МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 4

ШИФР ______________

Заполняется ответственным секретарём

1. **[3 балла]** Углы α и β удовлетворяют равенствам
$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{17}.$$
Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. **[4 балла]** Решите систему уравнений
$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6}, \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45. \end{cases}$$

3. **[5 баллов]** Решите неравенство
$$\left|x^2-26x\right|^{\log_5 12}+26x\geqslant x^2+13^{\log_5\left(26x-x^2\right)}.$$

4. **[5 баллов]** Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=12$, $BD=13$.

5. **[5 баллов]** Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $4\leqslant x\leqslant 28$, $4\leqslant y\leqslant 28$ и $f(x/y)<0$.

6. **[5 баллов]** Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство
$$\frac{8-6x}{3x-2}\geqslant ax+b\geqslant 18x^2-51x+28$$
выполнено для всех x на промежутке $\left(\frac{2}{3};2\right]$.

7. **[6 баллов]** Дана пирамида $TXYZ$, вершина Y которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра TY. Известно, что $XY=\sqrt{3}$, $TX=\sqrt{2}$, $TZ=2$. Найдите длину ребра XZ. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 2.

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6} \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{x(y-6)-(y-6)} \\ 9x^2-18x+9+y^2-12y+36=90 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{(x-1)(y-6)} \\ 9(x-1)^2+(y-6)^2=90 \end{cases}$$

] $\begin{cases} x-1=k \\ y-6=p \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=k+1 \\ y=p+6 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad y-6x=p+6-6k-6=p-6k$

$$\begin{cases} p-6k=\sqrt{kp} \\ 9k^2+p^2=90 \end{cases}$$

если $p-6k\geq 0 \quad p\geq 6k \Rightarrow$

$\Rightarrow (p-6k)^2=kp$

$p^2-12kp+36k^2=kp$

$p^2-13kp+36k^2=0$

$k^2\left(\left(\frac{p}{k}\right)^2-13\cdot\frac{p}{k}+36\right)=0$

1°. $k=0 \Rightarrow p=0 \Rightarrow 9k^2+p^2=0\neq 90 \Rightarrow \varnothing$

2°. $\left(\frac{p}{k}\right)^2-13\cdot\left(\frac{p}{k}\right)+36=0$ $\quad D=169-4\cdot 36=25=5^2$

] $\frac{p}{k}=t \Rightarrow \quad t^2-13t+36=0 \quad t=\frac{13\pm 5}{2}=9;4 \Rightarrow$.

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} p=9k \\ p=4k \end{array}\right. \quad \text{Т.к. } p-6k\geq 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 9k-6k\geq 0 \\ 4k-6k\geq 0 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} k\geq 0 \\ k\leq 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} p=9k\geq 0 \\ p=4k\leq 0 \end{array}\right.$$

$$9k^2+p^2=90$$

$$\left[\begin{array}{l} 9k^2+(9k)^2=90 \\ 9k^2+(4k)^2=90 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} 9k^2+81k^2=90 \\ 9k^2+16k^2=90 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} 90k^2=90 \\ k^2=\frac{90}{25} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} k^2=1 \\ k^2=\cancel{3\sqrt{10}}\ \frac{90}{25} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} k=\pm 1 \quad \geq 0 \\ k=\pm\frac{3\sqrt{10}}{5} \quad \leq 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} k=1 \\ k=-\frac{3\sqrt{10}}{5} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} k=1 \\ p=9 \end{cases} \\ \begin{cases} k=-\frac{3\sqrt{10}}{5} \\ p=\frac{-12\sqrt{10}}{5} \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=2 \\ y=15 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-\frac{3\sqrt{10}}{5}+1 \\ y=\frac{-12\sqrt{10}}{5}+6 \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $\begin{cases} x=2 \\ y=15 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-\frac{3\sqrt{10}}{5}+1 \\ y=-\frac{12\sqrt{10}}{5}+6 \end{cases}$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N1.

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ 2\cdot\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta = -\frac{2}{17} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = -\frac{1}{17} \end{cases}$$

$$-\frac{1}{\sqrt{17}}\cos 2\beta = -\frac{1}{17}$$

$$\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}} \Rightarrow \sin 2\beta = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}$$

$$\sin 2\alpha \cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$\sin 2\alpha \cdot \frac{1}{\sqrt{17}} + \cos 2\alpha\left(\pm\frac{4}{\sqrt{17}}\right) + \frac{1}{\sqrt{17}} = 0 \quad \Big| \cdot\sqrt{17}$$

$$\sin 2\alpha \pm 4\cos 2\alpha = -1$$

1°. $\sin 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sin 2\alpha + 4\cos 2\alpha = -1$$

$$\sqrt{1-\cos^2 2\alpha} = -1-4\cos 2\alpha \quad \left(\begin{matrix} -1-4\cos 2\alpha \geq 0 \\ \cos 2\alpha \leq -\frac{1}{4} \end{matrix}\right)$$

$$1-\cos^2 2\alpha = 1 + 8\cos 2\alpha + 16\cos^2 2\alpha$$

$$17\cos^2 2\alpha + 8\cos 2\alpha = 0$$

$\cos 2\alpha(17\cos 2\alpha + 8) = 0$

~~$\cos 2\alpha \neq 0$~~

~~1°: $\cos 2\alpha = 0 \Rightarrow 2\alpha = \frac{\pi}{2} + \pi k \Rightarrow$~~

~~$\Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$~~

$$\left[\begin{array}{l} \cos 2\alpha = 0 \\ \cos 2\alpha = -\frac{8}{17} \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} \cos 2\alpha \leq -\frac{1}{4} \Rightarrow \\ \Rightarrow \cos 2\alpha = -\frac{8}{17} \Rightarrow \end{array}$$

~~$\Rightarrow \sin 2\alpha = \pm$~~ $\sqrt{}$

$\Rightarrow \sin 2\alpha = \cancel{-16}\; -1 - 4\cos 2\alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow -1 + \frac{32}{17} = \frac{15}{17} \Rightarrow$

$\Rightarrow \operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{15}{8}$

$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}$

$-\frac{15}{8}(1 - \operatorname{tg}^2\alpha) = 2\operatorname{tg}\alpha \,\Big|\cdot 8$

$15\operatorname{tg}^2\alpha - 15 = 16\operatorname{tg}\alpha$

$15\operatorname{tg}^2\alpha - 16\operatorname{tg}\alpha - 15 = 0$

$D = 16^2 - 4\cdot 15(-15) = 1156 = 34^2$

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{16 \pm 34}{30} = -\frac{3}{5};\ \frac{5}{3}$

2°. $\sin 2\beta = -\frac{4}{\sqrt{17}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sin 2\alpha - 4\cos 2\alpha = -1$

$\sqrt{1 - \cos^2 2\alpha} = 4\cos 2\alpha - 1 \quad \left(\begin{array}{l} 4\cos 2\alpha - 1 \geq 0 \\ \cos 2\alpha \geq \frac{1}{4} \end{array}\right)$

$1 - \cos^2 2\alpha = 16\cos^2 2\alpha - 8\cos 2\alpha + 1$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 4

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$17\cos^2 2\alpha - 8\cos 2\alpha = 0$

$\cos 2\alpha\,(17\cos 2\alpha - 8) = 0$

$\left[\begin{array}{l}\cos 2\alpha = 0\\ 17\cos 2\alpha = \frac{8}{17}\end{array}\right.$ $\cos 2\alpha \geq \frac{1}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos 2\alpha = \frac{8}{17} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sin 2\alpha = 4\cos 2\alpha - 1 = 4\cdot\frac{8}{17} - 1 = \frac{32}{17} - 1 =$

$= \frac{15}{17} \Rightarrow$

$\Rightarrow \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{15}{8} \Rightarrow$

$\Rightarrow \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$

$\frac{15}{8}(1 - \operatorname{tg}^2\alpha) = 2\operatorname{tg}\alpha \quad |\cdot 8$

$15 - 15\operatorname{tg}^2\alpha = 16\operatorname{tg}\alpha$

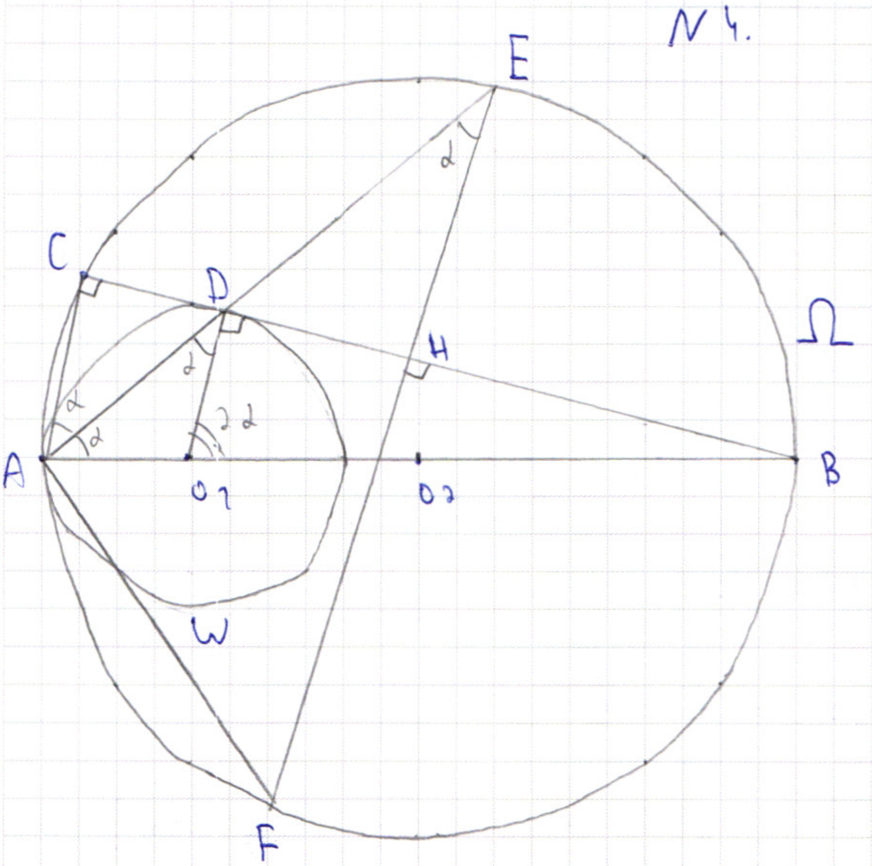
$15\operatorname{tg}^2\alpha + 16\operatorname{tg}\alpha - 15 = 0$

$D = 16^2 - 4\cdot 15(-15) = 1156 = 34^2$

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{-16 \pm 34}{30} = -\frac{5}{3}; \frac{3}{5}$

Ответ: $\left[\begin{array}{l}\operatorname{tg}\alpha = -\frac{5}{3}\\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{5}\\ \operatorname{tg}\alpha = -\frac{3}{5}\\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{5}{3}\end{array}\right.$

N 4.



Дано:

Ω и W

CD = 12

BD = 13

Найти:

r-? R-?

∠AFE-?

S_{AEF}-?

Решение:

1) Т.к. O_1 - центр W и O_2 - центр Ω => пров. $O_1D \perp BC$ =>

=> $O_1D = r$ (радиус W). Т.к. △BO_1D ~ △BAC =>
(AB - диаметр => ∠ACB = 90°)

=> $\frac{BO_1}{BA} = \frac{BD}{BC}$

Т.к. BA = 2R (R - радиус Ω), $BO_1 = AB - AO_1 = 2R - r$ =>

$$\Rightarrow \frac{2R-r}{2R} = \frac{13}{25}$$

$$1 - \frac{r}{2R} = \frac{13}{25}$$

$$\frac{r}{2R} = \frac{12}{25}$$

$$\frac{r}{R} = \frac{24}{25} \Rightarrow r = \frac{24}{25} R$$

Из △BO_1D по теор. Пифагора:

$$BO_1^2 = O_1D^2 + BD^2$$

$$(2R - r)^2 = r^2 + 169$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$4R^2-4Rr+r^2=r^2+169$$

$$4R^2-4Rr-169=0$$

$$4R^2-4\cdot R\cdot\frac{24}{25}R=169$$

$$4R^2-\frac{96R^2}{25}=169$$

$$\frac{4R^2}{25}=169$$

$$R^2=\frac{13^2\cdot5^2}{2^2}$$

$$R=\frac{65}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow r=\frac{24}{25}\cdot\frac{65}{2}=\frac{12\cdot13}{5}=\frac{156}{5}$$

2) $\exists$ $CB\cap EF=H \Rightarrow \exists\ \angle DEH=\alpha \Rightarrow \angle HDE=\angle ADC=90-\alpha\Rightarrow$

~~$\Rightarrow$ Из $\triangle$ ACD $\angle CAD=$~~ $\Rightarrow$ Из $\triangle ACD$ $\angle CAD=\alpha$.

Т.к. $\angle CDO_1=90\Rightarrow\angle ADO_1=90-(90-\alpha)=\alpha$.

Т.к. $AO_1=DO_1\Rightarrow\angle O_1AD=\angle O_1DA=\alpha\Rightarrow$

$\Rightarrow \smile BE=2\angle EAB=2\alpha$. Т.к. AB - диаметр $\Rightarrow$

$\Rightarrow\angle AEB=90^\circ\Rightarrow\angle FEB=90-\alpha\Rightarrow\smile FB=2\angle FEB=$

$=2(90-\alpha)=180-2\alpha\Rightarrow\smile FE=\smile FB+\smile BE=180-2\alpha+2\alpha=$

$=180^\circ\Rightarrow$ FE - диаметр $\Rightarrow\angle FAE=90^\circ\Rightarrow\angle AFE=90-\alpha$

Из $\triangle BAC$: $\sin2\alpha=\frac{BC}{AB}=\frac{25}{2R}=\frac{25}{65}=\frac{5}{13}\Rightarrow$

$\Rightarrow2\alpha=\arcsin\left(\frac{5}{13}\right)\Rightarrow\alpha=\frac{\arcsin\left(\frac{5}{13}\right)}{2}\Rightarrow\angle AFE=\cancel{90}\ 90-\frac{\arcsin\left(\frac{5}{13}\right)}{2}$

$=> S_{AEF} = \frac{1}{2} \cdot AE \cdot AF = \frac{1}{2} \cdot FE \cos\alpha \cdot \overset{FE}{\cancel{AF}} \sin\alpha = \frac{\cancel{2+}FE^2 \cdot 2\sin\alpha\cos\alpha}{4} =$

$= \frac{FE^2 \sin 2\alpha}{4}$. Т.к. FE - диаметр => $FE = AB = 65$ =>

$=> S_{AEF} = \frac{65^2 \cdot \frac{25}{65}}{4} = \frac{65 \cdot 25}{4}$

Ответ: $r = \frac{156}{5}$; $R = \frac{65}{2}$; $\angle AFE = 90 - \frac{\arcsin\left(\frac{5}{13}\right)}{2}$;

$S_{AEF} = \frac{65 \cdot 25}{4}$

№3.

$$|x^2 - 26x|^{\log_5 12} + 26x \geq x^2 + 13^{\log_5 (26x - x^2)}$$

] $26x - x^2 = t$ => $t > 0$ => $|x^2 - 26x| = |-t| = t$ =>

$=> t^{\log_5 12} + t \geq 13^{\log_5 t}$

] $t = 5^p$ => $p = \log_5 t$ =>

$=> \left(5^{\log_5 12}\right)^p + 5^p \geq 13^p$

$$12^p + 5^p \geq 13^p$$

Т.к. $a^n + b^n = c^n$, где $a, b, c \in Z$ только при $p \leq 2$ =>

~~=> при p > 2 при p > 2~~

при $p = 2$!

$12^2 + 5^2 = 144 + 25 = 169 = 13^2$ =>

=> при $p > 2$, $12^p + 5^p \neq 13^p$ =>

$=> 12^p + 5^p < 13^p$ =>

$=> p \leq 2 => t = 5^p$

$t \leq 5^2 = 25$ =>

$=> t = 26x - x^2 \leq 25$

$x^2 - 26x + 25 \geq 0$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$x^2 - x - 25x + 25 \ge 0$

$x(x-1) - 25(x-1) \ge 0$

$(x-1)(x-25) \ge 0$

$x \in (-\infty; 1] \cup [25; +\infty)$

Т.к. $t > 0$

$26x - x^2 > 0$

$x(26-x) > 0$

$x(x-26) < 0$

$x \in (0; 26) \Rightarrow$

$\Rightarrow x \in (0; 1] \cup [25; 26)$

Ответ: $x \in (0; 1] \cup [25; 26)$

N 6.

$\overset{=f(x)}{\frac{8-6x}{3x-2}} \ge ax+b \ge \overset{=g(x)}{18x^2-51x+28}$ $\quad x \in [\frac{2}{3}; 2]$

$\frac{8-6x}{3x-2} = \frac{-6x+4}{3x-2} + \frac{4}{3x-2} = -2 + \frac{4}{3x-2}$

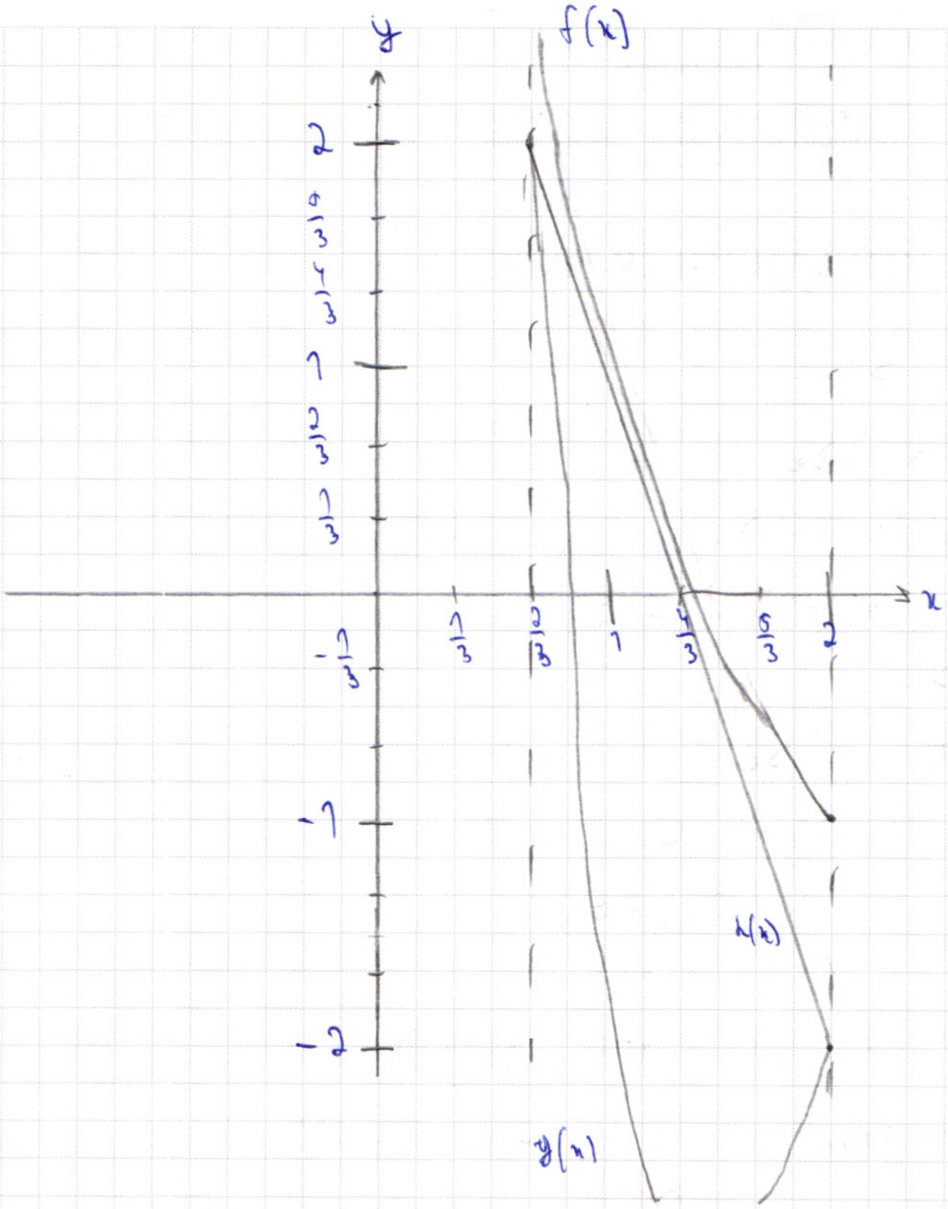
При $x = \frac{2}{3}$, $f(x) \to +\infty$, $g(x) = 18 \cdot \frac{4}{9} - 51 \cdot \frac{2}{3} + 28 =$

$= 8 - 34 + 28 = 2$

При $x = 2$, ~~$g(x) =$~~ $f(x) = \frac{8}{-2} + \frac{4}{4} = -2 + 1 = -1,$

$g(x) = 18 \cdot 4 - 51 \cdot 2 + 28 = -2 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ графики $g(x)$ и $f(x)$ выглядят примерно так:



на $[\frac{2}{3}; 2]$

Т.к. $ax+b \geq 18x^2 - 51x + 28$ => ~~$ax+b$~~ $y = ax+b$ должен быть выше прямой $h(x)$ прох. через $(\frac{2}{3}; 2)$ и $(2; -2)$

$h(x) = kx + b$

~~$h($~~ ~~$2 = kx$~~ $\begin{cases} 2 = \frac{2}{3}k + b \\ -2 = 2k + b \end{cases}$

$2k - \frac{2}{3}k = -4$

$\frac{4}{3}k = -4$

$k = -3$ => $b = -2 - 2k =$

$= -2 + 6 = 4$ =>

=> $y = -3x + 4$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$h(x) = -3x + 4$ на $[\frac{2}{3}; 1]$

Т.к. $ax + b \le \frac{8-6x}{3x-2}$ => $ax + b$ должен быть ниже

$f(x) = -2 + \frac{4}{3x-2}$ на $[\frac{2}{3}; 1]$.

Найдём произв. $f(x)$

$$f'(x) = 4 \cdot \left(-\frac{1}{(3x-2)^2}\right) \cdot 3 = -\frac{12}{(3x-2)^2}$$

Найдём x_0, при котором $f'(x_0)$ равна ~~наклонной~~ $h'(x_0)$ => $-\frac{12}{(3x_0-2)^2} = -3$

$(3x_0 - 2)^2 = 4$

$3x_0 - 2 = \pm 2$

$$\left[\begin{array}{l} x_0 = 0 \\ x_0 = \frac{4}{3} \end{array}\right.$$

Найдём $h(x_0) = -3 \cdot \frac{4}{3} + 4 = 0$

Найдём $f(x_0) = -2 + \frac{4}{3 \cdot \frac{4}{3} - 2} = -2 + \frac{4}{2} =$

$= 0$ => $h(x_0) = f(x_0) = 0$ и $f'(x_0) = h'(x_0) = -3$ =>

=> x_0 – т. касания графиков $h(x_0)$ и $f(x_0)$ =>

=> $y = ax + b$ совпадает с прямой касания

, т.е. с $h(x) = -3x + 4$ => $\begin{cases} a = -3 \\ b = 4 \end{cases}$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

№ 5.

Т.к. $f(p) = [\frac{p}{4}]$, где p-простое

Т.к. $f(ab) = f(a) + f(b)$

~~f(1~~ ~~f(1)=~~ $f(a) = f(1) + f(a)$

$f(1) = 0$

⇒ $f(2) = 0$

$f(3) = 0$

$f(5) = 1$

$f(7) = 1$

$f(\overset{11}{8}) = 2$

$f(13) = 3$

$f(17) = 4$

$f(19) = 4$

$f(23) = 5$

~~77~~

$$\begin{array}{r} +144 \\ \underline{77} \\ 221 \end{array}$$

$f(4) = f(2) + f(2) = 0$

$f(6) = f(2) + f(3) = 0$

$f(8) = f(4) + f(2) = 0$

$f(9) = f(3) + f(3) = 0$

$f(10) = f(2) + f(5) = 1$

$f(12) = f(6) + f(2) = 0$

$f(14) = f(2) + f(7) = 1$

$f(15) = f(3) + f(5) = 1$

$f(16) = f(2) + f(8) = 0$

$f(18) = f(2) + f(9) = 0$

$f(20) = f(2) + f(10) = 1$

$f(21) = f(3) + f(7) = 1$

$f(22) = f(11) + f(2) = 2$

$f(24) = f(2) + f(12) = 0$

$f(25) = f(5) + f(5) = 2$

$f(26) = f(2) + f(13) = 3$

$f(27) = f(3) + f(9) = 0$

$f(28) = f(2) + f(14) = 1$

$4 \leq x \leq 28$, $4 \leq y \leq 28$

Т.к. $f(\frac{x}{y}) = f(x) - f(y) < 0$ ⇒

⇒ $f(x) < f(y)$ ⇒

⇒ 1°. при $f(x) = 0$ ⇒

⇒ кол-во x равно ~~17~~ 9

$f(y) > 0$ кол-во y равно 16

⇒ пар равно $9 \cdot 16$

2°. при $f(x) = 1$ ⇒

⇒ кол-во x равно 8

$f(y) > 1$ кол-во y равно 8 ⇒

⇒ пар равно 64

3°. при $f(x) = 2$ ⇒

⇒ кол-во x равно 3

~~пар равно~~

$f(y) > 2$ кол-во y равно 5 ⇒

⇒ пар равно 15

4°. $f(x) = 3$ ⇒

⇒ кол-во x равно 2 ⇒

⇒ $f(y)$ ~~равно~~ > 3 ⇒

⇒ y равно 3 ⇒

⇒ пар равно 6

~~4°. f(x) = 4 ⇒~~

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5°. $f(x)=4 \Rightarrow$ кол-во x равно 2 $\Rightarrow f(y) > 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ кол-во y равно 1 $\Rightarrow$ пар равно 2

0°. $f(x)=5 \Rightarrow f(y)>5$ $\varnothing$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Всего пар ~~9+~~ $9 \cdot 16 + 54 + 15 + 6 + 2 =$

$= 144 + 69 + 8 = 227$

Ответ: 227

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$y - 6x = \sqrt{x(y-6) - (y-6)} = \sqrt{(x-1)(y-6)}$

$9x^2 - 18x + 9 + y^2 - 12y + 36 = 90$

$D = 169 - 4 \cdot 36 = 169 - 144 = 25$ $\quad 9(x-1)^2 + (y-6)^2 = 90$

$kp = \frac{13 \pm 0}{2}$

$p^2 - 13kp + 36k^2 = 0$ $\quad x - 1 = k$

$y - 6 = p$

$x = k + 1$

$y = p + 6$

$p + 6 - 6k - 6 = p - 6k$

$9k^2 + \frac{81k^2}{16} = 90 \,\Big|\, \cdot \frac{16}{9}$ $\quad \begin{cases} p - 6k = \sqrt{kp} \\ 9k^2 + p^2 = 90 \end{cases}$

$16k^2 + 9k^2 = 160$

$25k^2 = 160$ $\quad$ ~~$p^2 - 36kp$~~

$k^2 = \frac{32}{5}$ $\quad p^2 - 12kp + 36k^2 = kp$

$p = \frac{9k}{4}$ $\quad 9k^2 + 13kp - 36k^2 = kp$

$12kp = 27k^2 \,|\, : 3k$

$4p = 9k$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

2 ~~$\sin\alpha\sin$~~

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$

$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha\cos\beta$

$\operatorname{tg}2\alpha - \operatorname{tg}2\alpha\cdot\operatorname{tg}^2\alpha = 2\operatorname{tg}\alpha$

$\alpha+\beta = \gamma$

$\alpha-\beta = \delta$

$\sin\gamma + \sin\delta = 2\sin\frac{\gamma+\delta}{2}\cos\frac{\gamma-\delta}{2}$

$\sin 2\alpha\cos 2\beta + \cos 2\alpha\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$= \frac{4}{\sqrt{17}}$

$2\sin 2\alpha+2\beta\cos 2\beta = -\frac{1}{17}$

$\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = -\frac{1}{17} \mid$

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\frac{\sin 2\alpha}{\sqrt{17}} + \frac{4}{\sqrt{17}}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\cos 2\beta = -\frac{1}{17}\left(-\frac{\sqrt{17}}{1}\right)$

$\sin 2\alpha = 4\cos 2\alpha = -1 \mid \cdot\sqrt{17}$ $\sin 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}$

$= \frac{1}{-}$

$= \frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha$

t D = 206 +4. 220

= 206 + 900 = 1106 = 34²

$\frac{18}{30}$ - $\frac{3}{0}$

34

D ≤ 2

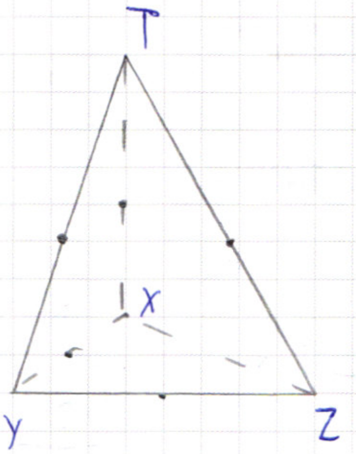
t ≤ ∞

$\times\begin{array}{r}34\\34\\\hline 136\\102\\\hline 1106\end{array}$

~~$n^2 - 16n$~~

$16n - n^2 < 70$

$n^2 - 16n + 70 \geq 0$



$18x^2 - 51x + 28$

$x = \boxed{\frac{2}{3}}$

$18 \cdot \frac{4}{9} - 51 \cdot \frac{2}{3} + 28$

$= 8 - 34 + 28$

$= \boxed{2}$

$x = \boxed{2}$

$18 \cdot 4 - 51 \cdot 2 + 28$

$= \boxed{-2}$

$y = -2 + \frac{4}{3x-2}$

$y' = 4\left(-\frac{1}{(3x-2)^2} \cdot 3\right) =$

$= -\frac{12}{(3x-2)^2}$

$x = 2$

$y = -2 + \frac{4}{4} = -2 + 1 = -1$

$x_0 = \frac{4}{3}$

$\frac{8-8}{4-2}$

$y = -\frac{12}{(3x_0-2)^2}(x - x_0) + \frac{4}{3x_0-2} - 2$

$y = -3x + b$

$b = y + 3x = -2 + 6 = 4$

$x_0 = \frac{4}{3}$

~~$y = \frac{-12x}{(3x_0-2)^2}$~~

$y = -3x + 2$

~~$y - y_0$~~ $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = k$

$y = -3x + 4$

$y = 0$

$\frac{4}{2 - \frac{2}{3}} = \frac{4}{\frac{4}{3}} = -3$

$y = kx + b$

~~$2 = \frac{2}{3}k + b \mid \cdot 3$~~

~~$6 = 2k + 3b$~~

$-\frac{12}{(3x_0-2)^2} = -3$

$y = -3x + b$ $b = y + 3x = -2 + 4 = 2$

$(3x_0 - 2)^2 = 4$

~~$b = y - 3x = -2 - 3 \cdot 2 = -8$~~

$3x_0 - 2 = \pm 2$

~~$3x_0 =$~~

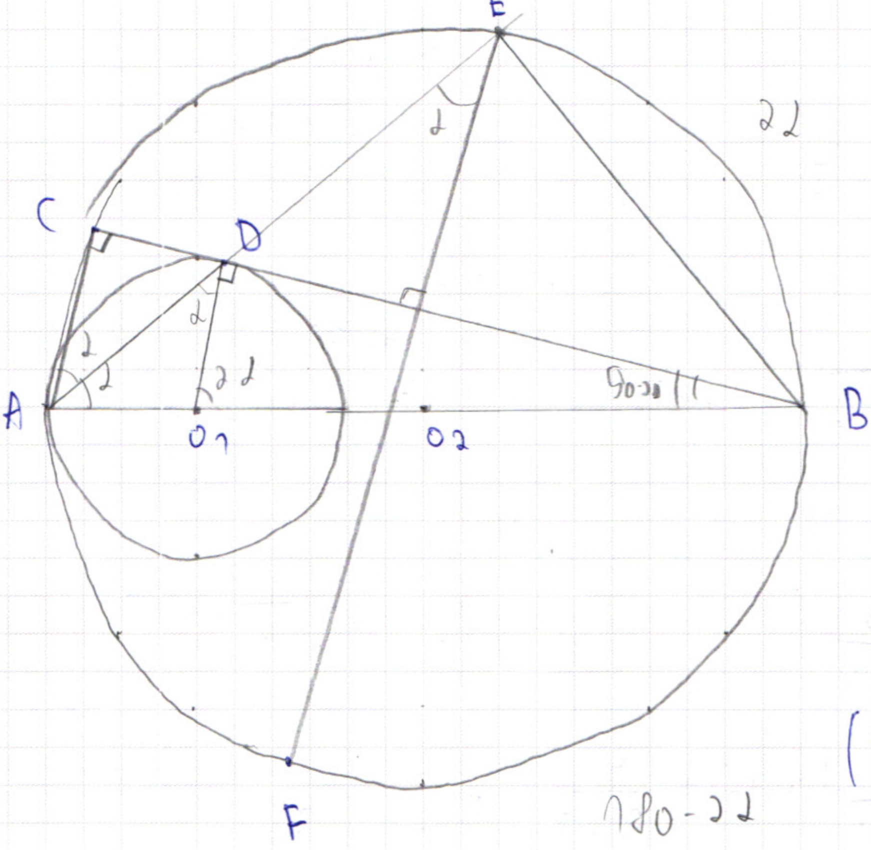
$x_0 = 0$

$y = 3x - 8$

$x_0 = \frac{4}{3}$

$y = -4$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



180-2α

$R = \frac{5\cdot 13}{2} = \frac{65}{2}$

$\frac{4R^2}{25} = 169$

$4R^2 - \frac{4R\cdot 24}{25}R = 169$

$4R^2 - 4Rr = 169$

$(2R-r)^2 = r^2 + 169$

$r = \frac{24}{25}R$

CD = 12

BD = 13

$r = \frac{25}{2}\cdot\frac{24}{25}$

$r = \frac{65}{2}\cdot\frac{24}{25}$

$= \frac{12\cdot 13}{5}$

$= \frac{156}{5}$

$\frac{2R-r}{2R} = \frac{13}{25}$

$1 - \frac{r}{2R} = \frac{13}{25}$

$\frac{r}{2R} = \frac{12}{25}$

$\frac{r}{R} = \frac{24}{25}$

⊖ $AO_1 = r$

$BO_1 = 2R - r$

0 ~~$\frac{BO_1}{AB} = \frac{BO_1}{A}$~~

$\frac{BO_1}{AB} = \frac{BD}{BC}$

МФТИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$f(5)=1$

$f(7)=1$

$f(11)=2$

$f(13)=3$

$$\boxed{\begin{array}{l} f(17)=4 \\ f(15)=4 \\ f(23)=5 \end{array}}$$

$f\left(\frac{x}{y}\right)=$

$f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right)$

$f\left(\frac{1}{y}\right)=$ ~~$f(y$~~ $1-f(y)$ ~~$f(29$~~

$=-f(y)$ $\quad f(x)-f(y)$

$f(4)=0$

$f(6)=0$

$f(8)=0$

$f(9)=0$

$f(10)=1$

~~$f($~~ $\quad f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right)$ $\quad f(20)=0$

~~$f(7)=$~~ $\quad$ ~~$f(12)=$~~

$f(1)=0$ $\quad f(14)=1$

~~$f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right)$~~ $\quad f(15)=1$

~~$f\left(\frac{y}{x}\right)=f(y)+f\left(\frac{1}{x}\right)$~~ $\quad f(16)=0$

$f\left(\frac{1}{y}\right)=1-f(y)$ $\quad f\left(\frac{1}{y}\right)=$ ~~$f(y)-1$~~ $\quad f(18)=0$

$f\left(\frac{1}{y}\right)+f(y)=1$ $\quad f(21)=1$

$f(1)=0$ $\quad f(0)$

$f(3)=0$

$f(4)=f(2)+f(2)=0$

f

~~$f(18)=$~~

f

$f\left(\frac{23}{0}\right)=f(23)+f\left(\frac{1}{0}\right)$

~~$f\left(\frac{1}{0}\right)=f(0)+f\left(\frac{1}{10}\right)$~~

~~$f(20)$~~

$f(20)=f(0)+f(\ldots)$

$=2$

$x=4$ $\quad x=4$

$y=4$ $\quad y=7$

$f(1)=0$

$f\left(\frac{4}{7}\right)=f(4)+f\left(\frac{1}{7}\right)$

$f(22)=2$ $\quad f\left(\frac{4}{7}\right)\neq 0+f\left(\frac{1}{7}\right)$

$f\left(\frac{1}{7}\right)=0$

$f(23)=8$ $\quad f(f(7))$

$f(24)=0$

$f(2[illegible])=1$

$f(26)=3$

$f(27)=0$

$f(28)=1$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$y' = 4\left(-\frac{1}{(3x-2)^2}\right)\cdot 3 = \overset{-12}{\overline{(3x-2)^2}}$ $x_0 = \frac{51}{36}$ $\frac{51^2}{36^2}\cdot 18 - 51\cdot\frac{51}{36}+28=$

$\frac{8-6x}{3x-2} = \frac{-6x+4}{3x-2} + \frac{4}{3x-2} = -2 + \frac{4}{3x-2}$

$= \frac{51^2}{2\cdot 36} - \frac{51^2}{36}+28$

$51^2\ 28 - \frac{51^2}{2\cdot 36}$

$x=1$

$y=-2$

~~$18x^2$~~

$18\cdot\frac{4}{9} - 51\cdot\frac{2}{3}+28$

$= 8 - 34+28$

$>\ \ \ = 2$

$18x^2-51x+28=0$

$D = 2601-4\cdot 18\cdot 28 -$

$-2016 =$

$= 585$

$\begin{array}{r} \times 51 \\ 51 \\ \hline 51 \\ +255 \\ \hline 2601 \end{array}$

$x=1$

$y=-2+\frac{4}{5}$

$= -1\frac{1}{5}$

$2\cdot \begin{array}{r} \times 72 \\ 28 \\ \hline 576 \\ +144 \\ \hline 2016 \end{array}$

$\frac{17-\sqrt{65}}{12} \vee \frac{2}{3} \Big| \cdot 12$

$x = \frac{51\pm 3\sqrt{65}}{36} =$

$\begin{array}{r|l} 2016 & 36 \\ -180 & 56 \\ \hline 216 & \end{array}$

$17-\sqrt{65} \overset{>}{\vee} 8$

$9 \overset{>}{\vee} \sqrt{65}$

$81 > 65$

$\frac{06}{2}$

-18

$y'=$

$= \frac{17\pm\sqrt{65}}{12}$

$x=\frac{2}{3}$

$y'=-\frac{1}{m}$

$\begin{array}{r|l} -2601 & \\ 2016 & \\ \hline 585 & 5 \\ 5 & 117 \\ \hline 08 & \\ 5 & \\ \hline 35 & \end{array}$

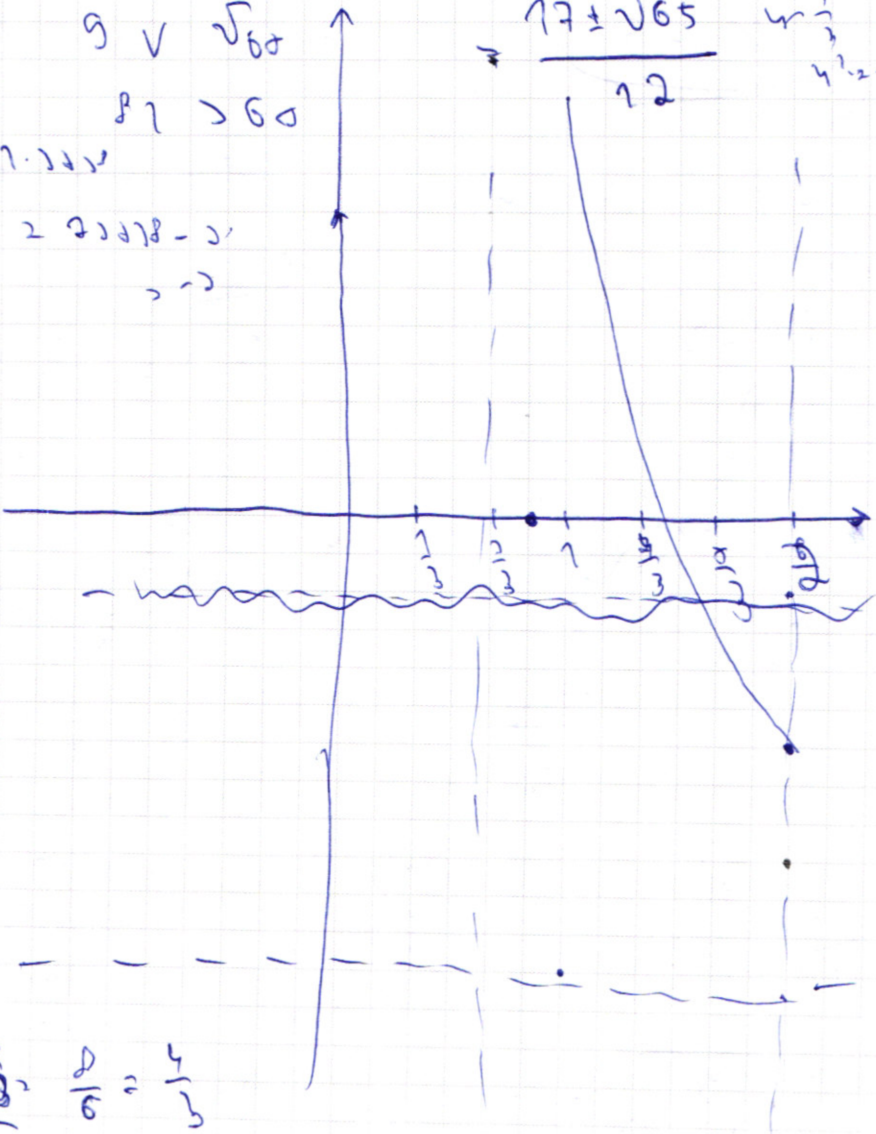
$18\cdot 4 - 51\cdot 2+28$

$= 72+28-102$

$= -2$

$\begin{array}{r|l} 117 & 9 \\ -9 & 13 \\ \hline 27 & \end{array}$

$9\cdot 13\cdot 5$



$y=-2+\frac{4}{1}$

$x=1$ $x=1$

$=2$

$y=-2+\frac{4}{4}$

$=-1$

$x=\frac{2}{3}$ $x=1$

$y=-2+\frac{4}{1}$

$y=-2+$

$2=2$

$x=1$

~~$y=-2+\frac{4}{0}$~~

$\frac{1+\frac{2}{3}}{2} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$|x^2-26x|^{\log_5 12} + 26x \geq x^2 + 13^{\log_5(26x-x^2)}$

$26x - x^2 > 0$

~~$x^2-26x=t$~~

$26x - x^2 = t \quad t>0$

~~$x^2-26x<0$~~

~~$|t|=-t$~~

~~$|t|^{\log_5 12} \geq t + 13^{\log_5(-t)}$~~

~~$t>$~~ $t<0$

~~$\log_5(t) \cdot \log_5 12 \geq \log_5 t + \log_5 13 \log_5(-t)$~~

~~$(-t)^{\log_5 12} - t \geq \log_5 t \log_5 13$~~

$t^{\log_5 12} + t \geq 13^{\log_5(t)}$

~~$\log_5(t^{\log_5 12} + t) \geq \log_5 t \log_5 13$~~

~~$t=20$~~ $t=5^p$

$5^{p \log_5 12} + 5^p \geq 13^{\log_5 5^p}$

$12^p + 5^p \geq 13^p$

~~$p \geq 2$~~ $p \geq 3$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 2.

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6} \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{x(y-6)-(y-6)} \\ 9x^2-18x+9+y^2-12y+36=90 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{(x-1)(y-6)} \\ 9(x-1)^2+(y-6)^2=90 \end{cases}$$

] $x-1=k$ и $y-6=p$ =>

$$\Rightarrow \begin{cases} x=k+1 \\ y=p+6 \end{cases} \Rightarrow y-6x=p+6-6k-6= \\ =p-6k$$

$$\begin{cases} p-6k=\sqrt{kp} \\ 9(x-1)^2+(y-6)^2=90 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p-6k=\sqrt{kp} \\ 9k^2+p^2=90 \end{cases}$$

если $kp \geq 0$ =>

$\Rightarrow (p-6k)^2=kp \Rightarrow$

$\Rightarrow p^2-12kp+36k^2=kp \Rightarrow$

~~$p^2=13kp-36k^2$~~

~~$9k^2+p^2=90$~~

~~$9k^2+13kp-36k^2=$~~

$\Rightarrow p^2-13kp+36k^2=0$ $\quad k^2\left(\frac{p^2}{k^2}-13\frac{p}{k}+36\right)=0$

$1^\circ.\ k=0 \Rightarrow p^2=0 \Rightarrow p=0$, но $9k^2+p^2=90\neq 0 \Rightarrow \varnothing$

$2^\circ.\ \left(\frac{p}{k}\right)^2-13\cdot\frac{p}{k}+36=0$

$\exists\ \frac{p}{k}=t \Rightarrow$

$\Rightarrow t^2-13t+36=0$

$D=169-4\cdot 36=169-144=25=5^2$

$t=\frac{13\pm 5}{2}=9;\ 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} p=9k \\ p=4k \end{array}\right.$ при том $kp\geq 0$

~~[illegible] k p ≥ 0~~

$9k^2+p^2=90$

$\left[\begin{array}{l} 9k^2+(9k)^2=90 \\ 9k^2+(4k)^2=90 \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} 9k^2+81k^2=90 \\ 9k^2+16k^2=90 \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} k^2=1 \\ k^2=\frac{90}{25} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} k=\pm 1 \\ k=\pm\frac{3\sqrt{10}}{5} \end{array}\right. \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} k=1 \\ p=9 \end{cases} \\ \begin{cases} k=-1 \\ p=-9 \end{cases} \\ \begin{cases} k=\frac{3\sqrt{10}}{5} \\ p=\frac{12\sqrt{10}}{5} \end{cases} \\ \begin{cases} k=-\frac{3\sqrt{10}}{5} \\ p=-\frac{12\sqrt{10}}{5} \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow$

$x=2$

$y=15$

$x=0$

$y=-3$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)