МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФР ______________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}; \qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{8}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3y-2x = \sqrt{3xy-2x-3y+2}, \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geqslant |x^2+6x|^{\log_4 5} - x^2.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = \frac{5}{2}$, $BD = \frac{13}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a)+f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $3 \leqslant x \leqslant 27$, $3 \leqslant y \leqslant 27$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{4x-3}{2x-2} \geqslant ax+b \geqslant 8x^2-34x+30$$

выполнено для всех x на промежутке $(1;3]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $PQRS$, вершина P которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра PQ. Известно, что $QR = 2$, $QS = 1$, $PS = \sqrt{2}$. Найдите длину ребра RS. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1). $\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}}$; $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{8}{17}$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin(2\alpha)=2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos(2\beta)=-\frac{8}{17}$ $/:2$

$\left.\begin{array}{l}\sin(2\alpha+2\beta)\cos(2\beta)=-\frac{4}{17}\\ \sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}}\end{array}\right\}\Rightarrow$

$\Rightarrow -\frac{1}{\sqrt{17}}\cos(2\beta)=-\frac{4}{17}\Rightarrow \cos(2\beta)=\frac{4}{\sqrt{17}}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow 2\beta=\pm\arccos\frac{4}{\sqrt{17}}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$

$\Rightarrow \sin(2\beta)=\pm\sqrt{1-\frac{16}{17}}=\pm\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\Rightarrow$

I) $\sin(2\alpha+2\beta)=\sin(2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}}\Rightarrow$

$\Rightarrow$ 1) $2\alpha+2\beta=2\beta+2\pi k$ $k\in\mathbb{Z}$

$\Rightarrow 2\alpha=2\pi k$ подходит. $\sin(\overset{2\pi k}{2\alpha}+2\beta)=\sin(2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\alpha=\pi k\Rightarrow \operatorname{tg}\alpha=0.$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\underset{0}{\sin(2\alpha)}=\sin(4\beta)=$

$=2\sin(2\beta)\cdot\cos\beta=\ldots=-\frac{8}{17}$ +

2). $2\alpha+2\beta=\pi-2\beta+2\pi k$

$\left.\begin{array}{l}\sin(2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}}<0\\ \cos(2\beta)=\frac{4}{\sqrt{17}}>0\end{array}\right\}\Rightarrow 2\beta=-\arccos\frac{4}{\sqrt{17}}+2\pi n.$

$2\alpha=\pi-4\beta+2\pi k$ подходит.

$\sin(2\alpha+2\beta)=\sin(\pi-2\beta)=\sin(2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}}$ +

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin(2\alpha)=\sin(\pi)+\sin(\pi-4\beta)=\sin(4\beta)=$

$=2\sin(2\beta)\cdot\cos(2\beta)=-\frac{8}{17}$ +

$\alpha=\frac{\pi}{2}-2\beta+\pi k.=\frac{\pi}{2}+\arccos\frac{4}{\sqrt{17}}.$

$\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\arccos\frac{4}{\sqrt{17}}\right)=-\operatorname{ctg}\left(\arccos\frac{4}{\sqrt{17}}\right)=-\frac{\cos(\arccos\frac{4}{\sqrt{17}})}{\sin(\arccos\frac{4}{\sqrt{17}})}=$

$=-\frac{\frac{4}{\sqrt{17}}}{\frac{1}{\sqrt{17}}}=-4.$

II) $\sin(2\alpha+2\beta) = -\sin(2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \Rightarrow \sin(2\beta) = \frac{1}{\sqrt{17}} > 0 \Big\} \Rightarrow$

1) $2\alpha + 2\beta = -2\beta + 2\pi l$ $\underline{\sin(-2\beta)}$, $l \in \mathbb{Z}$ $\qquad \cos(2\beta) > 0$

$2\beta = \arccos\frac{4}{\sqrt{17}} + 2\pi n$

$2\alpha = -4\beta + 2\pi l$ подходит.

$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin(-2\beta) = -\sin(2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ +.

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin(2\alpha) = \sin(0) + \sin(-4\beta) = -\sin(4\beta) =$

$= -2\cdot\sin 2\beta \cdot \cos 2\beta = -\frac{8}{17}$ +.

$\alpha = -2\beta + \pi l = -\arccos\frac{4}{\sqrt{17}}$

$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(-\arccos\frac{4}{17}) = -\frac{\sin(\arccos\frac{4}{\sqrt{17}})}{\cos(\arccos\frac{4}{\sqrt{17}})} = -\frac{1}{4}$

2) $2\alpha + 2\beta = \pi + 2\beta + 2\pi t$, $t \in \mathbb{Z}$

$2\alpha = \pi + 2\pi t$ – подходит.

$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin(\pi+2\beta) = -\sin(2\beta) = \sin(-2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ +

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin(2\alpha) = \underset{-\sin(4\beta)}{\sin(\pi+4\beta)} + \underset{0}{\sin(\pi)} =$

$= -2\sin 2\beta\cdot\cos 2\beta = -\frac{8}{17}$ +.

$\alpha = \frac{\pi}{2} + 2\pi t \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha\ \varnothing$ $\quad \cos\alpha = 0,\ \sin\alpha = 1$

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1}{0}\ \varnothing$

Ответ: $\operatorname{tg}\alpha = 0$; $\operatorname{tg}\alpha = -4$; $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{4}$.

2). $\begin{cases} 3y - 2x = \sqrt{3xy - 2x - 3y + 2} \\ 3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 4 \end{cases} \Rightarrow 3y - 2x \geq 0 \Rightarrow y \geq \frac{2x}{3}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 2x = \sqrt{(3y-2)(x-1)} \\ 3(x-1)^2 + (3y-1)(y-1) = 8 \end{cases}$ $\qquad \exists\ B = (3y-2);\ A = (x-1) \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} B - 2A = \sqrt{AB} \\ 3A^2 + \frac{(B+1)(B-1)}{3} = 8 \ |\cdot 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B^2 - 4AB + 4A^2 = AB \Rightarrow \\ 9A^2 + B^2 = 25 \end{cases}$

$\Rightarrow B^2 - 5AB + 4A^2 = 0$ по Th Виета $B = A$; $B = 4A$ – корни.

$B = A \Rightarrow B - 2A = -A \geq 0 \Rightarrow A \leq 0$

$B = 4A \Rightarrow B - 2A = 2A \geq 0 \Rightarrow A \geq 0$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) $A = B$

$$\begin{cases} A = B \\ 9A^2 + B = 25 \\ A \le 0 \end{cases} \Rightarrow 10A^2 = 25 \Rightarrow \begin{cases} A^2 = \frac{5}{2} \\ A \le 0 \end{cases} \Rightarrow A = -\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$$

$x - 1 = -\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \Rightarrow x = 1 - \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$

$3y - 2 = -\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \Rightarrow y = \frac{2 - \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}}{3} = \frac{2}{3} - \frac{\sqrt{5}}{3\cdot\sqrt{2}} \ge \frac{2}{3}x = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$

при данных x, y $\sqrt{(x-1)(3y-2)}$ существует т.к

$x - 1 < 0$; $3y - 2 < 0 \Rightarrow (x-1)(3y-2) > 0$, данные x и y подходят.

2) $4A = B \Rightarrow$

$\Rightarrow \left.\begin{matrix} 9A^2 + 16B^2 = 25A^2 = 25 \\ B, A > 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow A^2 = 1 \Rightarrow B = 4$

$A = x - 1 = 1 \Rightarrow x = 2$

$B = 3y - 2 = 4 \Rightarrow 3y = 6$

$y = 2$

$2 = y > \frac{2}{3}x = \frac{4}{3}$

$(x-1)(3y-2) > 0 \Rightarrow x, y$ подходят.

Ответ: $(2; 2)$; $\left(1 - \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}; \frac{2 - \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}}{3}\right)$

3) $3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \ge |x^2 + 6x|^{\log_4 5} - x^2$.

$\log_4(x^2+6x) \Rightarrow x^2 + 6x > 0 \Rightarrow |x^2+6x| = x^2 + 6x$

$\Downarrow$

$x \in (-\infty; -6) \cup (0; +\infty)$

$(x^2+6x)^{\log_4 5} = 5^{\log_4(x^2+6x)}$

пусть $t = \log_4(x^2+6x) \Rightarrow x^2 + 6x = 4^t$.

черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

$$\begin{cases} 3^{\log_4(x^2+6x)}+6x \geq 5^{\log_4(x^2+6x)}-x^2 \\ t=\log_4(x^2+6x) \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow 3^t+6x \geq 5^t-x^2 \Rightarrow 3^t+6x+x^2=3^t+4^t \geq 5^t.$

$5^t>0 \Rightarrow$ можно делить

$3^t+4^t \geq 5^t \,/ : 5^t \Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^t+\left(\frac{4}{5}\right)^t \geq 1.$

a^x, $a\in(0;1)$ убывает $\Rightarrow$

$\Rightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^t, \left(\frac{4}{5}\right)^t$ убывают, сумма 2^x убывающих,

тоже убывает $\Rightarrow f(t)=\left(\frac{3}{5}\right)^t+\left(\frac{4}{5}\right)^t \searrow \Rightarrow$

$\Rightarrow f(t)=1$ - имеет не более одного решения.

заметим, что $t=2$ - корень $\Rightarrow$.

$f(t)\geq 1 \Leftrightarrow t\in(-\infty;2] \Rightarrow \log_4(x^2+6x)\leq 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2+6x\leq 16. \Rightarrow x^2+6x-16\leq 0 \Rightarrow x\in[-8;2]$

$-8 \quad 2$

$$\begin{cases} x\in[-8;2] \\ x\in(-\infty;-6)\cup(0;+\infty) \text{ из ОДЗ} \end{cases} \Rightarrow x\in[-8;-6)\cup(0;2]$$

Ответ: $x\in[-8;-6)\cup(0;2]$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

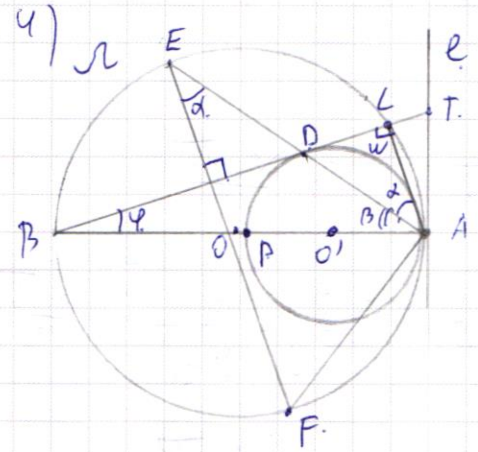
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4)



1) Заметим, что AD - бис-са $\angle BAC$.

$\exists \angle DAC = \alpha$; $\angle BAD = \beta$; $\angle CBA = \varphi$

ℓ - перпен. касающаяся Ω в $(\cdot)A$

$\angle CAT$ - $\angle$ между касательной и хордой

$\angle CAT = \frac{1}{2} \cup AC = \angle CBA = \varphi$

$BC \cap \ell = T \Rightarrow TD = TA$ как отрезки касат. из одной точки $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle TDA = \angle TAD = \alpha + \varphi \Rightarrow \angle BDA = 180 - \angle TDA =$

$= 180 - \varphi - \alpha$, из $\Delta BDA \Rightarrow 180 = \angle DBA + \angle DAB + \angle BDA =$

$\varphi + \beta + 180 - \varphi - \alpha = 180 - \alpha + \beta = 180 \Rightarrow \beta - \alpha = 0 \Rightarrow \beta = \alpha$.

2) AB - диаметр $\Rightarrow \angle BCA = 90^\circ \Rightarrow \angle BCA$ - прям.

AD - бис-са $\Rightarrow \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{13}{5} \Rightarrow \exists AB = 13x, AC = 5x$

$BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = 12x = \frac{13}{2} + \frac{5}{2} = BD + DC = 9 \Rightarrow x = \frac{9}{12} = \frac{3}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow AB = \frac{39}{4}$; $AC = \frac{15}{4} \Rightarrow AB$ - диаметр $\Rightarrow 2R_\Omega = AB \Rightarrow$

$\Rightarrow R_\Omega = \frac{AB}{2} = \frac{39}{8}$

$\exists AB \cap$ окр ω в $(\cdot)$ A и $P \Rightarrow BD^2 = BP \cdot AB \Rightarrow$

$\Rightarrow BP = \frac{BD^2}{AB} = \frac{\frac{13^2}{4}}{\frac{13 \cdot 3}{4}} = \frac{13}{3} \Rightarrow PA = \frac{39}{4} - \frac{13}{3} = 13\left(\frac{9-4}{12}\right) = \frac{65}{12}$

AP - диаметр окр ω т.к ℓ общ. касательная Ω и ω,

$\ell \perp AB$, т.к AB диаметр и содержит центр Ω - O,

и $OA \perp \ell$, $OA \subset AB$

$\left.\begin{matrix} AB \perp \ell \\ O'A \perp \ell \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} O'A \subset AB \\ AP \subset AB \end{matrix}\right\} \Rightarrow O'A \subset AP,\ O' \subset AP$

$r_{окр.\,\omega} = \frac{AP}{2} = \frac{65}{24}$.

3) хорды EA и BC пересекаются в (·) D $\Rightarrow$

$\Rightarrow BD \cdot DC = ED \cdot AD \Rightarrow ED = \frac{BD \cdot DC}{AD}$

ΔDAC = прям, т.к $\angle DCA = 90^\circ \Rightarrow AD = \sqrt{DC^2 + CA^2} =$

$= \sqrt{\frac{25}{4} + \frac{225}{16}} = \sqrt{\frac{325}{4}} = \frac{5\sqrt{13}}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow ED = \frac{\frac{13 \cdot 5}{4}}{\frac{5}{4}\sqrt{13}} = \sqrt{13} \Rightarrow AE = \frac{5}{4}\sqrt{13} + \sqrt{13} = \frac{9\sqrt{13}}{4}$.

ΔEFA впис в $\Omega \Rightarrow$ ~~Th sin~~ $\sin \angle EFA = \frac{EA}{2R_\Omega} = \frac{\frac{9}{4}\sqrt{13}}{2 \cdot \frac{39}{8}} = \frac{3\sqrt{13}}{13}$

$\angle AFE$ острый, т.к опирается на

дугу AE, $\cup AE < \cup AB \Rightarrow \angle EFA = \arcsin \frac{3\sqrt{13}}{13}$

$\cos \angle EAF = \sqrt{1 - \frac{9}{13}} = \frac{2}{\sqrt{13}}$.

4). $\left.\begin{array}{l}\angle BCA = 90^\circ \Rightarrow BC \perp AC \\ EF \perp BC \text{ по усл}\end{array}\right\} \Rightarrow AC \parallel EF \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle CAD = \angle AEF$ + $\sin \angle CAD = \frac{CD}{AD} = \frac{\frac{5}{2}}{\frac{5}{4}\sqrt{13}} = \frac{2}{\sqrt{13}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sin \angle AEF = \cos \angle EFA = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \angle EFA\right)$

т.к $\angle EFA, \angle AEF$ острые $\Rightarrow \angle AEF = \frac{\pi}{2} - \angle EFA \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle AEF + \angle EFA = 90^\circ \Rightarrow \angle EAF = 90^\circ \Rightarrow \Delta EAF$ - прям $\Rightarrow$

$\Rightarrow S_{EAF} = \frac{EA \cdot AF}{2}$.

$AF = EA \cdot tg \angle AEF = \frac{EA \cdot \sin \angle AEF}{\cos \angle AEF} = \frac{EA \cdot \frac{2}{\sqrt{13}}}{\frac{3}{\sqrt{13}}} = \frac{2}{3} EA \Rightarrow$

$\Rightarrow S_{EAF} = \frac{EA^2}{3} = \frac{\cancel{81}^{27} \cdot 13}{16 \cdot \cancel{3}} = \frac{351}{16}$.

Ответ: $R_\Omega = \frac{39}{8}$; $r_\omega = \frac{65}{24}$; $\angle EFA = \arcsin \frac{3\sqrt{13}}{13}$;

$S_{\Delta EFA} = \frac{351}{16}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5) заметим, что $f(\frac{x}{y}) = f(x) + f(\frac{1}{y})$ т.к $f(ab)=f(a)+f(b)$

$f(x) \geq 0$, т.к если x - простое, то $f(x) = [\frac{x}{4}] \geq 0$

либо $f(x)$ раскладывается на простые множители

которые будут ≥ 0 $\Rightarrow f(\frac{x}{y}) < 0$ при $f(\frac{1}{y}) < 0$,

$f(\frac{1}{y}) < -f(x)$

заметим, что $f(\overset{1\cdot 1}{1}) = f(1) + f(1) \Rightarrow -f(1) = 0 \Rightarrow f(1) = 0$

посмотрим, какие значения может принимать

$f(x)$: если x - это 2, 3 или число вида $2^{\alpha_1} \cdot 3^{\alpha_1}$,

то $f(x) = 0$ т.к $f(2) = [\frac{2}{4}] = 0$ $f(3) = [\frac{3}{4}] = 0$

$f(2^{\alpha_1}) = 0$, т.к $f(4) = f(2) + f(2) = 0$, $f(8) = f(4) + f(2) = 0$ и
$f(16) = f(4) + f(4) = 0$

$f(3^{\alpha_1}) = 0$, аналогично

$f(x)$ не равно 0 в след. случ.

$f(5) = 1$; $f(7) = 1 = [\frac{7}{4}]$, $f(10) = f(2) + f(5) = 1$, $f(11) = 2$,
$[\frac{5}{4}] = 1$ $f(13) = 3$, $f(14) = 1$, $f(15) = 1$; $f(17) = 4$;

$f(19) = 4$, $f(20) = 1$; $f(21) = 1$; $f(22) = 2$; $f(23) = 5$

$f(25) = 2$; $f(26) = 3 \Rightarrow f(x) \neq 0$ при 15-ти значениях x

значение $f(\frac{1}{y})$ можно найти при $x = y$

$f(\frac{x}{y}) = f(1) = 0 = f(x) + f(\frac{1}{y}) \Rightarrow f(\frac{1}{y}) = -f(x) \Rightarrow$

$\Rightarrow f(\frac{1}{y}) = 0; -1; -2; -3; -4; -5.$

если $f(x) = 0 \Rightarrow f(\frac{1}{y}) < 0$. - в 15 случаях

если $f(x) = 1 \Rightarrow f(\frac{1}{y}) < -1$ - в 8 случаях.

если $f(x) = 2 \Rightarrow f(\frac{1}{y}) < -2$ - в 5 случаях

если $f(x) = 3 \Rightarrow f(\frac{1}{y}) < -3$ - в 3 случае

если $f(x) = 4 \Rightarrow f(\frac{1}{y}) < -4$, - в одном случае

если $f(x) = 5 \Rightarrow \varnothing$ т.к. $f(\frac{1}{y}) \geq -5 \Rightarrow f(\frac{x}{y}) \geq 0$

получаем, что пар будет $15+8+5+3+1 = 32$

Ответ: 32 пары.

8). $\frac{4x-3}{2x-2} \geq ax+b \geq 8x^2 - 34x + 30$ $\quad h(x) = ax+b$

$f(x) = 8x^2 - 34x + 30.$ $\quad x_в = \frac{34}{16} = \frac{17}{8} < 3 \Rightarrow$

$\cancel{f\left(\frac{34}{8}\right) = \frac{8 \cdot 34^2}{16 \cdot 16} - \frac{34^2}{16} + 30}$ $\quad \Rightarrow h(3) \leq f(3)$ ~~neб1~~

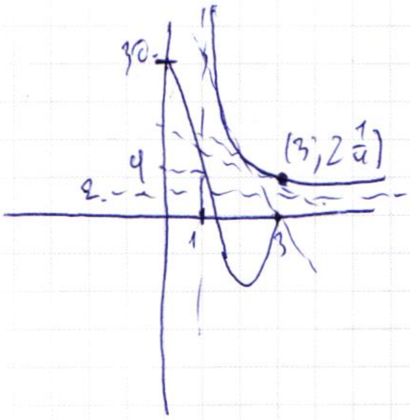
$f(1) = 8 - 34 + 30 = 4$

$g(x) = \frac{4x-3}{2x-2} = 2 + \frac{1}{2x-2}$

$g(3) = 2 + \frac{1}{4}$

$\Rightarrow \begin{cases} h(1) \geq f(1) = 4 \\ h(3) \leq g(3) = 2\frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow h(x)$ — убывает $\Rightarrow a < 0$



$f(3) = 8 \cdot 9 - 34 \cdot 3 + 30 = 102 - 102 = 0 \Rightarrow$ ($8 \cdot 9 = 72$)

$\Rightarrow f(x) = (x-3)(8x-10)$

$x_2 = \frac{5}{4}$

$h(1) \geq f(1) = 4 \Rightarrow a + b \geq 4$

$h(3) \geq f(3) = 0 \Rightarrow 3a + b \geq 0$

$\Rightarrow -2a \geq -4$

$a \geq -2$

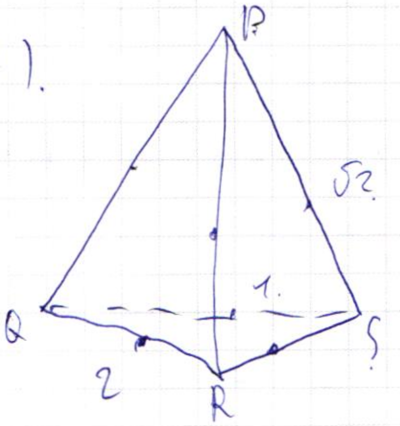
$h(3) \leq g(3) = 2\frac{1}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow 3a + b \leq \frac{9}{4}$

$b \leq \frac{9}{4} - 3a$

$-3a \leq b$

7).



☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\angle ACB = 90^\circ \Rightarrow BC \perp AC$

$EF \perp BC \Rightarrow AC \parallel EF \Rightarrow \cup EC = \cup AF \Rightarrow$

$\Rightarrow CEFA$ – р/б трапец $\Rightarrow EC = AF$

$\sin\angle EAC = \frac{DC}{AD} = \frac{\frac{5}{2}}{\frac{5\sqrt{13}}{4}} = \frac{2}{\sqrt{13}}$ $\quad \cos\angle EAC = \sqrt{1-\frac{4}{13}} = \frac{3}{\sqrt{13}}$

$\angle EAC < 90^\circ$ т.к $\triangle EAC$ – ироч

$\angle CAD = \angle AEF$

$EC = \sqrt{AC^2 + AE^2 - 2\cos\angle EAC \cdot AE \cdot AC} = \sqrt{\frac{25}{4} + \frac{25\cdot 13}{16} -}$

$\overline{- \frac{3}{\sqrt{13}} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdot \sqrt{13}} = \sqrt{\frac{25}{4} + \frac{25\cdot 13}{16} - \frac{3\cdot 25}{8}} = 5\sqrt{\frac{4}{16} + \frac{13}{16} - \frac{6}{16}} =$

$= \frac{5\sqrt{11}}{4}$

$\sin\angle EAF = \sin(180 - \angle AEF - \angle AFE) = \sin(AEF + \angle AFE) =$

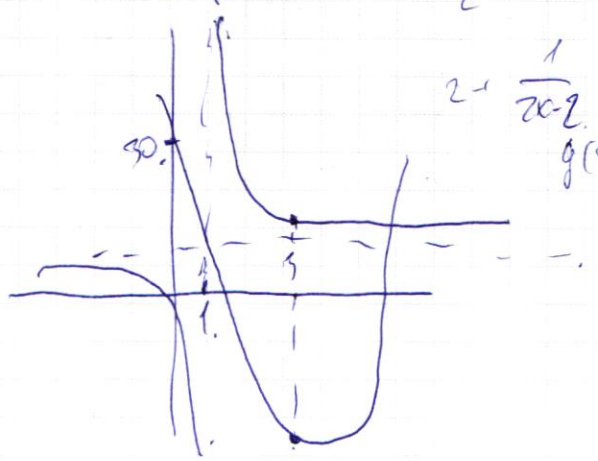
$= \sin\angle AEF \cdot \cos\angle AFE + \sin\angle AFE \cdot \cos\angle AEF = \frac{4}{13} + \frac{9}{13} = 9 \Rightarrow$

$\frac{2}{\sqrt{13}}$ '' $\quad \frac{2}{\sqrt{13}}$ '' $\quad \frac{3}{\sqrt{13}}$ '' $\quad \frac{3}{\sqrt{13}}$ ''

$\Rightarrow \angle EAF = 90^\circ \Rightarrow S_{AEF} = \frac{EA \cdot AF}{2} = \frac{\frac{5}{4}\sqrt{13} \cdot \frac{5}{4}\sqrt{11}}{2} =$

$= \frac{25\sqrt{143}}{32}$

27
×13
81
27
351



$2 + \frac{1}{2x-2}$

$g(3) = 2 + \frac{1}{4} =$

$2\frac{1}{4}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

5) $f(2^6 \cdot 3) = f(2)+f(3) = [\frac{1}{2}] + [\frac{3}{4}] = 0$.

$f(\frac{x}{y}) = f(x) + f(\frac{1}{y})$

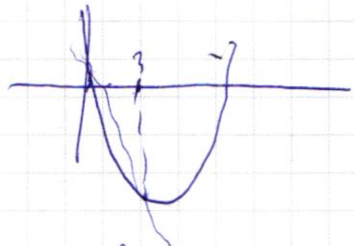
$\frac{1}{y} \in [\frac{1}{27}; \frac{1}{3}]$

$f(1) = f(1) + f(1) \Rightarrow -f(1) = 0 \Rightarrow f(1) = 0$

$f(2) = [\frac{1}{2}] = 0$

$\frac{4x-3}{2x-2} = \frac{4x-4}{2x-2} + \frac{1}{2x-2}$

$2 + \frac{1}{2x-2}$



$f(3) = 0$.

$f(4) = f(2) + f(2) = 0$

$f(5) = 1$.

$f(7) = 1$, $f(10) = 1$.

$f(11) = 2$ $f(13) = 3$

$f(14) = 1$.

$f(15) = 1$.

$f(17) = 4$

$f(19) = 4$.

$f(20) = 1$.

$f(21) = 1$.

$f(22) = 2$.

$f(23) = 5$

$f(25) = 2$

$f(26) = 3$

$f(\frac{x}{y}) = f(x) + f(\frac{1}{y})$

$f(x) \geq 0$.

$\frac{1}{y}$

$x = y \Rightarrow f(\frac{1}{y}) = -f(x)$

$f(x) + f(\frac{1}{y}) < 0 \Rightarrow$

$f(\frac{1}{y}) < -f(x)$

$f(x) = 0$ $f(\frac{1}{y}) < 0$ в 15 ш.

$f(x) = 1 \Rightarrow f(\frac{1}{y}) < -1$. в 8 ш.

$f(x) = 2 \Rightarrow f(\frac{1}{y}) < -2$ в 5 ш.

$f(x) = 3 \Rightarrow f(\frac{1}{y}) < -3$ в 3 ш.

$f(x) = 4 \Rightarrow f(\frac{1}{y}) = -5$ в 1 ш.

23

20.

32.

☐ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3)

$\cancel{5^{\log}}$ $\Rightarrow x^2+6x>0$

$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2$

$x^2+6x>0 \Rightarrow x\in(-\infty;-6)\cup(0;+\infty)$

$3^{\log_4 x^2+6x}+6x \geq 5^{\log_4(x^2+6x)}-x^2$

$x^2+6x \geq 5^{\log_4(x^2+6x)}-3^{\log_4(x^2+6x)}$ $=\cancel{(x^2+6x)^{\log_4 5}-(x^2+6x)^{\log_4 3}}$

$\cancel{x^2+6x \geq x^2+6x(x^2+6x}$

$\log_4(x^2+6x)=t$

$x^2+6x=t \quad t>0$

$a^b=c$

$b=\log_a c$

$a=4$

$c=x^2+6x$

$\cancel{t\geq t(t^{\log_4 5-1}-t^{\log_4 3-1})} \quad \cancel{|:t}$

$\cancel{1\geq (t^{\log_4 \frac{5}{4}}-t^{\log_4 \frac{3}{4}})}$

$t=\log_4(x^2+6x) \Rightarrow x^2+6x=4^t$

$4^t \geq 5^t-3^t$

$3^t+4^t\geq 5^t \quad |:5^t$

$\left(\frac{3}{5}\right)^t+\left(\frac{4}{5}\right)^t\geq 1$

2

1 реш.

$t=2$ реш.

$t\leq 2$ реш.

$\log_4(x^2+6x)\leq 2$

$x^2+6x\leq 16$

$x^2+6x-16\leq 0$

$-8 \quad 2$

$x^2+6x-16\leq 0$

$-8 \quad 2$

$\cancel{x^2+6x+9\leq 17}$

$\cancel{(x+3)^2\leq 17}$

$\cancel{-\sqrt{17}\leq x+3\leq\sqrt{17}}$

$\Rightarrow x\in[-8;-6)\cup(0;2]$

$x\in[-8;2]$

$x\in(-\infty;6)\cup(0;+\infty)$ $\Rightarrow$

$(x+8)(x-2)\leq 0 \Rightarrow$

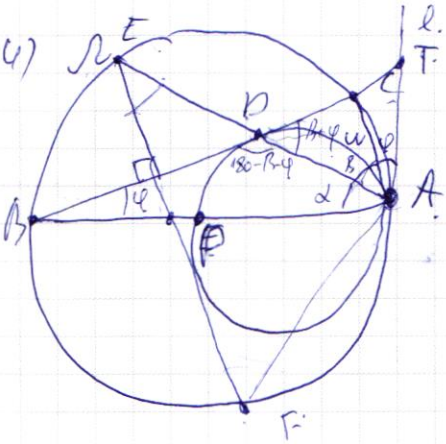
$\Rightarrow \cancel{x\in[-8;2]} \Rightarrow$

$\cancel{x\in[-8;0]}$

$\cancel{x\in(3-\sqrt{17};3+\sqrt{17})}$

$\cancel{x\in(3-\sqrt{17};0)\cup(6+\sqrt{17};3+\sqrt{17})}$

4)



AD - бис-са $\Rightarrow \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{13}{5} \Rightarrow$

для Ω:

$\Rightarrow AB = 13x,\ AC = 5x \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle ABC$ - прям, $\angle ACB = 90$;

$BC = 12x = \frac{5}{2} + \frac{13}{2} = \frac{18}{2} = 9$

$12x = 9 \Rightarrow x = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$

$AB = 13x = \frac{13 \cdot 3}{4} = \frac{39}{4}$

$R = \frac{AB}{2} = \frac{39}{8}$

$3x^2 - 34x + 30 \,|\, x-3$
$3x^2 - 24x \quad | \,3x - 10$
$-10x + 10$

$12 = 18y$
$y = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$

для ω:

AD - кас.

$AB \cap \omega = P$ (повторно)

$AD^2 = AB \cdot AP \Rightarrow AP = \frac{AD^2}{AB} = \cancel{\frac{5^2}{4 \cdot \frac{39}{8}}} = \cancel{\frac{50}{39}}$

$AP = \frac{AD^2}{AB} = \frac{\frac{13^2}{4}}{\frac{39}{4}} = \frac{13}{3}$

$AD \neq 2r \Rightarrow r = \frac{13}{6}$

$AD \cdot DE = BD \cdot DC \Rightarrow$

~~$AD = \sin\angle\frac{BAC}{2}$~~

$\triangle ADC$ - прям. ~~$AC = AD \cdot \sin\angle DAC \Rightarrow AD = \frac{AC}{\sin}$~~

$5x = \frac{5 \cdot 3}{4} = \frac{15}{4}$

~~$\sin\angle BAC = \frac{AC}{AB} = \frac{12}{13}$~~

$AD = \sqrt{DC^2 + AC^2} =$

$AC = \frac{15}{4}$

$= \frac{\sqrt{225+100}}{4} = \frac{\sqrt{325}}{4} = \frac{5\sqrt{13}}{4}$

$DC = \frac{5}{2} = \frac{10}{4}$

$\frac{\frac{5}{2}}{\frac{5\sqrt{13}}{4}} = \frac{2}{\sqrt{13}} = \frac{2\sqrt{13}}{13}$

$DE = \frac{BD \cdot DC}{AD} = \frac{\frac{13}{2} \cdot \frac{5}{2}}{\frac{5\sqrt{13}}{4}} = \sqrt{13}$,

$AE = \sqrt{13} + \frac{5}{4}\sqrt{13} = \frac{9}{4}\sqrt{13}$

$\triangle AFE$ впис в $\Omega \Rightarrow$ т. sin: $2R = \frac{AE}{\sin\angle AFE} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sin\angle AFE = \frac{AE}{2R} = \frac{AE}{AB} = \frac{\frac{9}{4}\sqrt{13}}{\frac{39}{4}} = \frac{9\sqrt{13}}{39} = \frac{3\sqrt{13}}{13} = \frac{3}{\sqrt{13}}$

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$; $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

~~$\sin 2\alpha \cos 2\beta$~~

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha =$

$\varphi = 2\alpha+2\beta$

$\gamma = 2\beta$

$\sin(\varphi+\gamma) =$

$2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos(2\beta)$

$\sin(2\alpha+2\beta+2\beta)+\sin(2\alpha+2\beta-2\beta) =$

$= \sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos(2\beta)+\cos(2\alpha+2\beta)\cdot\sin(2\beta)+\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos(2\beta) - \ldots$

$\cancel{2}\ \underbrace{\sin(2\alpha+2\beta)}_{-\frac{1}{\sqrt{17}}}\cdot\cos(2\beta) = -\frac{8}{17}4 \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos(2\beta) = -\frac{4}{17}\cdot(\sqrt{17}) = \frac{4}{\sqrt{17}}$

$2\beta = \pm\arccos\frac{4}{\sqrt{17}}+2\pi k$

$2\alpha+2\beta \in (\pi+2\pi n;\ 2\pi+2\pi n)$

$2\alpha+2\beta = \arcsin(-\frac{1}{\sqrt{17}})+2\pi l$

$2\alpha = \arcsin(\frac{1}{\sqrt{17}}) \pm \arc$

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\sin(2\beta) = \sin(-2\beta)$

$2\alpha+2\beta = -2\beta+2\pi s \Rightarrow \sin(2\alpha+2\beta) = \sin(-2\beta) = \frac{1}{\sqrt{17}}$

$\alpha = -2\beta+\pi s$

$2\beta \in \arccos+2\pi k$

$2\alpha+2\beta = \pi+2\beta+2\pi s$

$\alpha = \frac{\pi}{2}+\pi s \Rightarrow$

$2\alpha+4\beta =$

$= \pi+2\arccos\frac{4}{\sqrt{17}}$

an $\sin(2\beta) = \pm\sqrt{1-\frac{16}{17}} = \pm\frac{1}{\sqrt{17}}$

1) $\sin(2\alpha+2\beta) = \sin(2\beta) \Rightarrow$

$\Rightarrow 2\alpha+2\beta = 2\beta+2\pi t$

$2\alpha = 2\pi t$

$\alpha = \pi t$

$\operatorname{tg}\alpha = 0$

$2\alpha+2\beta = \pi-2\beta+2\pi t$

$\alpha = \frac{\pi}{2}-2\beta+\pi t =$

$= \frac{\pi}{2} \pm \arccos\frac{4}{\sqrt{17}}+\pi t$

$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin(\pi-2\beta) =$

$= \sin(2\beta) = \frac{1}{\sqrt{17}} \Rightarrow 2\beta = -\arccos\frac{4}{\sqrt{17}}+2\pi k$

$\cos(2\beta) = \frac{4}{\sqrt{17}}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$5^{+2} - 3^{+} \leq 4$

2) $\begin{cases} 3y - 2x = \sqrt{3xy - 2x - 3y + 2} \\ 3x^2 - 6x + 3y^2 - 4y = 4 \end{cases}$

$\sqrt{3xy - 3y - 2x + 2} = \sqrt{3y(x-1) - 2(x-1)} = \sqrt{(x-1)(3y-2)}$

$\begin{cases} x \geq 1 \\ y \geq \frac{2}{3} \end{cases}$

$\begin{cases} x \leq 1 \\ y \leq \frac{2}{3} \end{cases}$

$3y - 2x \geq 0 \Rightarrow y \geq \frac{2}{3}x$

$3x^2 - 6x + 3 + 3y^2 - 4y + 1 = 8$

$3(x-1)^2 + (3y-1)(y-1) = 8$

$x - 1 = A$

$3y - 2 = B$

$B - 2A = \sqrt{AB}$

$3A^2 + \frac{(B+1)(B-1)}{3} = 8$

$3A^2 + \frac{B^2 - 1}{3} = 8 \,|\cdot 3$

$9A^2 + B^2 = 24 + 1 = 25$

$\begin{cases} B - 2A = \sqrt{AB} \\ 9A^2 + B^2 = 25 \end{cases} \Rightarrow B^2 - 4AB + 4A^2 = AB$

$\cancel{B^2 + 4A^2 = 5AB}$ $\quad B^2 - 5AB + 4A^2 = 0$

$A \quad 4A$

$B = 4A, \; B = A$

$2A \geq 0$

$B \geq 0$

$B = A \Rightarrow B - 2A = -A \geq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow A \leq 0 \Rightarrow B = A \leq 0$

1) $B = 4A$

$25A^2 = 25 \Rightarrow A^2 = 1$

$A = 1$

$x - 1 = 1 \Rightarrow x = 2$

$B = 4 \Rightarrow 3y - 2 = 4$

$y = 2$

$\Rightarrow x = y = 2$

$3x - 2x = \sqrt{3x^2 - 5x + 2}$

$2 \qquad 3 \cdot 4 - 10 + 2 = 2$

$3x^2 + 3x^2 - 10x = 4$

$6x^2$

$6 \cdot 4 - 20 = 4$

2) $B = A \qquad A \leq 0$

$10A^2 = 25 \Rightarrow A^2 = \frac{5}{2} \Rightarrow A = -\sqrt{\frac{5}{2}} \Rightarrow x = 1 - \sqrt{\frac{5}{2}}$

$3y - 2 = -\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \Rightarrow y = \frac{2 - \sqrt{\frac{5}{2}}}{3}$

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)