МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{8}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2}, \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x \geqslant |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{5}{2}$, $BD=\frac{13}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $3\leqslant x\leqslant 27$, $3\leqslant y\leqslant 27$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{4x-3}{2x-2}\geqslant ax+b\geqslant 8x^2-34x+30$$

выполнено для всех x на промежутке $(1;3]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $PQRS$, вершина P которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра PQ. Известно, что $QR=2$, $QS=1$, $PS=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра RS. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1 $\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{8}{17}. \end{cases}$

~~На~~ $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = 2\sin\frac{(2\alpha+4\beta)+2\alpha}{2}\times$

$\times\cos\frac{(2\alpha+4\beta)-2\alpha}{2} = 2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta = -\frac{8}{17}$

Но $\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

Тогда $-2\cdot\frac{1}{\sqrt{17}}\cos 2\beta = -\frac{8}{17}.$

$\cos 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}} \Rightarrow \sin 2\beta = \pm\sqrt{1-\cos^2 2\beta} = \pm\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \cos 2\alpha\cdot\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$2\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\frac{4}{\sqrt{17}} + (2\cos^2\alpha-1)\left(\pm\frac{1}{\sqrt{17}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$8\sin\alpha\cos\alpha \pm (2\cos^2\alpha-1) = -1.$

Поделим обе части на $\cos^2\alpha$.

$8\,tg\,\alpha \pm \left(2-\frac{1}{\cos^2\alpha}\right) = -\frac{1}{\cos^2\alpha}.$

Рассмотрим два случая.

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

1. $8\operatorname{tg}\alpha + \left(2 - \frac{1}{\cos^2\alpha}\right) = -\frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow 8\operatorname{tg}\alpha = -2.$

Тогда $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{4}.$

2. $8\operatorname{tg}\alpha - \left(2 - \frac{1}{\cos^2\alpha}\right) = -\frac{1}{\cos^2\alpha}.$

$\frac{2}{\cos^2\alpha} + 8\operatorname{tg}\alpha - 2 = 0.$

$2(1+\operatorname{tg}^2\alpha) + 8\operatorname{tg}\alpha - 2 = 0.$

$\operatorname{tg}^2\alpha + 4\operatorname{tg}\alpha = 0 \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha(\operatorname{tg}\alpha + 4) = 0$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \operatorname{tg}\alpha = 0 \\ \operatorname{tg}\alpha = -4. \end{array}\right.$

Т.к $\operatorname{tg}\alpha$ имеет не менее трёх значений по условию, то все эти три значения являются верными.

Ответ: $-\frac{1}{4}, 0, -4.$

№3)

$3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geqslant |x^2+6x|^{\log_4 5} - x^2.$

ОДЗ: $x^2+6x > 0 \Rightarrow |x^2+6x| = x^2+6x.$

$\left[\begin{array}{l} x < -6 \\ x > 0. \end{array}\right.$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$3^{\log_4(x^2+6x)}+x^2+6x \geqslant (x^2+6x)^{\log_4 5}$$

$t = x^2+6x,\ t>0.$

$$3^{\log_4 t}+t \geqslant t^{\log_4 5}$$

$$3^{\log_4 t} = 4^{\log_4(3^{\log_4 t})} = 4^{\log_4 t \cdot \log_4 3} = t^{\log_4 3}.$$

$$t^{\log_4 3}+t \geqslant t^{\log_4 5}. \quad (1)$$

$t>0 \Rightarrow t^{\log_4 3-1}+1 \geqslant t^{\log_4 5-1}.$

Т.к $\log_4 3<1 \Rightarrow \log_4 3-1<0.$

Т.е $f(t) = t^{\log_4 3-1}+1$ убывает при $t>0.$

$\log_4 5>1 \Rightarrow \log_4 5-1>0 \Rightarrow y(t)=t^{\log_4 5-1}$ возрастает при $t>0$

Тогда на луче $t\in(0;+\infty)$ существует единственная точка, начиная с которой неравенство перестаёт выполнятся.

Подберём такое t из неравенства 1.

$t^{\log_4 3} + t \geqslant t^{\log_4 5}$

Заметим, что при $t = 4^2 = 16$.

$4^{2\log_4 3} + 4^2 = 3^2 + 4^2 = 5^2 = 4^{2\log_4 5}$

Т.е при $t > 16$ неравенство не выполняется. Тогда.

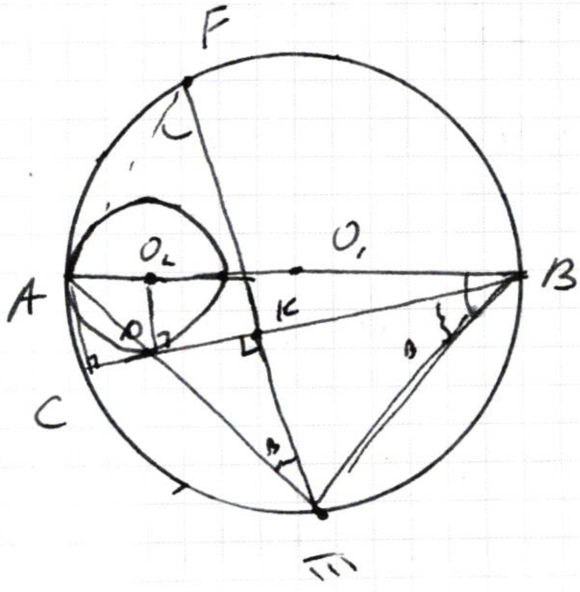
$\begin{cases} t > 0 \\ t \leqslant 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 6x > 0 \\ x^2 + 6x - 16 \leqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(x+6) > 0 \\ (x+8)(x-2) \leqslant 0. \end{cases}$

$\begin{cases} x \in (-\infty; -6) \cup (0; +\infty) \\ x \in [-8; 2]. \end{cases}$

Итог $x \in [-8; -6) \cup (0; 2]$

Ответ: $x \in [-8; -6) \cup (0; 2]$.

№4



Дано:

$CD = \frac{5}{2}$, $BD = \frac{13}{2}$.

Найти:

r и R - ?

$\angle AFE$ - ?

S_{AEF}.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Пусть O_1, O_2 – центры окружностей Ω и ω соответственно.

Тогда $O_2D \perp BC$, т.к BC касается ω.
Также $\angle ACB = 90°$, т.к AB – диаметр Ω.
Тогда очевидно, что треугольники BO_2D и BAC подобны. $\Rightarrow \frac{BO_2}{BA} = \frac{BD}{BC}$.
Пусть r и R радиусы ω и Ω соответственно. Тогда $BO_2 = 2R - r$, $BA = 2R$.

$BC = BD + CD = \frac{13}{2} + \frac{5}{2} = 9$.

$\frac{2R - r}{2R} = \frac{13}{2 \cdot 9} = \frac{13}{18} \Rightarrow 1 - \frac{r}{2R} = \frac{13}{18}$

$\frac{5}{18} = \frac{r}{2R} \Rightarrow \frac{r}{R} = \frac{5}{9} \Rightarrow r = \frac{5}{9}R$.

$BO_2 = 2R - r = 2R - \frac{5}{9}R = \frac{13}{9}R$.

$O_2D = \frac{5}{9}R$.

По т. Пифагора $BD = \sqrt{BO_2^2 - O_2D^2}$

$\frac{13}{2} = \sqrt{\left(\frac{13}{9}\right)^2 - \left(\frac{5}{9}\right)^2} \cdot R = \frac{12}{9}R = \frac{4}{3}R$.

$R = \frac{9 \cdot 13}{24} = \frac{117}{24} = \frac{39}{8}$

$r = \frac{5}{9} R = \frac{5 \cdot 13}{24} = \frac{65}{24}$.

Пусть $\angle ABC = \alpha$. Тогда $\cos\alpha =$

$= \frac{BD}{BO_2} = \frac{\frac{13}{2}}{2R - r} = \frac{\frac{13}{2}}{\frac{39}{4} - \frac{65}{24}} = \frac{1}{\frac{3}{2} - \frac{5}{12}} = \frac{12}{13}$

$AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{(2R)^2 - (9)^2} =$

$= \sqrt{\left(\frac{39}{4}\right)^2 - 9^2} = \frac{\sqrt{(39)^2 - (36)^2}}{4} = \frac{\sqrt{3 \cdot 75}}{4} =$

$= \frac{3 \cdot 5}{4} = \frac{15}{4}$.

$AD = \sqrt{AC^2 + CD^2} = \sqrt{\left(\frac{15}{4}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2} =$

$= \frac{5}{2}\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 1} = \frac{5\sqrt{13}}{4}$.

По свойству хорд $BD \cdot CD = AD \cdot DE$

$DE \cdot \frac{5\sqrt{13}}{4} = \frac{13}{2} \cdot \frac{5}{2}$. $\Rightarrow DE = \sqrt{13}$

$AE = DE + AD = \frac{9\sqrt{13}}{4}$.

Т.к. AB – диаметр, то $\angle AEB = 90^\circ$

Тогда $\sin\angle ABE = \frac{AE}{AB} = \frac{AE}{2R} = \frac{\sqrt{13} \cdot \frac{9}{4}}{2 \cdot \frac{39}{8}} =$

$= \frac{3}{\sqrt{13}} \Rightarrow \angle ABE = \arcsin\frac{3}{\sqrt{13}}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\angle ABE$ и $\angle AFE$ ~~опир~~ опираются на хорду AE, т.е $\angle AFE = \angle ABE = \arcsin\frac{3}{\sqrt{13}}$

$\angle AFE = \arcsin\frac{3}{\sqrt{13}}$

Пусть $BC \cap EF = K$.

~~Пусть~~ $\sin\angle ABE = \frac{3}{\sqrt{13}} \Rightarrow \cos\angle ABE = \frac{2}{\sqrt{13}}$.

$BE = AB\cdot\cos\angle ABE = \frac{39}{4}\cdot\frac{2}{\sqrt{13}} = \frac{3\sqrt{13}}{2}$

Пусть $\angle DBE = \beta$.

Из $\triangle DBE$ $\sin\beta = \frac{DE}{BD} = \frac{\sqrt{13}}{\frac{13}{2}} = \frac{2}{\sqrt{13}}$

$\angle EKB = 90^\circ \Rightarrow EK = BE\cdot\sin\beta = \frac{3}{2}\sqrt{13}\cdot\frac{2}{\sqrt{13}} = 3$.

$KB = BE\cdot\cos\beta = \frac{3}{2}\sqrt{13}\cdot\frac{3}{\sqrt{13}} = \frac{9}{4}$.

$KC = BC - KB = 9 - \frac{9}{4} = \frac{27}{4}$.

$KC\cdot KB = KE\cdot FK \Rightarrow \frac{3^5}{4^2} = 3\cdot FK \Rightarrow$

$\Rightarrow KF = \frac{81}{16}$

$FE = KF + KE = \frac{81}{16} + 3 = \frac{129}{16}$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

По т. синусов в $\triangle AFE$

$$\frac{AF}{\sin\beta} = \frac{AE}{\sin\alpha} \Rightarrow AF = AE\,\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}.$$

$$S_{AFE} = \frac{1}{2}\,AF\cdot FE\cdot\sin\alpha =$$

$$= \frac{1}{2}\,AE\cdot FE\cdot\sin\beta. = \frac{1}{2}\cdot\frac{9}{4}\sqrt{13}\cdot\frac{129}{16}\cdot\frac{2}{\sqrt{13}}.$$

$$= \frac{1161}{64}$$

Ответ: $r = \frac{65}{24}$, $R = \frac{39}{8}$

$\angle AFE = \arcsin\frac{3}{\sqrt{13}}$

$S_{AFE} = \frac{1161}{64}$

№5

Поймем некоторые свойства $f(x)$.

1) $f(a) = f(1\cdot a) = f(1) + f(a) \Rightarrow f(1) = 0$

2) $f(1) = f\left(\frac{t}{t}\right) = f(t) + f\left(\frac{1}{t}\right) \Rightarrow f\left(\frac{1}{t}\right) = -f(t).$

3) $f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) = f(x) - f(y).$

Таким образом $f\left(\frac{x}{y}\right) < 0 \Leftrightarrow f(x) < f(y)$

Вычислим $f(p)$, где $2 \le p \le 23$ и p-простое

По условию $f(p) = \left[\frac{p}{4}\right]$

Запишем значения $f(p)$.

p	2	3	5	7	11	13	17	19	23
$f(p)$	0	0	1	1	2	3	4	4	5

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Теперь вычислим значение $f(t)$ для произвольного натурального t, $3 \le t \le 27$.

Для этого разложим каждое t на произведение простых чисел.

$t = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_n^{\alpha_n}$. Тогда $f(t) = \alpha_1 f(p_1) + \alpha_2 f(p_2) + \ldots + \alpha_n f(p_n)$.

t		3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
$f(t)$		0	0	1	0	1	0	0	1	2	0	3	1	1	0	4	0	4	1	1	2	5	0	2	3	0

Заметим, что $f(t)=0$ при 10 значениях t

$f(t)=1$ при 7 значениях t.

$f(t)=2$ при ~~одном~~ 3 значениях t

$f(t)=3$ при 2 значениях t

$f(t)=4$ при 2 значениях t.

$f(t)=5$ при 1 значении t.

Тогда $f(x) < f(y)$ в нескольких случаях.

1) $f(x)=0$ и $f(y) \neq 0$.

Таких пар $10 \cdot 15 = 150$

2) $f(x)=1$ и $f(y)>1$.

Таких пар $7 \cdot 8 = 56$.

3) $f(x)=2$ и $f(y)>2$.

Таких пар $3 \cdot 5 = 15$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

4) $f(x)=3 \quad f(y)>3$

$2\cdot 3=6$ пар.

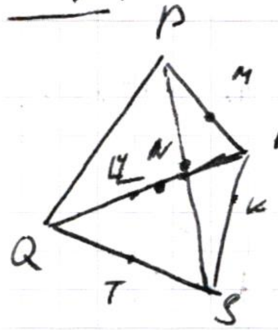
5) $f(x)=4 \quad , \quad f(y)>4$

$2\cdot 1=2$ пары

Итого: $150+56+15+6+2=229$ пар.

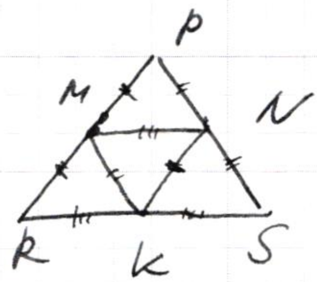
Ответ: 229 пар.

№7 $\quad QR=2,\ QS=1,\ PS=\sqrt{2}$.



Найти: PS, R_{min} - ?

Рассмотрим треугольник PRS. Пусть M, N, K — середины PR, PS, RS.



$MN=\frac{RS}{2}$, т.к. MN - средняя линия.

Аналогично $NK=\frac{PR}{2}$, $MK=\frac{PS}{2}$.

Тогда $MK=PN$, $NK=PM \Rightarrow PMKN$ - параллелограм.

Около $PNKM$ можно описать окружность $\Rightarrow$

$\Rightarrow PNKM$ - прямоугольник.

$\angle RPS=90°$.

Пусть T и L середины рёбер QS и QR соответственно.

$NT \parallel PQ$ (средняя линия) и $ML \parallel PQ \Rightarrow$

$\Rightarrow NT \parallel ML$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Аналогично $MN \parallel LT \parallel RS$.

Тогда $MNTL$ – вписанный параллелограмм $\Rightarrow$
$\Rightarrow MNTL$ – прямоугольник.

$NM \perp NT$, но $MN \parallel RS$, $NT \parallel PQ \Rightarrow$
$\Rightarrow PQ \perp PS$.

$MK = ON = \frac{PS}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

~~Рассмотрим~~.

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

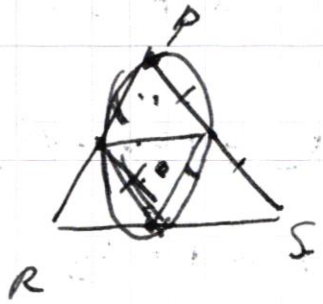
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

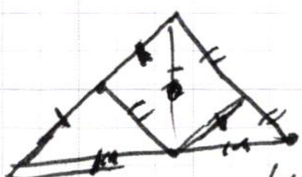
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

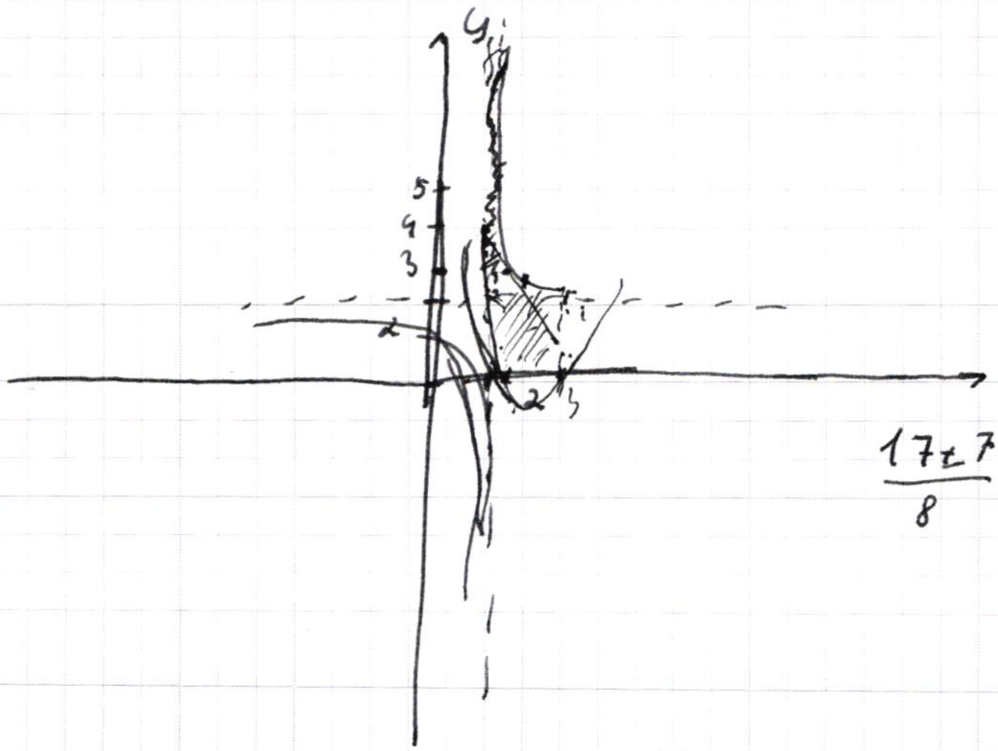




$g(x) = 8x^2 - 34x + 30 =$

$= 2(4x^2 - 17x + 15)$

$f(x) = \frac{4x-3}{2x-2} = 2 + \frac{1}{2x-2}$ $= 2(x-3)(4x-5).$



$\frac{17 \pm 7}{8} = \left[\begin{array}{l} \frac{5}{4} \\ 3. \end{array} \right.$

$4x - 3 = 2ax^2 + 2bx - 2ax - 2b.$

$4x - 3 = (ax+b)(2x-2)$

$2ax^2 + (2b - 2a - 4)x + 3 - 2b$

$a+b = 4.$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} 3y^2-15xy+4x^2+2x+3y-2=0 \\ 3x^2+3y^2-6x-4y-4=0 \end{cases}$$

$21y^2+11x^2-\cancel{30}xy-2x+2y-8=0$

$15y^2+5x^2-30xy+10x+10y=0$

$3y^2+x^2-6xy+2x+2y=0$

$(4x-6)$

$(x-3y)(2x$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2.$$

$$3^{\log_4 t}+t \geq |t|^{\log_4 5}.$$

$$\left[\begin{array}{l} x < -6 \\ x > 0. \end{array}\right. \qquad t^{\log_4 3}+t \geq t^{\log_4 5}.$$

$$t^{\log_4 3}+t-t^{\log_4 5} \geq 0.$$

$$\cancel{\log_4 3} \ t^{\log_4 3-1}+1-\log_4 5\, t^{\log_4 5-1}.$$

$$t^{\log_4 \frac{3}{4}}-t^{\log_4 \frac{5}{4}} \geq -1.$$

$$t^{\alpha}-t^{\beta}=f(t)$$

$$f'(t)=\alpha t^{\alpha-1}-\beta t^{\beta-1}.$$

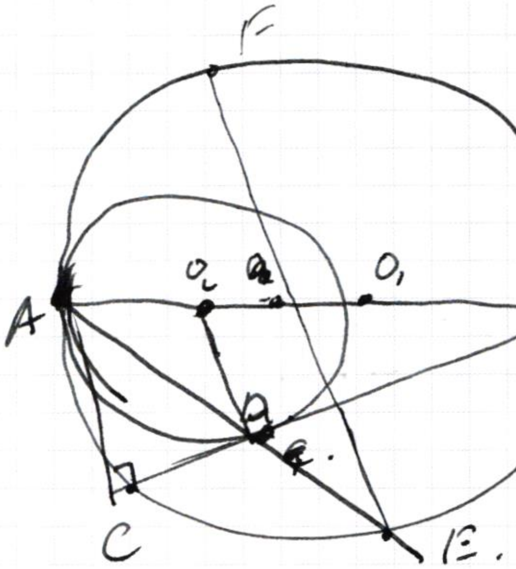
$$f(u)=f(u)+f(1) \qquad f(1)=0.$$

$$f(u^2)=2f(u) \qquad f(u^3)=3f(u).$$

$$f(u^n)=nf(u).$$

$$f(u^r)=rf(u).$$

$$\cancel{f(\tfrac{3}{4})} \ f(3)=0$$



$$\frac{2R-r}{2R} = \frac{13}{2\cdot 9} = \frac{13}{18}$$

$$36R - 18r = 26R.$$

$117 \mid 3$, $\frac{9}{27}$, 39

$$\frac{2R-r}{r} = \frac{13}{5}.$$

$129 \times 9 = 1161$

$$10R = 18r.$$

$$r = \frac{5}{9}R.$$

$$\frac{39}{4}\cdot\frac{5}{13} = \frac{15}{4}.$$

$$3^2+2^2 = 9+4 = 13$$

$$2R = \frac{39}{4}.$$

$$BE = \sqrt{\left(\frac{39}{4}\right)^2 - \left(\frac{9}{4}\right)^2\cdot 13}.$$

$$= \frac{3}{4}\sqrt{(\cancel{3}\cdot 39)^2 - 3^2\cdot 13}.$$

$$\sin B = \cos\alpha$$

$$\sin B = \sin\frac{\pi}{2}-\alpha.$$

$$\sin \alpha - \frac{\pi}{2} + \sin B = 0.$$

$$\sin\frac{\alpha+B}{2} - \frac{\pi}{4}\ \cos\frac{\alpha-B}{2} - \frac{\pi}{4}.$$

$$\frac{\alpha+B}{2} - \quad \frac{\alpha-B}{2} = \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

3	0
4	0
5	1
6	0
7	1
8	0
9	0
10	1
11	2
12	0
13	3
14	1
15	1
16	0
17	4
18	0
19	4
20	1
21	1
22	2
23	5
24	0
25	2
26	3
27	0

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha+2\beta)=\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta+\cos 2\alpha\cdot\sin 2\beta$

$206+23$

$=229$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=$

$=2\sin(2\alpha+2\beta)\cos$

$2\alpha\pm\arccos\frac{4}{\sqrt{17}}=\arccos-\frac{1}{\sqrt{17}}$

$2\sin\alpha\cos\alpha\cdot\cos 2\beta+\sin 2\beta(2\cos^2\alpha-1)=-\frac{1}{\sqrt{17}}$

$2t\cdot\frac{4}{\sqrt{17}}\pm\frac{1}{\sqrt{17}}(2-(1+t^2))=-\frac{1}{\sqrt{17}}(1+tg^2\alpha)$

$8t\pm(1-t^2)=-1-t^2.$

$2t^2+8t=0$

$t=0\qquad t=-4.$

$t^{\log_4 3-1}+1\geqslant t^{\log_4 5-1}$

$t^{\log_4 3-1}-t^{\log_4 5-1}\geqslant-1.$

$f'=\log$

p	$f(p)$
2	0
3	0
5	1
7	1
11	2
13	3
17	4
19	4
23	5
29	7

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2} \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4. \end{cases}$$

$9y^2-12xy+4x^2=3xy-2x-3y+2.$

$9y^2-15xy+4x^2+2x+3y=2.$

$3xy-3y-2x+2.$

$3y(x-1)-2(x-1)$

$\sqrt{(3y-2)(x-1)}\le\frac{3y-2+x-1}{2}.$

$3(x-1)^2-3+3(y-1)^2+2y-3.=4.$

$6y-4x\le 3y+x-3.$

$3y-5x\le-3.$

$3(x+y)^2-8(x+y)+2y=4.$

$f(1)=0$ $\quad f(2)=0$

$f(y)+f(\frac{1}{y})=0$ $\quad f(3)=0.$

$f(\frac{1}{y})=-f(y)$ $\quad f(5)=1.$

$f(\frac{x}{y})=f(x)-f(y)=$

$f(x)<f(y)$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)