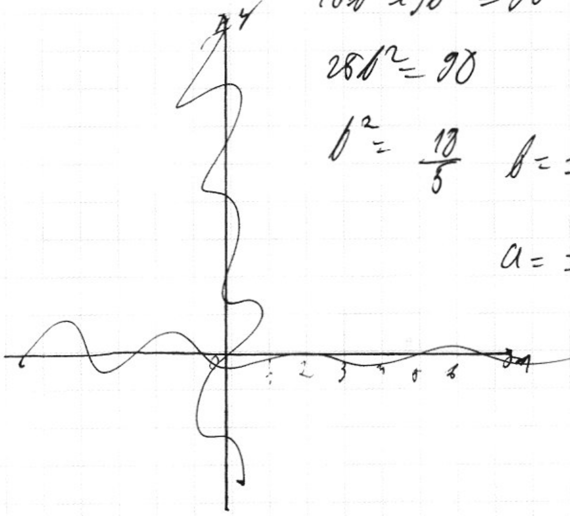
$b^2 = \frac{18}{5} \quad b = \pm\frac{3\sqrt{2}}{5}$

$a = \pm\frac{12\sqrt{2}}{5}$

$$\cancel{\begin{cases} x^2 - 26xy + 144y^2 + 12y + x - 6 = 0 \\ x^2 + 36y^2 - 12x - 36y - 45 = 0 \end{cases}}$$

$\cancel{108y^2 - 26xy + 48y + 13x + 39 = 0}$

$\cancel{3x^2 + 26xy - 49x - 156y - 174 = 0}$



$2xy - 12y - x + 6 = (x-6)(2y-1)$

$(x-12y)^2 = (x-6)(2y-1)$

$x - 12y = a - 6b$

$(x-6)^2 + 9(2y-1)^2 = 90$

$$\begin{cases} x - 6 = a \\ 2y - 1 = b \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a-6b)^2 = ab \\ a^2 + 9b^2 = 90 \end{cases}$$

~~$a^2 - 13ab + b^2 = 0$~~

$a^2 + 9b^2 = 90$

$$\begin{cases} a^2 - 12ab + 36b^2 = ab \\ a^2 + 9b^2 = 90 \end{cases}$$

$8b^2 + 13ab = 0$

$b(8b + 13a) = 0$

$$\begin{cases} a^2 - 13ab + 36b^2 = 0 \\ a^2 + 9b^2 = 90 \end{cases}$$

$a = 9b$

$a = 4b$

$b = 0$

$b = -\frac{13a}{8}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)