МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}, \\ x^2+9y^2-4x-18y=12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geqslant \left|x^2+18x\right|^{\log_{12}13}-18x.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=8$, $BD=17$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1\leqslant x\leqslant 24$, $1\leqslant y\leqslant 24$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x+11}{4x+3}\leqslant ax+b\leqslant -8x^2-30x-17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4};-\frac{3}{4}\right)$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB=1$, $BD=2$, $CD=3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задание №2.

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y=\sqrt{(x-2)(y-1)} \\ (x-2)^2+9(y-1)^2=25. \end{cases}$$

Пусть $x-2=a$, $y-1=b$; $x-2y=a-2b$

$$\Rightarrow \begin{cases} a-2b=\sqrt{ab} \\ a^2+9b^2=25 \quad \text{II} \end{cases}$$

УВК: $\underline{a-2b\geq 0}$ $\Rightarrow$ $\underline{a\geq 2b}$

$$\begin{cases} a^2-4ab+4b^2=ab \\ a^2+9b^2=25 \end{cases} \qquad \begin{cases} a^2-5ab+4b^2=0 \\ a^2+9b^2=25. \end{cases} \Big| \,_{4}-{}^{4}$$

$$5b^2+5ab=25$$

Подставим III во II ур:

$$ab=5-b^2 \quad (b\neq 0)$$

$$a=\frac{5-b^2}{b}. \quad (\text{III})$$

$$\frac{25-10b^2+b^4}{b^2}+9b^2=25$$

$$25-10b^2+b^4+9b^4=25b^2$$

$$10b^4-35b^2+25=0$$

$$2b^4-7b^2+5=0$$

$$b_1^2=1 \qquad b_2^2=2,5$$

$\underline{b_1=1}$ $b_2=-1$ $\qquad b_3=-5\sqrt{0,1}$ $\qquad b_4=5\sqrt{0,1}$

$\underline{a_1=4}$ | $a_2=-4$ не удв УВК. | $a_3=-5\sqrt{0,1}$ не удв УВК. | $a_4=5\sqrt{0,1}$ не удв УВК.

$$\begin{cases} y-1=1 \\ x-2=4 \end{cases} \quad \begin{cases} y=2 \\ x=6 \end{cases}$$

Ответ: $(6;2)$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Задача №1

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt5} \qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin2\alpha=-\frac{4}{5}$$

$$\sin2\alpha\cdot\cancel{\cos}\cos4\beta+\cos2\alpha\cdot\sin4\beta+\sin2\alpha=-\frac{4}{5}.$$

$$\sin2\alpha(\cos4\beta-1)+2\cos2\alpha\cdot\cos2\beta\cdot\sin2\beta=-\frac{4}{5}.$$

$$\sin2\alpha\cdot2\cdot\cos^2 2\beta+2\cos2\alpha\cdot\cos2\beta\cdot\sin2\beta=-\frac{4}{5}.$$

$$2\cos2\beta(\sin2\alpha\cdot\cos2\beta+\cos\cdot2\alpha\cdot\sin2\beta)=-\frac{4}{5}.$$

$$2\cos2\beta\cdot\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{4}{5}.$$

$$\cos2\beta\cdot-\frac{1}{\sqrt5}=-\frac{2}{5}$$

$$\cos2\beta=\frac{2}{\sqrt5}$$

$$\Rightarrow \sin2\beta=\pm\frac{1}{\sqrt5}$$

$$\left[\begin{aligned}&\frac{2}{\sqrt5}\sin2\alpha+\frac{1}{\sqrt5}\cos2\alpha=-\frac{1}{\sqrt5}\\&\frac{2}{\sqrt5}\sin2\alpha-\frac{1}{\sqrt5}\cos2\alpha=-\frac{1}{\sqrt5}\end{aligned}\right.$$

$$\left[\begin{aligned}&2\sin2\alpha+\cos2\alpha=-1\\&2\sin2\alpha-1\cdot\cos2\alpha=-1\end{aligned}\right.$$

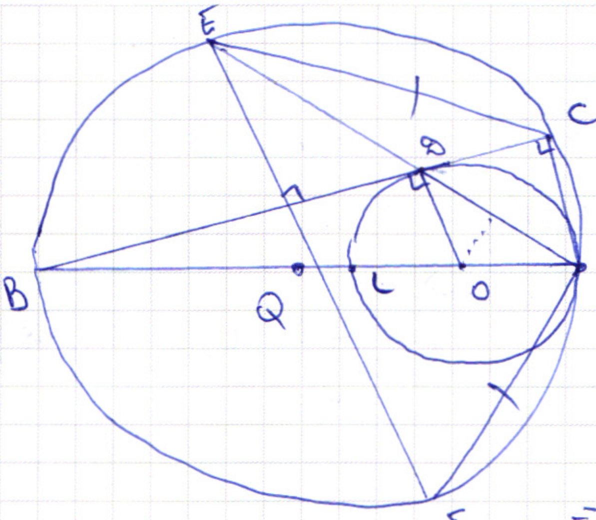
$$\left[\begin{aligned}&4\cos\alpha\cdot\sin\alpha+2\cos^2\alpha=0\\&4\cos\alpha\cdot\sin\alpha+2\sin^2\alpha=0\end{aligned}\right.$$

$$\left[\begin{aligned}&2\cos\alpha(2\sin\alpha+\cos\alpha)=0\\&2\sin\alpha(2\cos\alpha+\sin\alpha)=0\end{aligned}\right.$$

$$\left[\begin{aligned}&\cos\alpha=0\\&\sin\alpha=0\\&2\sin\alpha+\cos\alpha=0\\&2\cos\alpha+\sin\alpha=0\end{aligned}\right. \Rightarrow \left[\begin{aligned}&\varnothing\\&\operatorname{tg}\alpha=0\\&\operatorname{tg}\alpha=-\frac{1}{2}\\&\operatorname{tg}\alpha=-2\end{aligned}\right.$$

Ответ: $0; -\frac{1}{2}; -2.$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



Задача №4

1) $BD = 17$ $\quad CD = 8$

$AO = r$; $QA = R$.

$BD^2 = BL \cdot BA = (2R - 2r) \cdot 2R$

(теорема о ~~св-во~~ касат.)

$\angle ACB = 90^\circ$ (т.к впис, AB − диаметр)

$\Rightarrow \triangle OBD \sim \triangle ABC \Rightarrow$

$$\frac{OD}{AC} = \frac{BO}{AB} = \frac{BD}{BC} \Rightarrow$$

$$\frac{r}{AC} = \frac{2R - r}{2R} = \frac{17}{25}.$$

$50R - 25r = 34R$

$16R = 25r$

$R = \frac{25}{16} r$ и $r = \frac{16}{25} R$

Из т. о касат.

$289 = 4R^2 - 4r \cdot R$.

$289 = 4R\left(R - \frac{16}{25}R\right)$

$\frac{289}{4} = \frac{9}{25}R^2$

$R = \frac{17}{2} \cdot \frac{5}{3} = \frac{85}{6}$

$r = \frac{85}{6} \cdot \frac{16}{25} = \frac{8 \cdot 17}{15} = \frac{136}{15}$

2) $\angle AFE = \angle FEC$ ($EF \parallel AC \Rightarrow AFEC$ − трапеция $\Rightarrow$ тр впис в окр $\Rightarrow EC = AF$ и $\angle CEF = \angle AFE$)

$\angle ECB = 90^\circ - \angle \cancel{A}CEF = EAB$ (вписанные)

$$\cos \angle EAB = \frac{\frac{1}{2}AD}{OA}.$$

$AD^2 = AC^2 + DC^2$; $AC = \frac{25}{17} \cdot OD = \frac{25}{17} \cdot \frac{136}{15} = \frac{\overset{5}{\cancel{25}} \cdot 8}{\cancel{5} \cdot 3} = \frac{40}{3}$

$AD = \sqrt{\frac{8^2 \cdot 5^2}{9} + 8^2} = 8\sqrt{\frac{25}{9} + 1} = \frac{8}{3}\sqrt{34}$

$\cos \angle EAB = \frac{\overset{4}{\cancel{8}}}{3}\sqrt{34} \cdot \frac{\overset{5}{\cancel{15}}}{\underset{2}{\cancel{8}} \cdot 17} = \frac{5\sqrt{34}}{34} = \frac{5}{\sqrt{34}} \Rightarrow \angle AFE = \frac{\pi}{2} - \arccos\frac{5}{\sqrt{34}}$

Задание №3

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13} - 18x$$

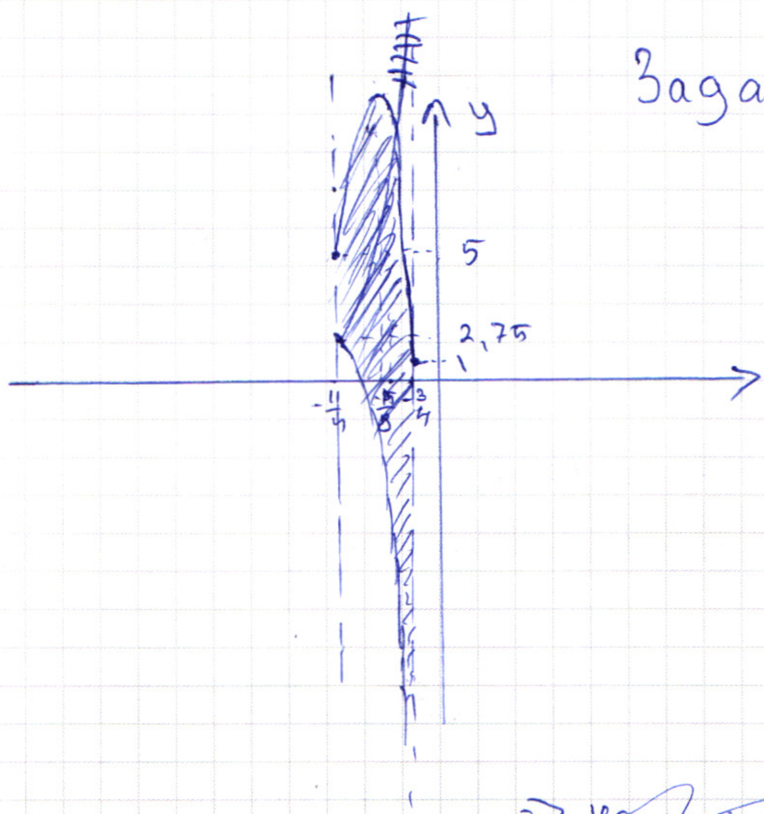
$x^2+18x = t, \quad t>0$

$$5^{\log_5 t} + t \geq t^{\log_{12}13}$$

если $t \leq 1$, то $t \geq t^{\log_{12}13}$ т.к. $\log_{12}13 > 1$.

$\Rightarrow$ $0 < t \leq 1$ – удв неравенству

$$\begin{cases} x^2+18x>0 \\ x^2+18x \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; -18) \cup (0; +\infty) \\ x \in [-9-\sqrt{82}; -9+\sqrt{82}] \end{cases} \Rightarrow x \in [-9-\sqrt{82}; -18)$$



Задание №6.

$y = ax+6$ – прямая

$f_2(x) = -8x^2 - 30x - 17$

$x_в = -\frac{15}{8}$

$y_в = +\frac{79}{4}$

$f_1(x) = \frac{12x+11}{4x+3} = 3 - \frac{2}{4x+3}$

$f_1(-\frac{11}{4}) = 2,75.$

$f_2(-\frac{11}{4}) = 5$

~~$\Rightarrow$ нам удв прямые, проходящие в закр. области через т. $(\frac{11}{4}; 5)$~~

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задание №5

Запишем $f(n)$, где для $n \in N$ и $n \in [1; 24]$

$f(1)=0$
$f(2)=0$
$f(3)=0$
$f(4)=0$ $(=f(2)+f(2))$
$f(5)=1$
$f(6)=0$ $(f(2)+f(3))$
$f(7)=1$
$f(8)=0$
$f(9)=0$
$f(10)=1$
$f(11)=2$
$f(12)=0$
$f(13)=3$
$f(14)=1$
$f(15)=1$
$f(16)=0$
$f(17)=4$
$f(18)=0$
$f(19)=4$
$f(20)=1$
$f(21)=1$
$f(22)=2$
$f(23)=5$
$f(24)=0$

~~если~~ Воспользуемся $f(p)=[p/4]$ или $f(a\cdot b)=f(a)+f(b)$

$\Rightarrow$ при $n\in[1;24]$ $f(x)=0$ 11 раз

$f(x)=1$ – 7 раз
$f(x)=2$ 2 раза
$f(x)=3$ 1 раз
$f(x)=4$ 2 раза
$f(x)=5$ 1 раз

Заметим, что $f\left(\frac{1}{n}\right)=-f(n)$, где $n\in N$ $\left(f\left(\frac{a}{a}\right)=f(a)+f\left(\frac{1}{a}\right)\right.$
$f\left(\frac{a}{a}\right)=0$; $\Rightarrow f\left(\frac{1}{a}\right)=-f(a)$)

Тогда справедливо:
$f(x/y)=f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right)=f(x)-f(y)$, где x и $y\in N$

$f(x/y)<0 \iff f(x)<f(y)$

Тогда $K_{\text{пар}} = 11\cdot(\overset{13}{24-11}) + 7\cdot(\overset{6}{24-11-7}) + 2\cdot(6-2)+1\cdot 3+2\cdot 1 = 198$

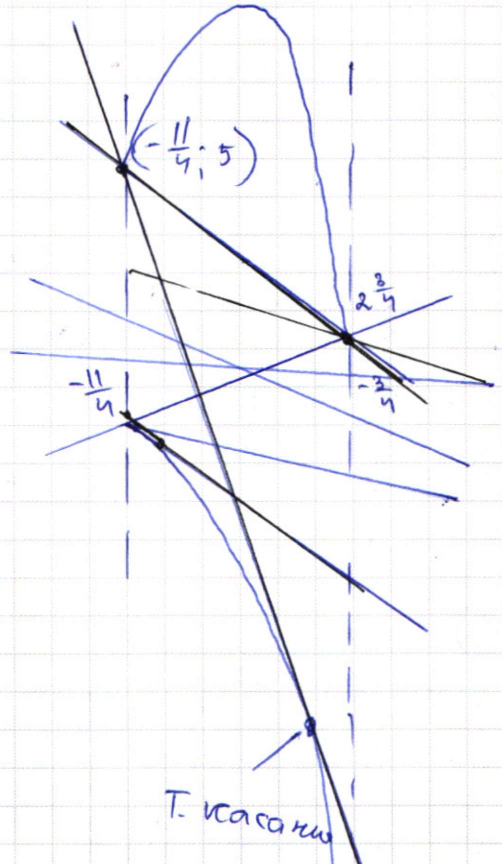
Ответ: 198

Задание №6
(продолжение)

~~Нам~~ у Нам нужны прямые, которые проходят в закрашенной области

Чтобы их найти достаточно двух точек ~~для~~ для $x_1 = -\frac{11}{4}$ $y_1 \in [2,75; 5]$ для ~~$x_2 = -\frac{3}{4}$ $y_2 \in [$~~ второй точки касания координатами являются ~~либо точка~~, либо одна из точек на прямой ~~x~~ $= -\frac{3}{4}$, либо т. касания с гиперболой

достаточно рассмотреть крайние ~~а~~ случаи для нахождения а и в



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

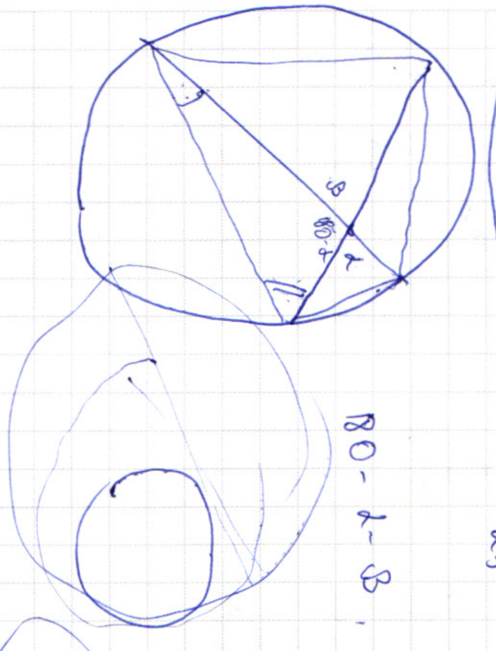
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

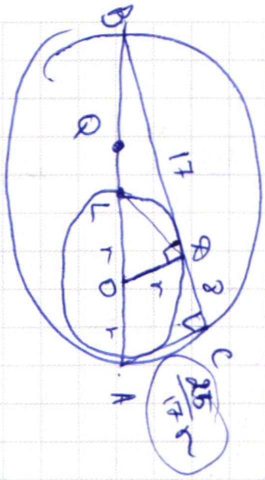
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

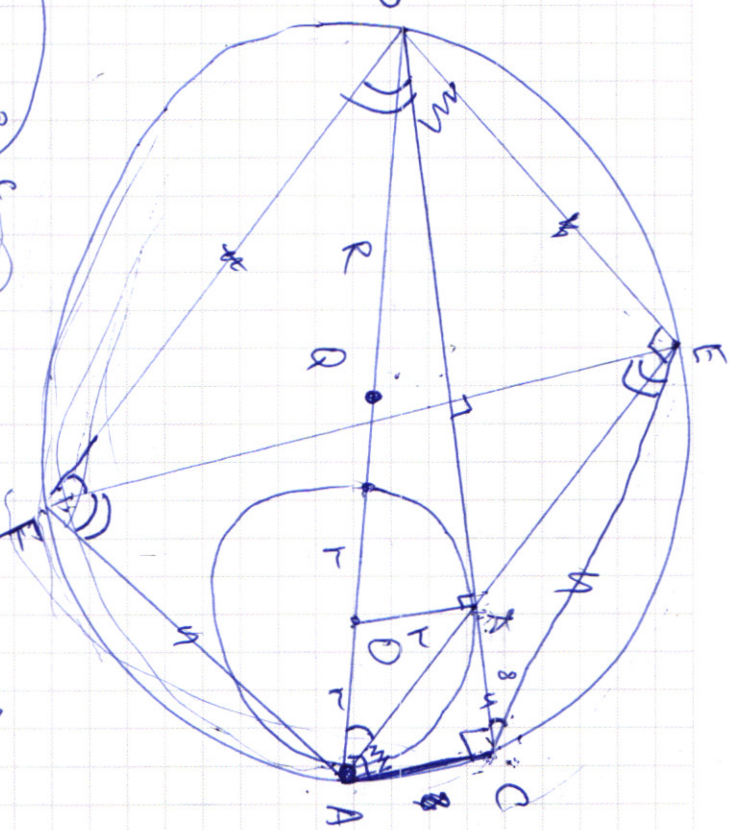
ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА







$BD = 17$

$CD = 8$

$BD^2 = (2R - 2r)\cdot 2R$

$\frac{EC}{BF} = \frac{CF}{BF}$. $EC = AF$

$\cup EC + \cup BF = \cup BF + \cup AF$

$\Rightarrow \cup EC = \cup AF$.

$\Rightarrow EC = AF$.

$tg\, \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$.

$\sin 2\alpha \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}} \cos 2\alpha = -1$

$2\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1$

$\sin\left(2\alpha + \left(\arccos \frac{2}{\sqrt{5}}\right)\right) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$25^2 + \left(\frac{25}{17}\right)^2 r^2 = 4R^2$

$25^2 = 2R\cdot(2R - 2r) = 4R^2 - 4Rr$.

$180 - \alpha - \beta$

$\frac{17}{25}$ 25

3 +

$\frac{2}{4x+3}$

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$f_1(x) = \frac{12x+11}{4x+3}$ $\frac{\vartheta(x)}{u(x)} = \frac{\vartheta' u x - \vartheta u'}{u^2}$

$f_1'(x) = \frac{(12x+11)'(4x+3) - (12x+11)(4x+3)'}{(4x+3)^2}$

$12\cdot(4x+3) - 4(12x+11) =$

$\cancel{48}\,x + 36 - 48x - 44$

-8

$\frac{11}{3}$

$\frac{-12+11}{-1} = 1$

$(12x+11)'(4x+3)$

$\frac{12x+11}{4x+3} = \frac{12x+9+2}{4x+3} =$

$3 + \frac{2}{4x+3}$

$-8x^2 - 30x - 17$

$x_в = -\frac{30}{16} = -\frac{15}{8}$ – мак.

$x_{min} = -\frac{11}{4}$ $-\frac{7,5}{4}$

$\left(\frac{2}{4x+3}\right)' = \frac{1}{4x+3}$

-11 $-7,5$ -3

$\left(\frac{1}{4x+3}\right)' =$

$-\frac{11}{4}$ – min

$ax + b \le -8x^2 - 30x - 17$

$8x^2 + (30+a)x + 17 + b \le 0$

$x_в =$

$-\frac{11}{4}$ $-\frac{3}{4}$

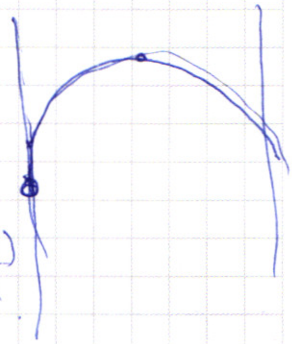
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$f(2) = f(1) + f(2)$

$17^2 = 2R \cdot (2R - 2r) = 4R^2 - 4Rr.$

$2f(2) = f(1)$

$25^2 + \left(\frac{25}{17}\right)^2 r^2 = 4R^2.$



$$\begin{cases} 625 + \frac{625}{289} r^2 = 4R^2 \\ 289 = 4R^2 - 4Rr \end{cases}$$

$f(2) = \frac{f(1)}{2}$

$625 - 289 + \frac{625}{289} r^2 = \; = 4Rr$

346

$\frac{625}{289}$

336

$R = \dfrac{\frac{625}{289} r^2 + 336}{4r.} = \dfrac{625 r}{289 \cdot 4} + \dfrac{336}{4r}$

$\frac{625}{289 \cdot 4} r + \frac{84}{r}$

$\frac{17}{25} = \frac{r}{x} \Rightarrow x = \frac{25r}{17}.$

$f(p) = [p/n]$

$$\begin{cases} \left(\frac{25r}{17}\right)^2 + 25^2 = 4R^2 \\ 289 = 2R \cdot (2R - 2r) = 4R^2 - 4Rr \end{cases}$$

$f(p) = f(p) + f(1)$

$f(1) = 0$

$\frac{625}{289} r^2 + 625 = 4R^2$

$289 = 4R^2 - 4Rr$

$f(a) + f(b) =$

$f(a) + f\left(\frac{1}{b}\right)$

$\frac{1}{b}.$

$34R = 50R - 25r$

$25r = \cancel{50} \cancel{-16}$ $16R$.

$289 = 4R^2 - 4R \cdot \frac{16}{25}R$.

$289 = 4\left(R^2 - \frac{16}{25}R\right)$

$\frac{289}{4} = \frac{9}{25}R$

$\frac{\cancel{16}^{8}}{\cancel{25}_{5}} \cdot \frac{\cancel{85}^{17}}{\cancel{6}_{3}} =$

$\frac{17^2}{2^2} \cdot \frac{5^2}{3^2}$

$\frac{\cancel{85}^{17}}{\cancel{6}_{2}} \cdot \frac{\cancel{3}}{\cancel{5}}$

$\frac{8 \cdot 17}{15}$

$80 + 56 = 136$

$\frac{\cancel{25}^{5}}{\cancel{17}} \cdot \frac{8 \cdot \cancel{17}}{\cancel{15}_{3}} =$

$\frac{40}{3}$

$\sqrt{8^2 + \cancel{40} \frac{5^2 \cdot 8^2}{3^2}}$

$8 \cdot \sqrt{1 + \frac{25}{9}}$

$\frac{4}{3}\sqrt{34}$

$\frac{34}{9} = \frac{8}{3}\sqrt{34}$

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{(y-1)(x-2)} \\ (x-2)^2+9(y-1)^2=25. \end{cases}$$

$(x-2y)^2=(y-1)(x-2)$ $\quad x-2y\geq 0 \Rightarrow x\geq 2y$

$\cancel{2a}$

$a=x-2.$

$2b=2y-2.$

$a-2b=x-2-2y+2=x-2y$

$\cancel{a^2+9b^2\geq 25}$ $\quad a\geq 2b$

$$\begin{cases} a-2b=\sqrt{ab} \\ a^2+9b^2=25 \end{cases}$$

$6(a-2b)^2=6ab$

$a^2-4ab+4b^2=ab.$

$(a+3b)^2=25+6(a-2b)^2.$

$$\begin{cases} a^2-5ab+4b^2=0 \\ a^2+9b^2=25. \end{cases}$$

$5b^2+5ab=25.$

$b^2+ab=5.$

$a=\dfrac{5-b^2}{b}.$

$\dfrac{5-b^2}{b}-2b=\sqrt{5-b^2}$

$\dfrac{5-b^2-2b^2}{b}=\sqrt{5-b^2}.$

$\dfrac{5-3b^2}{b}=\sqrt{5-b^2}.$

$\dfrac{\quad}{b^2}\quad 5-b^2$

$\dfrac{(5-b^2)^2}{b^2}+9b^2=25.$

$b^2=t,\ t\geq 0$

$\dfrac{25-10t+t^2+9t^2}{t}=25.$

$$\frac{25-10b+b^2}{b^2}+9b^2=25.$$

22

$\cancel{25}$

27

$5\sqrt{0,1}$

33

$a\geq,$

$\frac{4}{1}$

$$\frac{2,5}{-5\sqrt{0,1}}=-\frac{0,5}{\sqrt{0,1}}=-\frac{0,5\sqrt{0,1}}{0,1}=-5-\sqrt{0,1}.$$

$$\frac{\cancel{5}}{2}\cdot\frac{1}{-\cancel{5}\sqrt{0,1}}=-\frac{1\sqrt{0,1}}{2\;0,1}=-5\sqrt{0,1}$$

$$\frac{\cancel{5}}{2}.=\cancel{5}\sqrt{0,1}.$$

$$\frac{1}{2\sqrt{0,1}}$$

$$\frac{\sqrt{0,1}}{0,2}\qquad\frac{10\sqrt{0,1}}{2}$$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$0 = f(a) + f\left(\frac{1}{a}\right)$

$f\left(\frac{1}{a}\right) = 0 - f(a) \Rightarrow f\left(\frac{1}{a}\right) = -f(a)$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) = f(x) - f(y)$

$f(x) < f(y)$

$\cdot \quad 11 \cdot (24-11) + 7 \cdot (24-11-7) + 2 \cdot (24-11-7-2)$

$\overset{143}{11 \cdot 13} + 7 \cdot 6 + 2 \cdot 4 + 3 + 2.$

$\times \begin{array}{r} 13 \\ 11 \\ \hline 13 \\ 13 \\ \hline 143 \end{array}$ $\quad \times \begin{array}{r} 13 \\ 1\cancel{0} \\ \hline 13 \\ 13 \end{array}$

$143 + 42 + \underbrace{8 + 3 + 2}_{13}.$

$55.$

$3 + \frac{2}{\cancel{4}x + 3}$

$3 \quad \frac{2}{-11 + 3}$

$\Rightarrow \left[-9 - \sqrt{82}; +8\right)$

$143 + 55 = 198 \quad 3 + -\frac{1}{4}$

$\begin{cases} x^2 + 18x > 0 \\ x^2 + 18x \leq 1 \end{cases}$

$2\frac{3}{4}$

$\frac{79}{\cancel{79}} \; 4$

$\begin{cases} x \in (-\infty; -18;) \cup (0; +\infty) \\ \end{cases}$

$x^2 + 18x - 1 \leq 0$

$D_1 = 81 + 1 = 82.$

$-9 + \sqrt{82}$

$x^2 + 18x - 1 \leq 0$

$D_1 = 81 + \cancel{82}1 = 163$

☐ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

-15
11
15
15

$-\cancel{8}\cdot\frac{11^2}{\cancel{16}_2}+\cancel{30}^{15}\cdot\frac{11}{\cancel{4}_2}-17.$

$-\frac{121}{2}+\frac{165}{2}-17.$

44

$22-17=5.$

$-\cancel{8}\cdot\frac{9}{\cancel{16}_2}+\cancel{30}^{15}\cdot\frac{3}{\cancel{4}}-17.$

$\begin{cases} 5=-\frac{11}{4}a+6 \\ 2{,}75=-\frac{3}{4}a+6. \end{cases}$

$-\frac{9}{2}+\frac{45}{2}-17=$

$\overline{33}$

$\frac{36}{2}=18$

$-\cancel{8}\cdot\frac{9}{\cancel{16}_2}+\cancel{30}^{15}\cdot\frac{3}{\cancel{4}}-17$ $\quad \frac{45}{2}$

$8 \cdot 3=11$

16

17

$-\frac{9}{2}+\frac{45}{2}-17=$

$\frac{36}{2}=18$

$y=3+\frac{2}{4x+3}$

$\frac{2}{-8+3}$ $\quad \frac{2}{-6+3}$

$-\frac{3}{4}$ $\quad -2$ $\quad -3$

$-\frac{2}{5}$ $\quad -\frac{2}{3}$

☐ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

МФТИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$17^2 = 4R^2 - 4Rr$

$$r = \frac{4R^2 - 17^2}{4R} = R - \frac{17^2}{4R}$$

$\cancel{r^2} + 17^2 = (2R - r)^2 = 4R^2 - 4Rr \cancel{+r^2}$

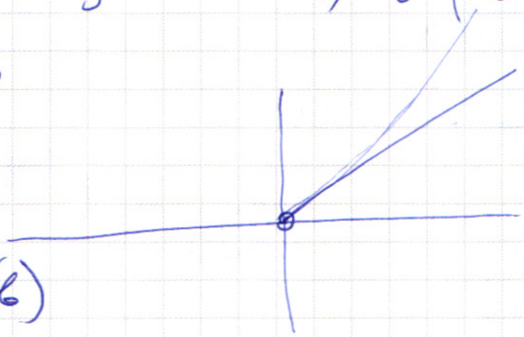
$\boxed{t + 5^{\log_{12} t} \qquad t^{\log_{12} 13}}$ $17^2 = 4R^2 - 4Rr$

$\log_{12} 13 - 1 = \log_{12} \frac{13}{12}$

$t > 1$

$5^{\log_{12} t} \geq t\left(t^{\log_{12} \frac{13}{12}} - 1\right)$

$12 + 5 \qquad 13$



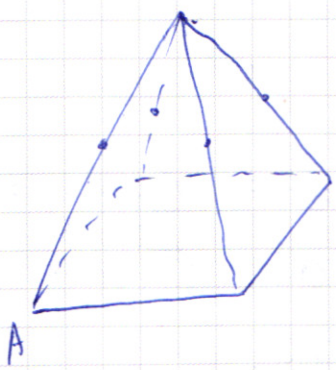
$f(ab) = f(a) + f(b)$

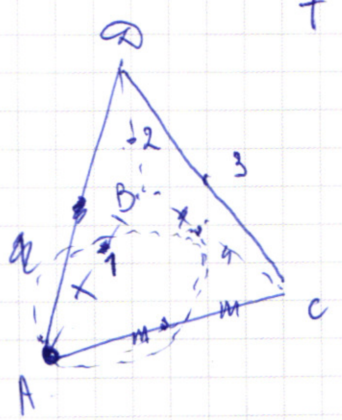
$f(p) = [p/4]$

$x \; ; \; y.$

$f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$

$f\left(x \cdot \frac{1}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$

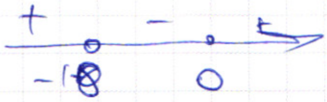




$$5^{\log_{12} t} + t \geqslant t^{\log_{12} 13} \quad \Big| \, t > 0$$

$x^2 + 18x > 0$

$x(x+18) > 0$



$$5^{\log_{12} t} + t - t^{\log_{12} 13} \geqslant 0.$$

$t \leq$

$t < 1.$

$$t \geqslant t^{\log_{12} 13}$$

$0 < t \leq 1$

$0{,}8^2.$

$$5^{\log_{12} t} \geqslant t^{\log_{12} 13} - t.$$

$\Rightarrow t \leq 1$ удв усл.

$$5^{\log_{12} t} \geqslant t\left(t^{\log_{12} \frac{13}{12}} - 1\right)$$

$t > 1.$ $\log_{12} t.$

$$5^{\log_{12} t} + t \geqslant t^{\log_{12} 13} \text{ Если}$$

$\log_a x = \log_a$

ln

$a^x = \ln a \cdot a^x.$

$t \geqslant 13$

log

$$t \quad t^{\log_{12} 13} - 5^{\log_{12} t}.$$

ln.

$$\log_{12} 12^{5^{\log_{12} t}} + \log_{12} 12^t - \ldots$$

$$f(t) = 5^{\log_{12} t} - t^{\log_{12} 13} + t.$$

$$f'(t) = \qquad - \qquad + 1$$

$2^{3^2} = 2^9$

8^2

$e^x = \ln e \cdot e^x.$

$a^x = \overset{1}{\ln a} \cdot e^x$

$\log_a x =$

$\ln x =$

№1

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$ $\qquad$ $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin2\alpha = -\frac{4}{5}$

$\sin2\alpha\cdot\cos2\beta + \sin2\beta\cdot\cos2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin2\alpha\cdot\cos4\beta +$

$\sin4\beta\cdot\cos2\alpha + \sin2\alpha = -\frac{4}{5}$

$\sin2\alpha(\cos4\beta+1)+\dots$

$\sin2\alpha(2\cos^2 2\beta \cancel{-1} \cancel{+1}) + 2\sin2\beta\cos2\beta\cos2\alpha = -\frac{4}{5}$

$2\cos2\beta(\sin2\alpha\cdot\cos2\beta + \sin2\beta\cdot\cos2\alpha) = -\frac{4}{5}$

$2\cos2\beta + \frac{1}{\sqrt5} = +\frac{4}{5}$

$\cos2\beta = \frac{2}{5}\sqrt5 = \frac{2}{\sqrt5}$

$r = \frac{4R^2 - BD^2}{4R}$

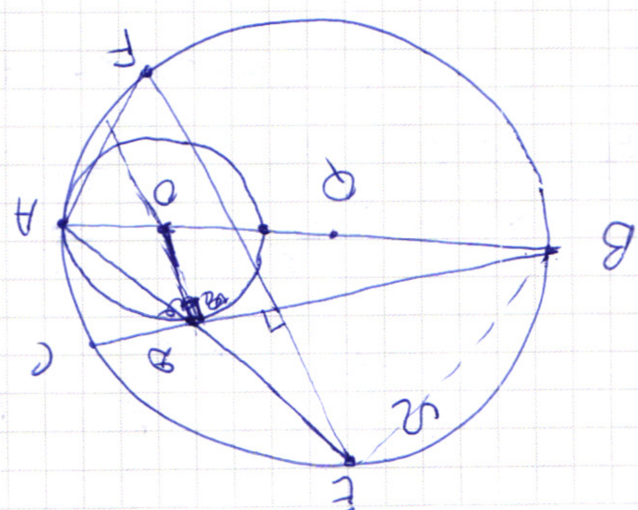
$4Rr = 4R^2 - BD^2$

$BD^2 = 4R^2 - 4Rr$

$BD^2 = (2R-2r)(2R)$

$BD = 12$

$CD = 8$



$x(y-1)-2(y-1)$

$(y-1)(x-2)$

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2+9y^2-4x-18y=12. \end{cases}$$

$(x-2)^2-4+(9y^2-18y+9)-9=12.$

$(x-2)^2+(3y-3)^2=25.$

$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2+18x \geqslant |x^2+18x|^{\log_{12}13}$

$x^2+18x=t$, $t>0$ из ОДЗ $\Rightarrow$

$5^{\log_{12}t}+t \geqslant |t|^{\log_{12}13}$

$5^{\log_{12}t}+\cancel{t} \geqslant t^{\log_{12}13}-t$

$\cancel{\log_{12}12}$ $\quad \underbrace{5^{\log_{12}t}}_{>0} \geqslant \underbrace{t}_{>0}\left(\underbrace{t^{\log_{12}13-1}-1}_{>0}\right)$

$\log_{12}13-1>0$

$\Rightarrow$ если $t\leq 1$

$t^{\log_{12}13-1}\leq 1$

$\Rightarrow 0<t\leq 1$

если $t>1.$

$\begin{cases} \sin 2\alpha+2\cos 2\alpha=-1 \end{cases}$

$$\begin{cases} \sin 2\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt5}+\frac{2}{\sqrt5}\cdot\cos 2\alpha=-\frac{1}{\sqrt5}. \\ \sin 2\alpha\cdot-\frac{1}{\sqrt5}+\frac{2}{\sqrt5}\cdot\cos 2\alpha=-\frac{1}{\sqrt5} \end{cases}$$

$\frac{1}{\sqrt5}=\frac{\cancel{4}}{5}-1$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$f(1) = 0.$

$f(2) = 0$

$f(3) = 0$

$f(5) = 1$

$f(7) = 1$

$f(11) = 2$

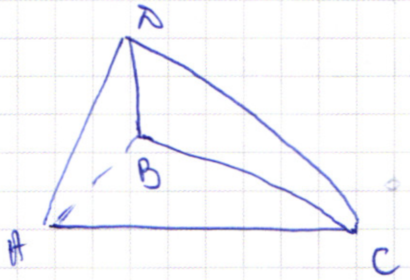
$f(13) = 3$

~~$f(15) = 3$~~

$f(17) = 4$

$f(19) = 4$

$f(23) = 5.$



$f(4) = 0$

$f(6) = 0$

$f(8) = 0$

$f(9) = 0$

$f(10) = 1$

$f(12) = 0$

$f(14) = 1$

$f(15) = 1$

$f(16) = 0$

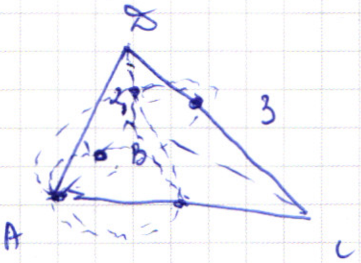
$f(18) = 0$

$f(20) = 1$

$f(22) = 2$

$f(24) = 0$

$f(25) = 2$



$\frac{1}{3}.$

$\frac{1}{\frac{1}{3}} =$

$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}$

$x > y$

$y + t \quad = 1 + \frac{t}{y}.$

$\frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \qquad 2^{-1}$

$\sqrt{a}. \qquad \frac{1}{4}$

$f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$

$\frac{3}{3} = 3 \cdot \frac{1}{3}$

$\frac{1}{y} < 1.$

$f(0) =$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = 0 +$

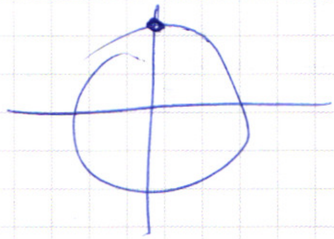
$0 =$

$$\left[\begin{array}{l} 2\sin 2\alpha + 2\cos 2\alpha = -1 \\ 2\sin 2\alpha - 2\cos 2\alpha = -1 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} 4\sin\alpha\cdot\cos\alpha + 2\cos^2\alpha = 0 \\ 4\sin\alpha\cdot\cos\alpha + 2\sin^2\alpha = 0 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} 2\cos\alpha\,(2\sin\alpha + \cos\alpha) = 0 \\ 2\sin\alpha\,(2\cos\alpha + \sin\alpha) = 0 \end{array}\right.$$

$\frac{\pi}{2}+$

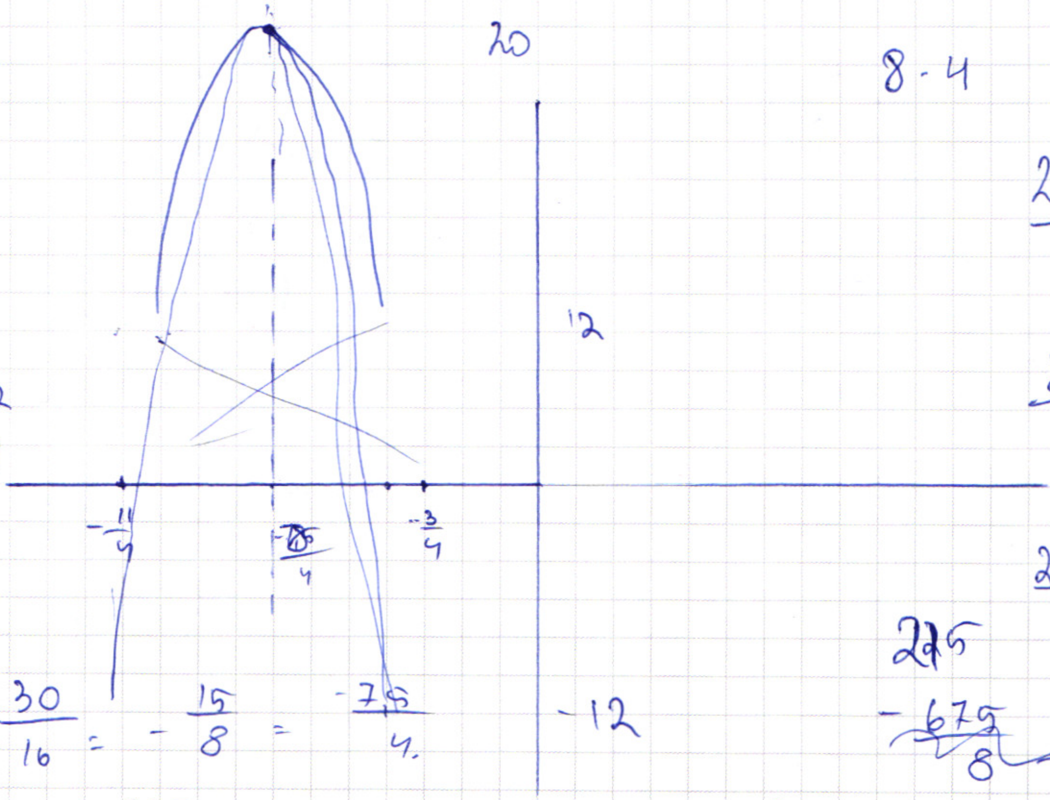


$2\,tg\,a = -1$

$2 + tg\,\alpha = 0$

$\frac{6}{8}$ $\frac{15}{8}$ $\frac{22}{8}$

$\frac{14}{8}$



$8\cdot 4$

$\frac{79}{8} \approx 20$

$\frac{215-136}{8} = \frac{79}{8}$

$\frac{215-17\cdot 8}{8}$

$\frac{215}{8} - 17$ $\frac{79}{8}$

225

$-\frac{675}{8} - 17$

$-x_в = -\frac{30}{16} = -\frac{15}{8} = -\frac{7.5}{4}$

$y_в \quad -8\cdot\frac{225}{64} + 30\cdot\frac{15}{8} - 17 = \frac{-225+450}{8} - 17$

☐ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)