МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 4 ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6}, \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$\left|x^2-26x\right|^{\log_5 12}+26x\geqslant x^2+13^{\log_5\left(26x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=12$, $BD=13$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $4\leqslant x\leqslant 28$, $4\leqslant y\leqslant 28$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{8-6x}{3x-2}\geqslant ax+b\geqslant 18x^2-51x+28$$

выполнено для всех x на промежутке $\left(\frac{2}{3};2\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $TXYZ$, вершина Y которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра TY. Известно, что $XY=\sqrt{3}$, $TX=\sqrt{2}$, $TZ=2$. Найдите длину ребра XZ. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1.) $\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ (1)

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{\sqrt{17}}$. (2)

$\Updownarrow$

Найти $\operatorname{tg}\alpha$.

Из условие, что $\operatorname{tg}\alpha$ определён: $\alpha \neq \frac{\pi}{2}+\pi k, k\in\mathbb{Z}$.

$2\cdot\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos(2\beta) = -\frac{2}{\sqrt{17}}$. Учитывая (1) имеем

$2\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right)\cdot\cos 2\beta = -\frac{2}{\sqrt{17}}$.

$\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}$. ~~, тогда $\sin 2\beta = \pm\frac{16}{\sqrt{17}}$~~.

$2\beta = \pm\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right) + 2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$.

(1): $\sin\left(2\alpha\pm\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)\right) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$.

$$\left[\begin{aligned}&2\alpha\pm\arccos\left(\tfrac{1}{\sqrt{17}}\right) = \arcsin\left(-\tfrac{1}{\sqrt{17}}\right)+2\pi t\\ &2\alpha\pm\arccos\left(\tfrac{1}{\sqrt{17}}\right) = \pi-\arcsin\left(-\tfrac{1}{\sqrt{17}}\right)+2\pi S\end{aligned}\right.,\quad t, S\in\mathbb{Z}.$$

$\Updownarrow$

$$\left[\begin{aligned}&2\alpha = -\arccos\left(\tfrac{1}{\sqrt{17}}\right)-\arcsin\left(\tfrac{1}{\sqrt{17}}\right)+2\pi t_1\\ &2\alpha = +\arccos\left(\tfrac{1}{\sqrt{17}}\right)-\arcsin\left(\tfrac{1}{\sqrt{17}}\right)+2\pi t_2\\ &2\alpha = -\arccos\left(\tfrac{1}{\sqrt{17}}\right)+\pi+\arcsin\left(\tfrac{1}{\sqrt{17}}\right)+2\pi S_1\\ &2\alpha = +\arccos\left(\tfrac{1}{\sqrt{17}}\right)+\pi+\arcsin\left(\tfrac{1}{\sqrt{17}}\right)+2\pi S_2\end{aligned}\right.\quad t_1, t_2\in\mathbb{Z},\ S_1, S_2\in\mathbb{Z}.$$

Пусть $\frac{1}{\sqrt{17}} = \gamma$, вспомним, что $\arcsin\omega + \arccos\omega = \frac{\pi}{2}$.

Тогда система имеет вид:

$$\left[\begin{aligned}&2\alpha = -\tfrac{\pi}{2}+2\pi t_1\\ &2\alpha = \arccos\gamma-\arcsin\gamma+2\pi t_2\end{aligned}\right.$$

☐ черновик ☒ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

$$\left[\begin{array}{l} 2\alpha = \pi + \arcsin\gamma - \arccos\gamma + 2\pi S_1 \\ 2\alpha = \frac{3\pi}{2} + 2\pi S_2 \end{array}\right. \qquad t_1, t_2, S_1, S_2 \in \mathbb{Z}.$$

$$\Updownarrow$$

$$\left[\begin{array}{ll} \alpha = -\frac{\pi}{4} + \pi t_1 & (3) \\ \alpha = \frac{1}{2}(\arccos\gamma - \arcsin\gamma) + \pi t_2 & (4) \\ \alpha = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}(\arcsin\gamma - \arccos\gamma) + \pi S_1 & (5) \\ \alpha = \frac{3\pi}{4} + \pi S_2 & (6) \end{array}\right.$$

Т.к. $\arcsin\gamma$ и $\arccos\gamma$ – углы в $I^{ой}$ четверти триг. окр-ти, то их разности не может равняться π, $-\pi$, 2π и -2π, т.е. $tg\,\alpha$ для α из (4) и (5) определены. Также $tg\,\alpha$ определён и для (3) и (6). Обозначим $\frac{1}{2}(\arccos\gamma - \arcsin\gamma)$ за φ. Тогда имеем тангенсы:

$tg\left(-\frac{\pi}{4} + \pi t_1\right) = -1$

$tg(\varphi + \pi t_2) = tg\,\varphi$

$tg\left(\frac{\pi}{2} - \varphi + \pi S_1\right) = ctg\,\varphi = \frac{1}{tg\varphi}$, $ctg(\varphi)$ определён, т.к. $\varphi \neq \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

$tg\left(\frac{3\pi}{4} + \pi S_2\right) = -1$.

Получим 3 различных значения тангенса $\left(\varphi \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Ответ: -1; $tg\varphi$; $\frac{1}{tg\varphi}$, где $\varphi = \frac{1}{2}\left(\arccos\frac{1}{\sqrt{17}} - \arcsin\frac{1}{\sqrt{17}}\right)$.

☐ черновик ☒ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

МФТИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2.) $\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x+6-y} & (1) \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45 & (2) \end{cases}$ ОДЗ: $xy-6x+6-y \geq 0.$

~~На ОДЗ можно возвести (1) в квадрат.~~

При ограничении $y-6x \geq 0$ можно равносильно возвести (1) в квадрат.

$(1): y^2+y-13xy+36x^2+6x=6$

$y^2+(1-13x)y+36x^2+6x-6=0.$

Решим отн-но y.

$D_y = 1+169x^2-26x-4(36x^2+6x-6) = 25(x-1)^2.$

$y = \dfrac{13x-1 \pm 5(x-1)}{2} = \left[\begin{array}{ll} 9x-3 & (3) \\ 4x+2 & (4) \end{array}\right.$

Подставим полученные значения y в (2):

(3):

$9x^2+9(3x-1)^2-18x-12(9x-3)=45$

$90x^2-(18+120-12+54)x+9+36-45=0$

$x(90x-180)=0$

$\left[\begin{array}{l} x=0,\ y=-3 \\ x=2,\ y=15. \end{array}\right.$ Проверим в конце решения.

$(4): 9x^2+4(2x+1)^2-18x-12(4x+2)=45.$

$25x^2-(18+48-16)x+4-24-45=0.$

$25x^2-50x-65=0 \ |:5 \iff 5x^2-10x-13=0.$

☐ черновик ☒ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

$x = 1 \pm \frac{3\sqrt{10}}{5}$, $y = \left(4\left(1 \pm \frac{3\sqrt{10}}{5}\right) + 2\right)$. – 2 решения, а не 4. Для одного x, один y.

Теперь проверим решение.

Можно проверить только $y - 6x \geqslant 0$, т.к. при возведении в квадрат мы приравняли корень к неотрицательной величине:

(x, y):

$(0, -3)$: $-3 \geqslant 0$ – нет

$(2, 5)$: $10 - 12 \geqslant 0$ – нет.

$\left(1 + \frac{3\sqrt{10}}{5}, 6 + \frac{12\sqrt{10}}{5}\right)$: $6 + \frac{12\sqrt{10}}{5} - 6 - \frac{18\sqrt{10}}{5} \geqslant 0$ – нет.

$\left(1 - \frac{3\sqrt{10}}{5}, 6 - \frac{12\sqrt{10}}{5}\right)$: $6 - \frac{12\sqrt{10}}{5} - 6 + \frac{18\sqrt{10}}{5} \geqslant 0$ – да.

Т.е. система имеет единственное решение.

Ответ: $(x, y) = \left(1 - \frac{3\sqrt{10}}{5}, 6 - \frac{12\sqrt{10}}{5}\right)$.

☐ черновик ☒ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3.) $|x^2-26x|^{\log_5 12} + 26x \geq x^2 + 13^{\log_5(26x-x^2)}$.

ОДЗ: $26x-x^2>0$, ~~$\Rightarrow$ мод.~~ Учитывая ОДЗ можно однозначно раскрыть модуль.

$$(26x-x^2)^{\log_5 12} + 26x \geq x^2 + 13^{\log_5(26x-x^2)}.$$

Пусть $26x-x^2=t>0$ Тогда н-во примет вид

$t^{\log_5 12} + t \geq 13^{\log_5 t}$. Вспомним св-во логарифмов $c^{\log_a b} = b^{\log_a c}$. Тогда $13^{\log_5 t} = t^{\log_5 13}$.

$t^{\log_5 12} + t \geq t^{\log_5 13}$ $/ : t>0$.

$t^{(\log_5 12-1)} + 1 \geq t^{(\log_5 13-1)}$

Т.к. $\log_5 12 - 1 < \log_5 13 - 1$, а t - возрастающая ф-ия от t, принимающая только положительные значения, можно сказать, что $t^{\log_5 12-1}$ ~~во~~ возрастает монотонно медленнее чем $t^{\log_5 13-1}$ и наступит момент, когда $t_0^{(\log_5 12-1)} + 1 = t_0^{(\log_5 13-1)}$ ~~след~~. ~~И~~ Все $t>t_0$ не будут удовлетворять неравенству, а все

$0<t<t_0$ - будут. Т.е. $t\in(0;t_0]$.

$t_0=25$ ч, Проверим: $25^{(\log_5 12-1)}+1=25^{(\log_5 13-1)}$

$5^{(\log_5 144-2)}+1=5^{\log_5 169-2}\ /\cdot 25$

$144+25=169$ - верно.

Т.е. $t\in(0;25]$.

$0<26x-x^2\le 25$.

$\Updownarrow$

$\begin{cases} 26x-x^2>0 \\ 26x-x^2-25\le 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(26-x)>0 \\ (x-1)(x-25)\geq 0. \end{cases}$

$\Updownarrow$

$\begin{cases} x\in(0;26) \\ x\in(-\infty;1]\cup[25;+\infty). \end{cases}$

$\Updownarrow$

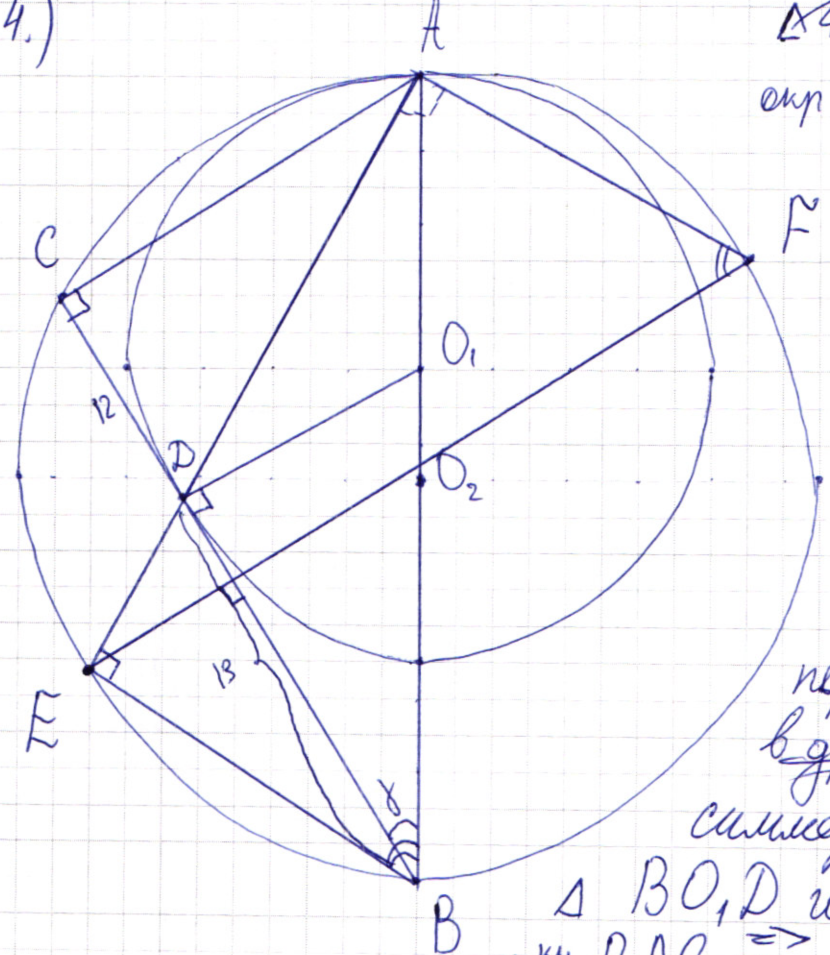
$x\in(0;1]\cup[25;26)$.

Ответ: $(0;1]\cup[25;26)$.

☐ черновик ☒ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4.)



Δ ~~Ab~~ O_1 и O_2 - центры окр-ей ω и Ω.

$O_1D \perp BC$, как радиус к касательной, $AC \perp BC$, т.к. AB - радиус. Точки A, O_1, O_2 и B лежат на одной прямой в силу ~~существования гомотетии, переводящей одну окр-ть в другую~~ (или же из симметрии отн-но O_1O_2.

ΔBO_1D гомотетично подобен ΔBAC по ку $\Rightarrow$ $\frac{BO_1}{BA} = \frac{BD}{BC} = \frac{13}{25}$.

$BO_1 = 2R - r$, $BA = 2R$, где R и r - радиусы Ω и ω.

$\frac{2R-r}{2R} = \frac{13}{25} \Leftrightarrow \frac{R}{r} = \frac{25}{24}$. Тогда $BO_1 = \frac{50}{24}r - r =$
$= \frac{26}{24}r = \frac{13}{12}r$, $O_1D = r$. Запишем Th. Пифагора для ΔDO_1B:

$\frac{169}{144}r^2 = r^2 + 169$

$\frac{25}{144}r^2 = 169 \Leftrightarrow r = \frac{13 \cdot 12}{5} = \frac{156}{5}$, $R = \frac{25}{24} \cdot \frac{13 \cdot 12}{5} = \frac{5 \cdot 13}{2} = \frac{65}{2}$.

$\gamma = \angle CBA$.

$\cos\gamma = \cancel{\frac{13}{BO_1}} = \frac{25}{2R} = \frac{25\cdot 2}{2\cdot 65} = \frac{5}{13}$, ~~значит~~ $\Rightarrow \sin\gamma = \frac{12}{13}$.

$\angle DO_1A = 90° + \gamma$. По Th. Косинусов $\triangle AO_1D$:

$AD^2 = 2\cdot r^2 - 2\cdot r^2\cdot\cos(90°+\gamma) = 2r^2(1+\sin\gamma) = 2r^2\cdot\frac{25}{13}$

$AD^2 = \frac{2\cdot 13^2\cdot 12^2\cdot \cancel{25}}{\cancel{5^2}\cdot \cancel{13}} = 12^2\cdot 26$

$AD = 12\sqrt{26}$.

По Th. О хордах: $AD\cdot DE = CD\cdot DB$

$12\cdot\sqrt{26}\cdot DE = 12\cdot 13$

$DE = \frac{\sqrt{13}\cdot\sqrt{13}}{\sqrt{26}} = \sqrt{\frac{13}{2}} = \frac{\sqrt{26}}{2}$.

$AE = 12\sqrt{26} + \frac{\sqrt{26}}{2} = \frac{25}{2}\sqrt{26}$.

Тогда $\angle EBA = \arcsin\left(\frac{AE}{2R}\right) = \arcsin\left(\frac{5\sqrt{26}}{13}\right) = \angle EFA$ (опир. на одну дугу).

Покажем, что EF проходит через O_2, записав обратную теорему Фалеса:

$\cancel{\angle}\ \frac{AD}{AE} \overset{?}{=} \frac{r}{R} = \frac{24}{25}$

$\frac{AD}{AE} = \frac{12\sqrt{26}}{\frac{25}{2}\sqrt{26}} = \frac{24}{25}$. $\Rightarrow$ проходит через O_2.

Тогда $\angle EAF = 90°$. Тогда $EF = 2R = 65$.

~~$AE=$~~ Тогда по Th. Пифагора в $\triangle AEF$:

$AF^2 = 65^2 - \frac{25^2\cdot 26}{4} = \frac{1}{4}(16900 - 16250) = \frac{1}{4}\cdot 650 =$

$= \frac{25\cdot 13\cdot 2}{4}$, $AF = \frac{5}{2}\sqrt{26}$. $S_{AEF} = \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{2}\sqrt{26}\cdot\frac{25}{2}\cdot\sqrt{26} = \frac{13\cdot 125}{4} =$

$= 406{,}25$. Ответ: $\frac{156}{5}$; $32{,}5$; $\arcsin\left(\frac{5\sqrt{26}}{13}\right)$; $406{,}25$.

☐ черновик ☒ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

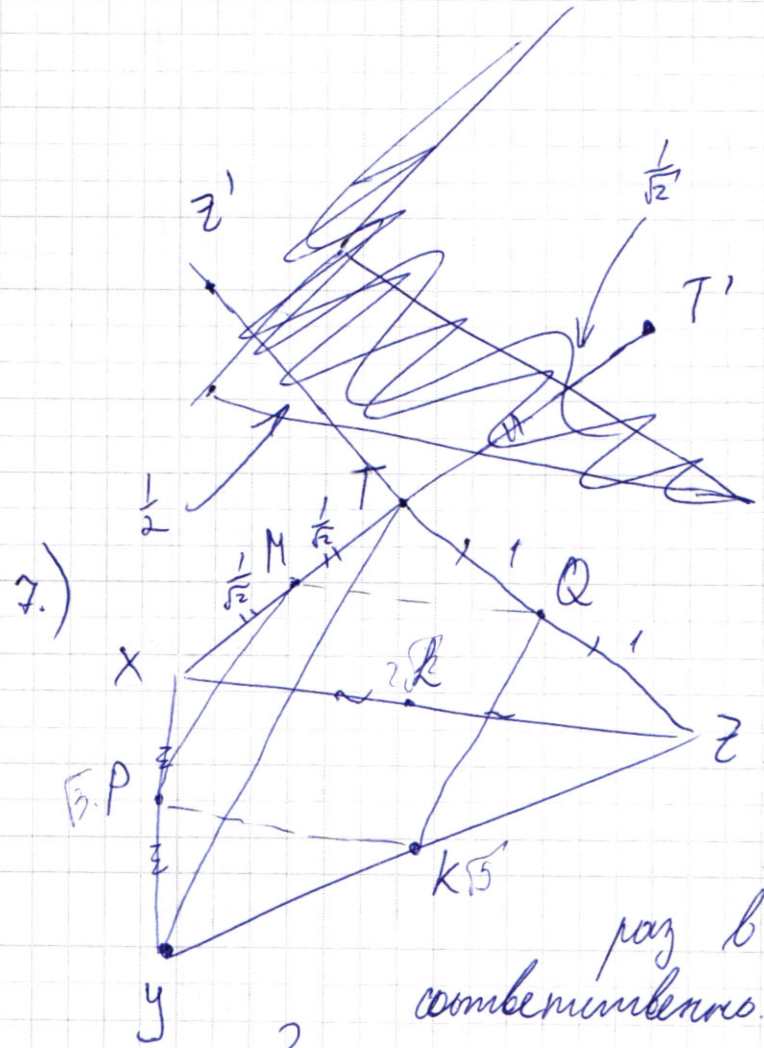
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

7.)



~~P — середина XY.~~

$XY = \sqrt{3}$, $TX = \sqrt{2}$, $TZ = 2$. $XZ - ?$

Пусть сфера пересекает отрезок XT, TZ, и XZ второй раз в точках T', Z' и X' соответственно.

Запишем степени точек отн-но сферы разными способами (или Th. о секущих).

$X: \quad \frac{XT}{2} \cdot XT' = \frac{XY}{2} \cdot XY = \frac{3}{2} \Rightarrow XT' = \frac{3}{\sqrt{2}}$.

~~Т.е~~ Т.е. T' лежит за T. $\Rightarrow$ Z' тоже будет лежать за T на TZ.

$T: \quad \frac{XT}{2} \cdot TT' = \frac{TZ}{2} \cdot TZ' \Rightarrow TZ' = \frac{XT}{TZ} \cdot TT' =$ ~~$\frac{\sqrt{2}}{2}$~~ $= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(\frac{3\sqrt{2}}{2} - \sqrt{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} = \frac{1}{2}$.

☐ черновик ☒ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

~~Xy~~ Т.к. XY и XP ~~смотрят в~~ (P — середина XY) лежат по одну сторону от ~~Xy~~ X на XY, то и X' ~~Z~~ лежит на луче XZ. Аналогичные рассуждения с точкой Z, дают нам понять, что X' лежит на отрезке XZ. Запишем степени точек X и Z.

$$\begin{cases} \frac{XY}{2} \cdot XY = XX' \cdot \frac{XZ}{2} = (XZ - X'Z) \cdot \frac{XZ}{2} \\ \frac{ZT}{2} \cdot ZZ' = ZX' \cdot \frac{XZ}{2} \end{cases}$$

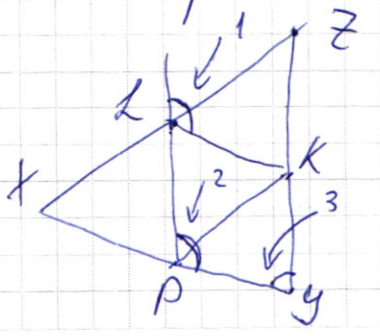
$$\begin{cases} 3 = XZ^2 - X'Z \cdot XZ \\ 5 = ZX' \cdot ZX \end{cases} \Rightarrow \cancel{3 = XZ^2 - \frac{5}{ZX}} \quad \cancel{XZ^3 - 3XZ - 5 = 0}$$

$$3 = XZ^2 - 5$$

$$XZ^2 = 8 \Leftrightarrow XZ = 2\sqrt{2}.$$

M, Q, K — середины XT, TZ и ZY соответственно. $MQ \parallel XZ \parallel PK$, $MP \parallel TY \parallel QK$. Т.к. P, Q, M, K — лежат на одной окр-ти, то $PQMK$ — прямоугольник $\Rightarrow MQ \perp MP \Leftrightarrow TY \perp XZ$

Также обратим внимание на то, что $\triangle XZY$ — прямоугольный.



~~Если~~ $\angle 3 = \angle 1$, т.к. $LKYP$ — вписанный,

$\angle 3 = \angle 2$, т.к. $LK \parallel XY \Rightarrow$

$\angle 3 + \angle 2 = 180°$ (т.к. $LP \parallel ZY$) и

$\angle 3 = \angle 1 = \angle 2 \Rightarrow \angle 3 = 90°$.

☐ черновик ☒ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Т.к. ΔXYZ – прямоугольный, то L – ~~его~~ центр его описанной окр-ти. ~~в~~ Восставим $\perp^р$ из L к (XYZ).

На нём будет лежать центр опис. сферы.

Обозначим за O центр опис. сферы.

Тогда $OT = \underbrace{OY = OX = OZ}_{\text{выполнено уже, } \cancel{\text{т.к.}}}$.

☐ черновик ☒ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

6.) $\frac{8-6x}{3x-2} = \frac{4-6x}{3x-2} + \frac{4}{3x-2} = \frac{4}{3x-2} - 2 \geq ax+b \geq$ g

$18x^2 - 51x + 28 = f$

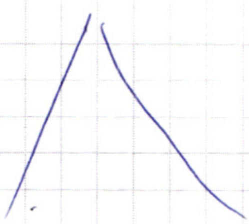
$x \in \left(\frac{2}{3}; 2\right].$

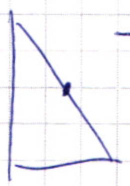
$f(2) = 18 \cdot 4 - 51 \cdot 2 + 28 = 2(36 - 51 + 14) = -2$

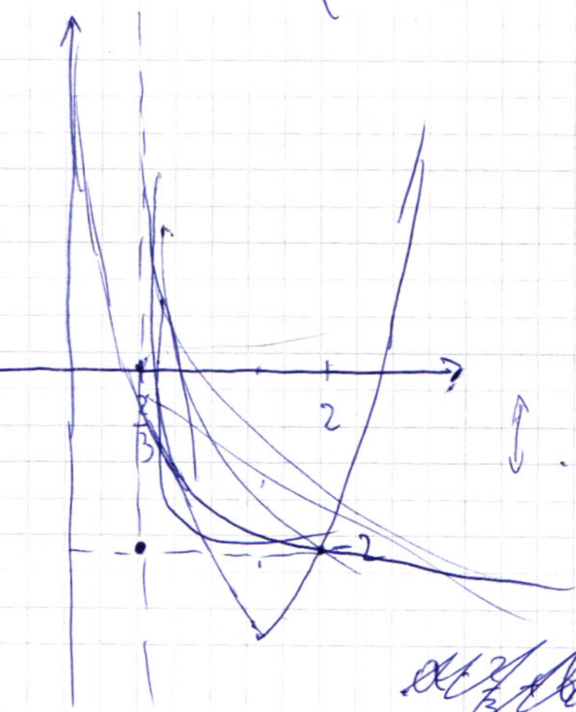
$f'(x) = 36x - 51 = 0$

$x_в = \frac{51}{36}.$

$\left(x - \frac{2}{3}\right)$







$f\left(\frac{2}{3}\right) = 8 - 34 + 28 = 2.$

$f(1) = 30 + 16 - 51 = 46 - 51 = -5.$

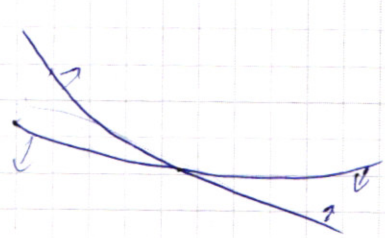
$-1 \geq$

$\begin{cases} a + b \geq -5 \\ 2 \geq 2a + b \geq -2. \end{cases}$

$g(2) = \frac{4}{4} - 2 = -1$

$g(1) = 4 - 2 = 2.$

$y = ax + b$



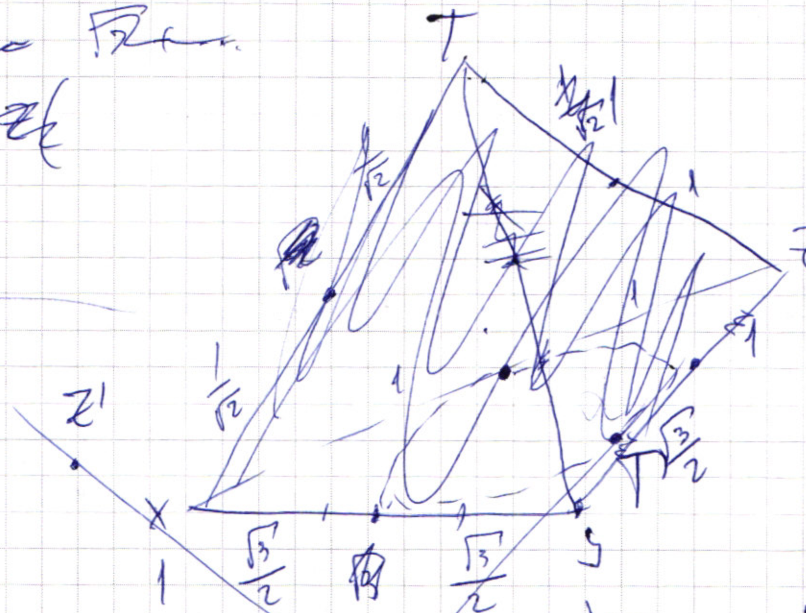
☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

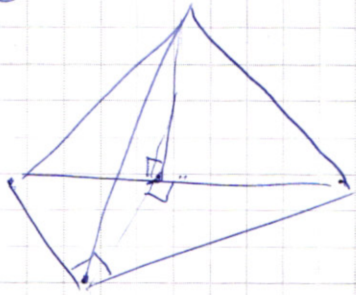
(Нумеровать только чистовики)

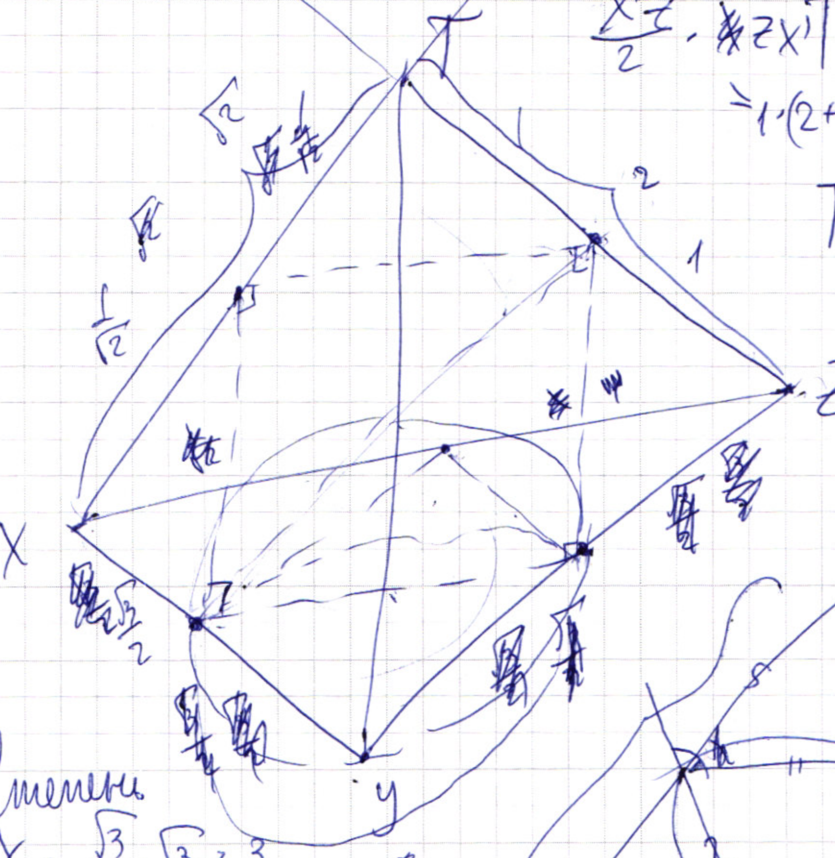
XZ{



XZ-?

$R_{\text{опис сферы}} \longrightarrow \min.$





$\frac{XZ}{2} \cdot \cancel{XZ} XT' \quad TY \perp XZ$

$= 1 \cdot (2+1) = 3.$

$XY = \sqrt{3}.$

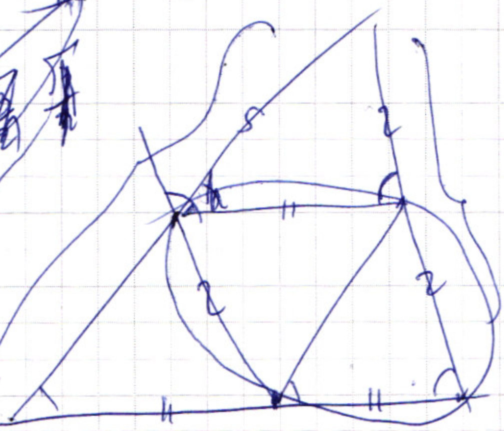
$TY^2 + XZ^2 =$

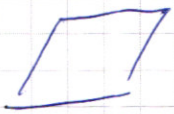
$XX' = ZX - ZX'$

$\frac{3}{2} = \frac{XZ}{2} \cdot XX'.$

$ZX \cdot XX' = 3.$

$\Rightarrow \angle XYZ = 90°$



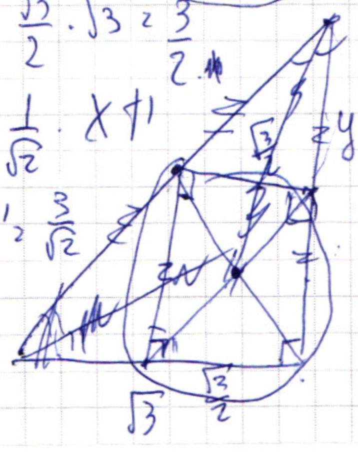


Стенки

$X: \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{3}{2}$

$\frac{3}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot XT'$

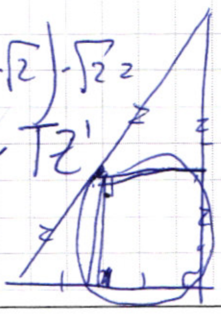
$XT' = \frac{3}{\sqrt{2}}$

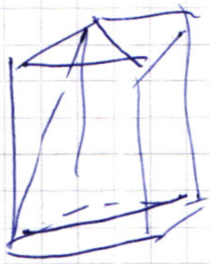


$\left(\frac{3\sqrt{2}}{2} - \sqrt{2}\right) \cdot \sqrt{2} =$

$= 1 \cdot TZ'$

$TZ' = 1.$





☒ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1.) $\sin((\alpha+\beta)2) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$.

$\sin(2(\alpha+2\beta)) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$.

ущ: $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$.

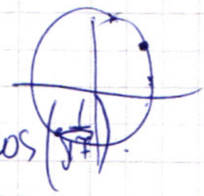
$tg\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

$2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos(2\beta) = -\frac{2}{17}$.

$-\frac{1}{\sqrt{17}}\cdot\cos 2\beta = -\frac{1}{17}$

$\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}$, $\sin 2\beta = \pm\sqrt{\frac{16}{17}}$

$-\frac{1}{\sqrt{17}} = \sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \cos 2\alpha\cdot\sin 2\beta$.



$-\frac{1}{\sqrt{17}} = \frac{1}{\sqrt{17}}\cdot\sin 2\alpha \pm \sqrt{\frac{16}{17}}\cdot\cos 2\alpha.\ |\cdot\sqrt{17}$ $\quad 2\beta = \pm\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)$.

~~$-1 = \sin 2\alpha \pm \sqrt{16}\cos 2\alpha$.~~ $\sin\left(2\alpha + \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)\right) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$.

$$\left[\begin{aligned} &2\alpha + \arccos\left(\tfrac{1}{\sqrt{17}}\right) = -\arcsin\left(\tfrac{1}{\sqrt{17}}\right) + 2\pi n \\ &2\alpha + \arccos\left(\tfrac{1}{\sqrt{17}}\right) = \pi + \arcsin\left(\tfrac{1}{\sqrt{17}}\right) + 2\pi n. \end{aligned}\right.$$

$\Updownarrow$

$$\left[\begin{aligned} &2\alpha = -\tfrac{\pi}{2} + 2\pi n \iff \alpha = -\tfrac{\pi}{4} + \pi n. \\ &2\alpha = \pi + \arcsin\left(\tfrac{1}{\sqrt{17}}\right) - \arccos\left(\tfrac{1}{\sqrt{17}}\right) + 2\pi n. \end{aligned}\right.$$

$tg\,\alpha = -1.$, $\alpha = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\left(\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right) - \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)\right) + \pi n.$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$$2.)\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6} \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45. \end{cases}$$

$\cancel{y-6x\geq 0}$

y

$xy-6x-y+6\geq 0.$

$\cancel{9x^2+y^2}$ $9x^2-18x+9=9(x^2-2x+1)=9(x-1)^2.$

$y^2-12y+36=(y-6)^2.$

$$\begin{cases} y^2+36x^2-12xy=xy-6x-y+6 \quad (1) \\ 9(x-1)^2+(y-6)^2=90. \quad (2) \end{cases}$$

$(1): \ y^2+y-13xy+36x^2+6x=6$

$y^2+(1-13x)y+36x^2+6x-6=0.$

$D_y=1+169x^2-26x-4(36x^2+6x-6)=$

$=\underbrace{(169-120-24)}_{25}x^2-\underbrace{(26+24)}_{50}x+25=25(x^2-2x+1).$

$y=\dfrac{13x-1\pm 5(x-1)}{2}.$

$120+54+\cancel{12}+6=180$

$5x^2-10x-13=0$

$\frac{D}{4}=25+13\cdot 5=25+50+15=90.=(3\sqrt{10})^2.$

$\cancel{x}\ x=\dfrac{5\pm 3\sqrt{10}}{5}.$

$y=4x+2$

$5^{\log_5 12}=5$

$\cancel{z}$ $\cancel{24}\ 144+25\geq \cancel{26}\ 169.$

$12+5\geq 13.$

$(0,-3)$

$(2,15)$

☒ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

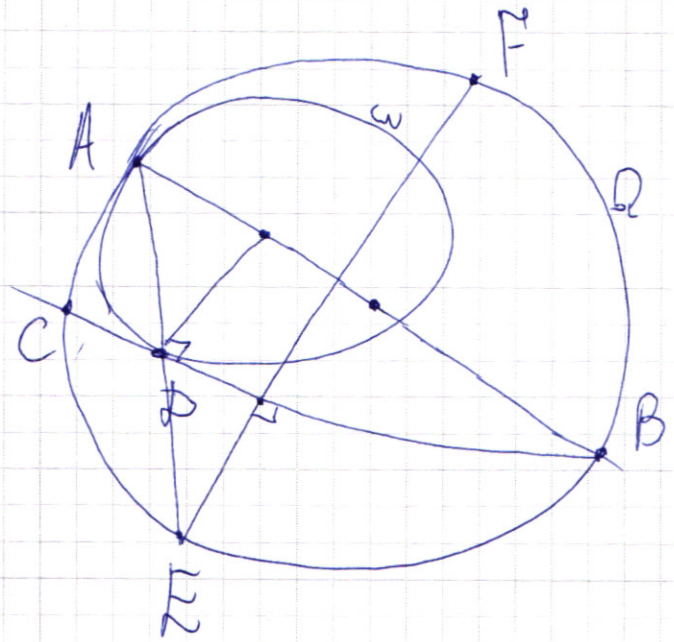
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4.)



$CD = 12$

$BD = 13.$

$\angle AFE - ?$ $S_{AEF} - ?$

$r, R - ?$

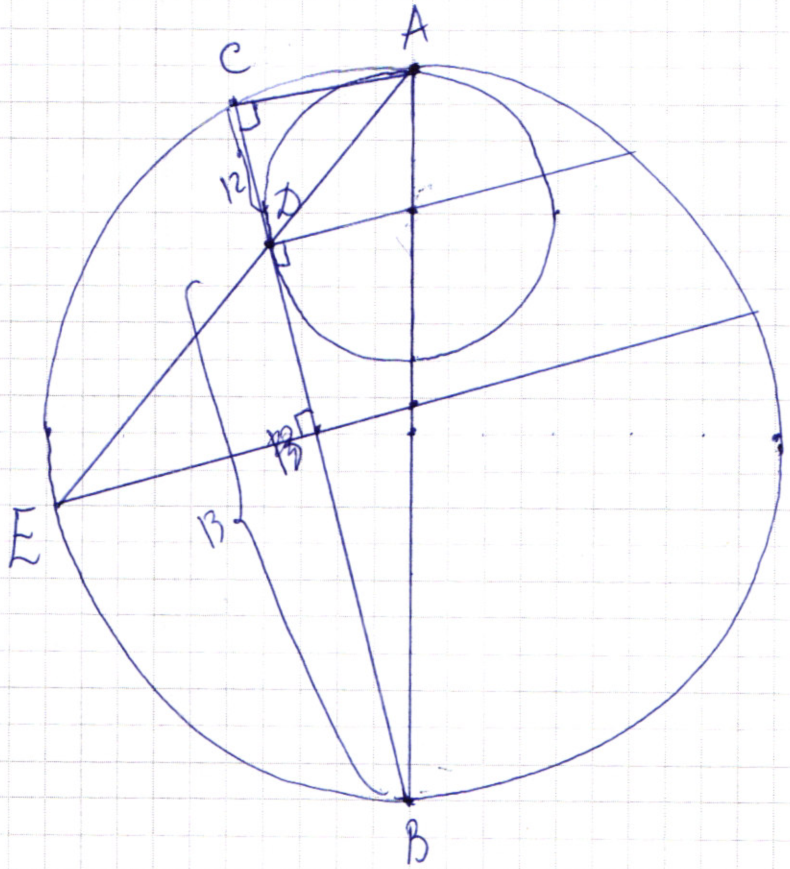
$$\frac{2R - r}{2R} = \frac{13}{13+12 = 25}$$

$50R - 25r = 26R.$

$$\frac{R}{r} = \frac{25}{24}.$$

$\Downarrow$

O_Ω лежит внутри ω.

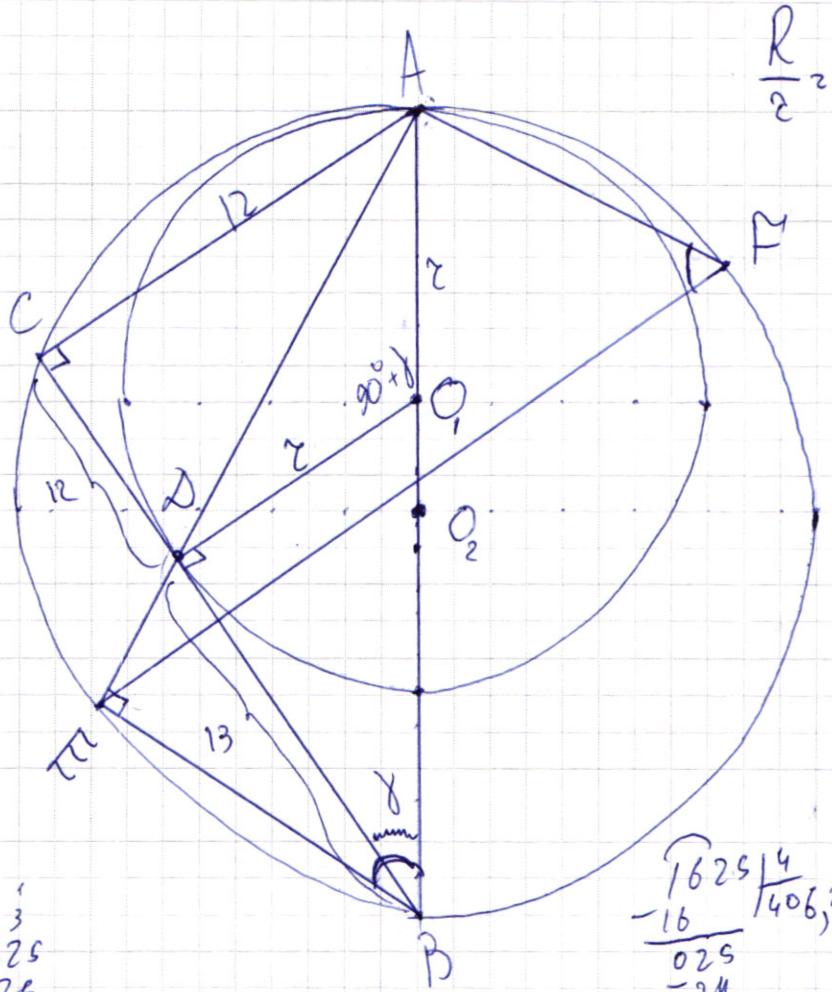


☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)



$\frac{R}{r} = \frac{25}{24}$. $\angle AFE - ?$

$R = \frac{25}{24} r$.

~~Ak~~

$AD \cdot DE = 12 \cdot 13$.

$\frac{BO_1}{BA} = \frac{2R - r}{2R}$

$S_{AEF} - ?$

$R = \frac{65}{2}$

$650 = 65 \cdot 10 = 13 \cdot 5^2 \cdot 2$

$1625 : 4 = 406{,}25$

$13 \cdot 5 = 50 + 15 = 65$

$CA = 12$

$144 + 12 = 156$

$r = \frac{13 \cdot 12}{5}$

$\frac{AD}{AE} = \frac{12 \sqrt{26}}{\frac{25}{2} \cdot \sqrt{26}} = \frac{24}{25}$.

625×26: $3750 + 12500 = 16250$

$2500 : 4 = 625$

~~$13 \cdot 125 =$~~

~~$13 \cdot 125$~~

125×13: $375 + 1250 = 1625$

$\frac{\frac{25}{2}\sqrt{26}}{\frac{65}{2} \cdot 13} = \frac{5\sqrt{26}}{13}$

$\frac{50^2}{4} = \frac{2500}{4}$

$65^2 = (50 + 15)^2 = 225 + 2500 + 30 \cdot 50 = 4225$.

$25^2 = (\cancel{30 - 5})(\cancel{20 + 5}) =$

$= \cancel{900}$

$\frac{2500}{4} = 625$

~~$4225 \cdot 4 =$~~

$4225 \times 4 = 16900$

$\frac{65}{2} = \frac{64}{2} + 0{,}5 = 32{,}5$

☒ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)