МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 2

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6}, \\ x^2+36y^2-12x-36y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$10x+\left|x^2-10x\right|^{\log_3 4}\geqslant x^2+5^{\log_3\left(10x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{15}{2}$, $BD=\frac{17}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $2\leqslant x\leqslant 25$, $2\leqslant y\leqslant 25$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{16x-16}{4x-5}\leqslant ax+b\leqslant -32x^2+36x-3$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[\frac{1}{4};1\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $KLMN$, вершина N которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра KN. Известно, что $KL=3$, $KM=1$, $MN=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра LM. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 5. По условию $f(ab)=f(a)+f(b)$.

$f(1)=f(1\cdot 1)=f(1)+f(1)=2f(1)$, откуда следует $f(1)=0$;

$f(1)=f\left(\frac{a}{a}\right)=f(a)+f\left(\frac{1}{a}\right)=0 \Rightarrow f\left(\frac{1}{a}\right)=-f(a)$; (1)

Если $n=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot p_3^{\alpha_3}\cdot\ldots\cdot p_n^{\alpha_n}$, где $p_1,p_2,\ldots,p_n$ - простые числа, а $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ - неотрицательные целые, то

$$f(n)=f\left(p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot p_n^{\alpha_n}\right)=f\left(p_1^{\alpha_1}\right)+f\left(p_2^{\alpha_2}\cdot p_3^{\alpha_3}\cdot\ldots\cdot p_n^{\alpha_n}\right)=\ldots=f\left(p_1^{\alpha_1}\right)+f\left(p_2^{\alpha_2}\right)+\ldots+f\left(p_n^{\alpha_n}\right);$$

$$f\left(p_k^{\alpha_k}\right)=f(p_k)+f\left(p_k^{\alpha_k-1}\right)=\ldots=\underbrace{f(p_k)+f(p_k)+\ldots+f(p_k)}_{\alpha_k \text{ штук}}=\alpha_k\cdot f(p_k)$$ для

любого k. Тогда $f(n)=\alpha_1 f(p_1)+\alpha_2 f(p_2)+\ldots+\alpha_n f(p_n)$; (2)

Посчитаем $f(p_k)$ для всех простых p_k в промежутке $2\le p_k\le 25$;

$f(2)=\left[\frac{2}{4}\right]=0$; $f(3)=\left[\frac{3}{4}\right]=0$; $f(5)=\left[\frac{5}{4}\right]=1$;

$f(7)=\left[\frac{7}{4}\right]=1$; $f(11)=\left[\frac{11}{4}\right]=2$; $f(13)=\left[\frac{13}{4}\right]=3$;

$f(17)=\left[\frac{17}{4}\right]=4$; $f(19)=\left[\frac{19}{4}\right]=4$; $f(23)=\left[\frac{23}{4}\right]=5$;

Используя формулу (2) посчитаем $f(a)$ для остальных чисел в промежутке $2\le a\le 25$;

$f(4)=2f(2)=0$; $f(6)=f(2)+f(3)=0$; $f(8)=3f(2)=0$;

$f(9)=2f(3)=0$; $f(10)=f(2)+f(5)=1$; $f(12)=2f(2)+f(3)=0$;

$f(14)=f(2)+f(7)=1$; $f(15)=f(3)+f(5)=1$; $f(16)=4f(2)=0$;

$f(18)=f(2)+2f(3)=0$; $f(20)=2f(2)+f(5)=1$; $f(21)=f(3)+f(7)=1$;

$f(22)=f(2)+f(11)=2$; $f(24)=3f(2)+f(3)=0$; $f(25)=2f(5)=2$;

Задача 5, продолжение $f\left(\frac{x}{y}\right)<0$; Используя (1), можно написать

$$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) = f(x) - f(y) < 0 \Leftrightarrow f(x) < f(y);$$

Для $2 \leq x \leq 25$ и $2 \leq y \leq 25$ имеем:

1) Если $f(x)=0$, то $f(y)>0$; количество таких x-ов – 10 штук, y-ов – 14. Пар $(x;y)$ – $10 \cdot 14$ штук, т.е. 140;

2) $f(x)=1$ (7 штук), $f(y)>1$ (7 штук). Пар $(x;y)$ $7 \cdot 7 = 49$ штук;

3) $f(x)=2$ (3 штуки), $f(y)>2$ (4 штуки). Пар $(x;y)$ $3 \cdot 4 = 12$ штук;

4) $f(x)=3$ (1 штука), $f(y)>3$ (3 штуки). Пар $(x;y)$ $1 \cdot 3 = 3$ штуки;

5) $f(x)=4$ (2 штуки), $f(y)>4$ (1 штука). Пар $(x;y)$ $2 \cdot 1 = 2$ штуки;

Итого пар $(x;y)$ $140+49+12+3+2=206$ штук.

Ответ: 206

Задача 1 Обозначим $x=2\alpha$, $y=2\beta$

$$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin(x+y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = \sin(x+2y) + \sin x = \sin x \cos 2y + \sin 2y \cos x + \sin x =$$

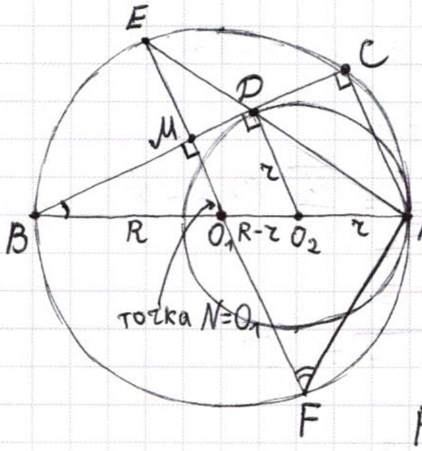
$$= \sin x\left(2\cos^2 y - 1 + 1\right) + 2\sin y \cos y \cos x = 2\cos^2 y \sin x + 2\sin y \cos y \cos x =$$

$$= 2\cos y\left(\sin x \cos y + \sin y \cos x\right) = 2\cos y \cdot \sin(x+y) = -\frac{2}{5} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos y = -\frac{1}{5\sin(x+y)} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 4



Пусть R – радиус большей окружности с центром O_1, а r – радиус малой окружности с центром O_2;

Проведём радиус O_2D; BC касательная, след. $O_2D \perp BC$; Соединим точки A и C;

Угол ACB опирается на диаметр $AB \Rightarrow$ $\Rightarrow \angle C = 90^\circ$;

Рассмотрим треугольники BDO_2 и ABC;

$\angle B$ общий, $\angle D = \angle C = 90^\circ \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle BDO_2$;

$BO_2 = AB - O_2A = \cancel{2R - r} = 2R - r$

Из подобия имеем $\frac{BO_2}{BA} = \frac{BD}{BC} \Leftrightarrow \frac{2R-r}{2R} = \frac{\frac{17}{2}}{\frac{17}{2}+\frac{15}{2}} = \frac{17}{32}$ (2) $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 64R - 32r = 34R \Leftrightarrow r = \frac{30}{32}R = \frac{15}{16}R$ (1)

По теореме Пифагора $(BO_2)^2 = BD^2 + (DO_2)^2$

$$(2R-r)^2 = BD^2 + r^2$$

$$4R^2 - 4Rr + \cancel{r^2} = BD^2 + \cancel{r^2}$$

Подставив (1), имеем $4R^2 - \frac{15}{4}R^2 = BD^2$

$$\frac{1}{4}R^2 = BD^2 \Leftrightarrow R = 2BD = 17 \Rightarrow r = \frac{15}{16}\cdot 17 = \frac{255}{16}$$

(2) – коэффициент подобия, след. $\frac{r}{AC} = \frac{17}{32} \Rightarrow AC = \frac{32}{17}r = 30$;

По теореме Пифагора $(\triangle ACD)$: $CD^2 + AC^2 = AD^2 \Leftrightarrow DA = \sqrt{AC^2 + CD^2} =$ $= \sqrt{900 + \frac{225}{4}} = \frac{15\sqrt{17}}{2}$; Хорды AE и BC пересекаются в точке $D \Rightarrow$ $\Rightarrow AD \cdot DE = BD \cdot DC \Leftrightarrow DE = \frac{BD \cdot CD}{AD} = \frac{15}{2}\cdot\frac{17}{2}\cdot\frac{2}{15\sqrt{17}} = \frac{\sqrt{17}}{2}$;

Задача 4, продолжение | Рассмотрим треугольники ADO_2 и AEO_1;
$\angle A$ общий, $\angle E = \angle D$ как соответственные углы (по условию $EF \perp BC$, а $O_2D \perp BC$ как радиус, след. $EF \parallel BC$), значит $\triangle ADO_2 \sim \triangle AEO_1$;

Из подобия $\frac{AO_2}{AO_1} = \frac{AD}{AE} \Leftrightarrow \frac{r}{AO_1} = \frac{\frac{15\sqrt{17}}{2}}{\frac{15\sqrt{17}}{2} + \frac{\sqrt{17}}{2}} = \frac{15}{16} \Leftrightarrow r = \frac{15}{16} AO_1$;

Учитывая результат (1), имеем $AO_1 = R$ (Здесь вместо O_1 нужно было писать N и доказать, что $N = O_1$), а значит EF проходит через центр и является диаметром.

Рассмотрим $\triangle AEF$; $\sin\angle AFE = \frac{AE}{EF} = \frac{8\sqrt{17}}{34} = \frac{4}{\sqrt{17}} = \sqrt{\frac{16}{17}}$ ($\angle A = 90°$, так как опирается на диаметр) $\Rightarrow \angle AFE = \arcsin\sqrt{\frac{16}{17}}$;

По теореме пифагора $AF = \sqrt{EF^2 - AE^2} = \sqrt{34\cdot 34 - 64\cdot 17} = \sqrt{68}$

$S_{AEF} = \frac{1}{2}\cdot AE \cdot AF = \frac{1}{2}\cdot 8\sqrt{17}\cdot\sqrt{68} = \frac{1}{2}\cdot 8\sqrt{17}\cdot 2\sqrt{17} = 8\cdot 17 = 136$

Ответ: $R = 17$, $r = \frac{255}{16}$, $\angle AFE = \arcsin\sqrt{\frac{16}{17}}$, $S_{AEF} = 136$;

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 2

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6} \\ x^2+36y^2-12x-36y=45 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-12y=\sqrt{2y(x-6)-(x-6)} \\ x^2-12x+36+36y^2-36y+9=45+36+9 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-12y=\sqrt{(x-6)(2y-1)} \\ (x-6)^2+9(2y-1)^2=90 \end{cases}, \quad ОДЗ: (x-6)(2y-1)\geq 0$$

$$90=(x-6)^2+9(2y-1)^2 \geq 2\cdot(x-6)\cdot 3(2y-1)=6(x-6)(2y-1)$$

$$(x-6)(2y-1)\leq 15$$

$$\sqrt{(x-6)(2y-1)}\leq\sqrt{15}$$

$$x-12y\leq\sqrt{15}$$

Задача 5

$$10x+|x^2-10x|^{\log_3 4}\geq x^2+5^{\log_3(10x-x^2)}, \quad ОДЗ: 10x-x^2>0$$

$$(10x-x^2)+|10x-x^2|^{\log_3 4}\geq 5^{\log_3(10x-x^2)} \qquad x(x-10)<0$$

$$(10x-x^2)+(10x-x^2)^{\log_3 4}\geq 5^{\log_3(10x-x^2)} \qquad x\in(0,10)$$

Задача 6

$$\frac{16x-16}{4x-5} \leq ax+b \leq -32x^2+36x-3$$

Обозначим $f(x) = -32x^2+36x-3$ и $g(x) = \dfrac{16x-16}{4x-5}$;

Исследуем эти функции на промежутке $x \in [\frac{1}{4}; 1]$

$f(x)$ - парабола с ветвями вниз, координаты вершины $x_0 = \frac{-36}{-64} = \frac{9}{16}$

$f(1) = -32+36-3 = 1$, $f(\frac{1}{4}) = -32 \cdot \frac{1}{16} + 36 \cdot \frac{1}{4} - 3 = -2+9-3 = 4$

поскольку $ax+b$ - линейная функция, то $f(x)$ можно заменить линейной функцией, проходящей через точки $(1;1)$ и $(\frac{1}{4};4)$;

такая функция $y = -4x+5$;

$$g'(x) = \frac{16(4x-5) - 16(x-1)\cdot 4}{(4x-5)^2} = \frac{64x-80-64x+64}{(4x-5)^2} = \frac{-16}{(4x-5)^2} < 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow g'(x)$ убывает на промежутке $[\frac{1}{4}; 1]$ и является выпуклой вниз, то можно заменить ее на лин. функцию, проходящую через точки $(1; g(1))$ и $(\frac{1}{4}; g(\frac{1}{4}))$

$$g(1) = 0, \quad g(\tfrac{1}{4}) = \frac{16 \cdot \frac{1}{4} - 16}{4 \cdot \frac{1}{4} - 5} = 3$$

такая функция $y = -4x+4$

$$-4x+4 \leq ax+b \leq -4x+5$$

$a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n}$

$f(a) = \alpha_1 f(p_1) + \alpha_2 f(p_2) + \ldots + \alpha_n f(p_n)$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$

$f(a) = f\left(a \cdot \frac{p}{p}\right) = f(ap) + f\left(\frac{1}{p}\right)$

$f(a) = f\left(a \cdot \frac{b}{b}\right) = f(ab) + f\left(\frac{1}{b}\right) = f(a) + f(b) + f\left(\frac{1}{b}\right) \Rightarrow f\left(\frac{1}{b}\right) = -f(b)$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y) < 0$

$f(x) < f(y)$

$2 \le x \le 25$

$2 \le y \le 25$

$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23;$

$f(2)=0$
$f(3)=0$
$f(5)=1$
$f(7)=1$
$f(11)=2$
$f(13)=3$
$f(17)=4$
$f(19)=4$
$f(23)=5$

$f(4) = 2f(2) = 0$

$f(6) = f(2) + f(3) = 0$

$f(8) = 3f(2) = 0$

$f(9)$

$f(10) = f(2) + f(5) = 1$

$f(12) = 2f(2) + f(3) = 0$

$f(14) = f(2) + f(7) = 1$

$f(15) = f(3) + f(5) = 1$

$f(16) = 4f(2) = 0$

$f(18) = f(2) + 2f(3) = 0$

$f(20) = 2f(2) + f(5) = 1$

$f(21) = f(3) + f(7) = 1$

$f(22) = f(2) + f(11) = 2$

$f(24) = 3f(2) + f(3) = 0$

$f(25) = 2f(5) = 2$

$34 \cdot 34$

$(30+4)^2 = 900 + 16 + 240 = 1156$

$f(1) = 0$

$f\left(\frac{b}{b}\right) = 0$

$f(b) + f\left(\frac{1}{b}\right) = 0$

$f\left(\frac{1}{b}\right) = -f(b)$

$64 \cdot 17$: $448 + 64\ldots = 1088$

$1156 - 1088 = 68$

$34 \cdot 34$: $136 + 102\ldots = 1156$

$68 \mid 2$, $34 \mid 2$, 17

9	0
7	1
3	2
1	3
2	4
1	5

$9 \cdot (7+3+1+2+1) = 9 \cdot 14 = 126$

$7 \cdot (3+1+2+1) = 49$

$3 \cdot (1+2+1) = 12$

$1 \cdot (2+1) = 3$

$2 \cdot 1 = 2$

$\boxed{\Sigma = 192}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$2\alpha = x \quad 2\beta = y$

$\sin(x+y) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\cos(x+y) = \pm\sqrt{1-\sin^2(x+y)} = \pm\sqrt{1-\frac{1}{5}} = \pm\sqrt{\frac{4}{5}} = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$

$\sin(x+2y) + \sin x = -\frac{2}{5}$

$\downarrow$

$\sin(x+y) = -\cos y$

$-\cos y$

$\sin(x+y)\cos y + \sin y \cdot \cos(x+y) + \sin x = -\frac{2}{5}$

$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x$

$\sin x \cdot \cos y + \sin y \cdot \cos x = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin(x+2y) = \sin x \cos 2y + \sin 2y \cdot \cos x =$

$f(25) = f(5) + f(5) = 2$

$= \sin x \cos^2 y - \sin x \sin^2 y + 2\sin y \cos y \cos x$

$-\frac{2}{5} = (\sin x \cdot \cos^2 y - \sin x \cdot \sin^2 y + 2\sin y \cdot \cos y \cdot \cos x + \sin x =$

$\cos^2 y$
$\shortparallel$

$= \sin x \cdot \cos^2 y + \sin x(1-\sin^2 y) + 2\sin y \cos y \cos x =$

$f(x/y) < 0$

$= 2\sin x \cdot \cos^2 y + 2\sin y \cos y \cos x =$

$f(m^n) = f(m$

$f(x/y) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$

$= 2\cos y(\sin x \cos y + \sin y \cos x) =$

$= 2\cos y \cdot \sin(x+y) = -\frac{2}{5}$

$a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n}$

$\cos y \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = -\frac{1}{5}$

$f(a) = f(p_1^{\alpha_1}) + f(p_2^{\alpha_2} \ldots p_n^{\alpha_n}) \pm$

$\boxed{\cos y = \frac{1}{\sqrt{5}}}$

$f(a) = f(a \cdot 1) = f(a) + f(1)$

$f(a) = f(a) + f(1) \Rightarrow$

$\Rightarrow f(1) = 0$

$= f(p_1^{\alpha_1}) + \ldots + f(p_n^{\alpha_n}) =$

$y = \pm\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + 2\pi k$

$=$

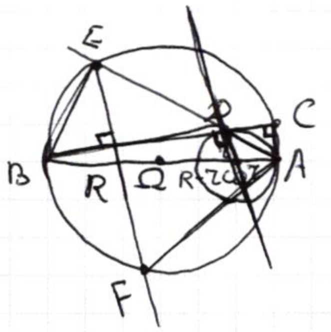
$f(6) = f(2) + f(3) = 0$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

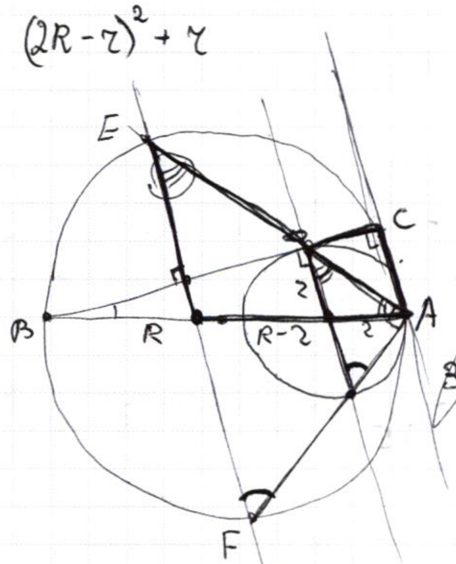
Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$CD = \frac{15}{2}$ $BD = \frac{17}{2}$

$BC = CD + BD = \frac{32}{2} = 16$



$(2R-r)^2 + r$



$\cancel{\frac{2R-r}{2R} = \frac{BD}{BC} = \frac{17}{2}\cdot\frac{2}{32} = \frac{17}{32}}$

$\cancel{32(2R-r) = 17\cdot 2R}$

$\cancel{64R - 32r = 34R}$ ✓

$32r = 30R$

$\boxed{r = \frac{15}{16}R}$ (*)

$(2R-r)^2 = r^2 + BD^2$

$4R^2 - 4Rr + \cancel{r^2} = \cancel{r^2} + BD^2$

$4R^2 - \frac{15}{4}R^2 = BD^2$

$\frac{1}{4}R^2 = BD^2$

$R = 2BD = 17$

$r = \frac{15\cdot 17}{16} = \frac{155}{16}$

$\begin{array}{r} 15 \\ \cdot 17 \\ \hline 105 \\ +15\ \ \\ \hline 155 \end{array}$

$ab > 0$

$a - 6b = \sqrt{ab}$

$a^2 + 9b^2 = 90$

$6y = a$

(6, 3)

$(a-6b)^2 = ab$

$a^2 - 12ab + 36b^2 = ab$

$(x-6) = a$

$(2y-1) = b$

$x^2 + 36y^2 - 12x - 36y = 45$

$x^2 - 2\cdot 6\cdot x + 36 + (6y)^2 - 2\cdot 6y\cdot 3 + 9 = 45 + 36 + 9 = 90$

$\sqrt{90} = 3\sqrt{10}$

$(x-6)^2 + (6y-3)^2 = 90$ $(x-6)^2 + (a-3)^2 = 90$

$x - 12y = \sqrt{2xy - 12y - x + 6} = \sqrt{2y(x-6) - (x-6)} = \sqrt{(2y-1)(x-6)}$

$(x-6)^2 + 9(2y-1)^2 = 90$

$(x-6) - 6(2y-1) = x - 6 - 12 +$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$\sin(2\alpha+4\beta) = \sin(2\alpha+2\beta+2\beta) =$

$= \sin(2\alpha+2\beta)\cos(2\beta) + \sin(2\beta)\cos(2\alpha+2\beta) =$

$= -\frac{1}{\sqrt{5}}\cos(2\beta) + \sin(2\beta)\cdot$

$\sin(2\alpha)\cos(2\beta) + \sin(2\beta)\cos(2\alpha) =$

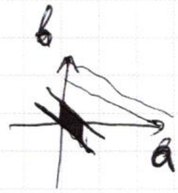
$\sin(2\alpha)\cos(4\beta) + \sin(4\beta)\cos(2\alpha) = \sin(2\alpha)(\cos^2(2\beta) - \sin^2(2\beta)) +$

$+ 2\sin(2\beta)\cos(2\beta)\cos(2\alpha) =$

$= \sin(2\alpha)\cdot\cos^2(2\beta) - \sin^2(2\beta)\cdot$

$= 144$

$\frac{16x-16}{4x-5} \leq ax+b \leq -32x^2+36x-3$



$-2+9-3$

$x\in[\frac{1}{4};1]$

$0\leq a+b\leq 1$

$x=1: \begin{cases} a+b\geq 0 \\ a+b\leq 1 \end{cases}$

$b\leq 1-a$

$b\geq -a$

$x=\frac{1}{4}: \begin{cases} \frac{1}{4}a+b\geq 3 \\ \frac{1}{4}a+b\leq 4 \end{cases}$

$b\geq 3-\frac{1}{4}a$

$b\leq 4-\frac{1}{4}a$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$g(x)=\frac{16x-16}{4x-5}$

$g'(x)=\frac{16(4x-5)-16(x-1)\cdot 4}{(4x-5)^2}=\frac{64x-80-64x+64}{(4x-5)^2}=-\frac{16}{(4x-5)^2}<0$ (на $x\in[\frac{1}{4};1]$ $4x-5\neq 0$)

$g'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{16(4x-5)-\cancel{64}(x-1)}{(4x-5)^2} \neq 0$

$(4x-5)-4(x-1)=0$

$4x-5-4x+4=-1<0 \Rightarrow$ убывает

64

$g(1)=0$

$g(\frac{1}{4})=3$

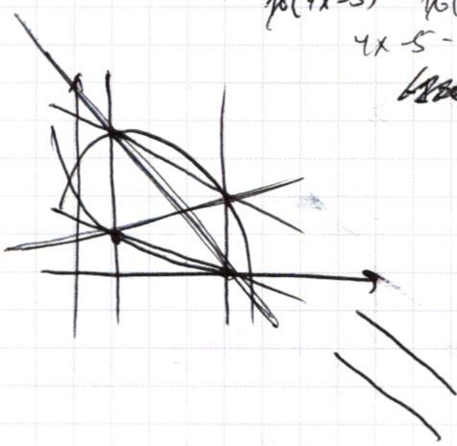
$f(1)=1$

$f(\frac{1}{4})=4$

$16(4x-5)-16(x-1)4 \neq 0$

$4x-5-4x+4 \neq 0$

$\leq ax+b \leq$



$0\leq a+b\leq 1$

$3\leq \frac{1}{4}a+b\leq 4$

$0=k+d$

$3=\frac{1}{4}k+d$

$3=-\frac{3}{4}k$

$\leq ax+b$

$\boxed{k=-4}$

$-4x+4$

$-4x+5$

$-4x+4\leq ax+b\leq -4x+5$ $\quad x\in[\frac{1}{4};1]$

$x-12y=\sqrt{(x-6)(2y-1)}$

$(x-6)^2+9(2y-1)^2=90$

$ax+b\geq -4x+4$

$ax+b\leq -4x+5$

$(-4;m)$, $m\in[4;5]$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$10x + |x^2 - 10x|^{\log_3 4} \geqslant x^2 + 5^{\log_3(10x - x^2)}$

$10x = a$
$x^2 = b$

$a + |b - a|^{\log_3 4} \geqslant b + 5^{\log_3(a-b)}$

$a + |a - b|^{\log_3 4} \geqslant b + 5^{\log_3(a-b)}$

$a - b > 0$

$a + (a-b)^{\log_3 4} \geqslant b + 5^{\log_3(a-b)}$

$\log_3$

$a + b \leqslant 1$

$\frac{1}{4}a + b \leqslant 4$

$(a-b) + (a-b)^{\log_3 4} \geqslant 5^{\log_3(a-b)}$

$a - b = y$

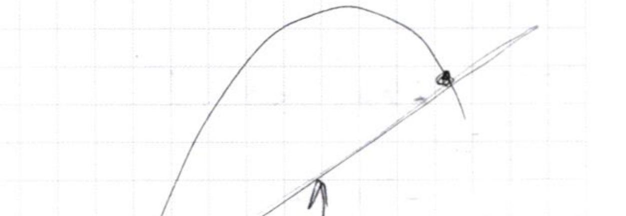
$y + y^{\log_3 4} \geqslant 5^{\log_3 y}$

$y>0$

$y = 10x - x^2$

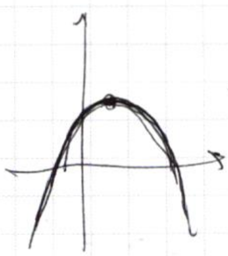
$f(y) \quad y + y^{\log_3 4} - 5^{\log_3 y} \geqslant 0$

$\cancel{f'(y) = 1 + \log_3 4 \cdot (y^{\log_3 4 - 1}) - \log_3 y.}$



$10x - x^2 + (10x - x^2)^{\log_3 4}$

$$\begin{cases} ax + b \geqslant \frac{16x - 16}{4x - 5} \\ ax + b \leqslant \frac{-32x^2 + 36x - 3}{} \end{cases}$$



$f(x) = -32x^2 + 36x - 3$

$ax + b \leqslant$

$f'(x) = -64x + 36$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 64x = 36 \Leftrightarrow x = \frac{36}{64} = \frac{9}{16}$

$+ \quad +$

$\frac{1}{4} \quad \frac{9}{16} \quad 1$

max

$f(1) = -32 + 36 - 3 = 1$

$f\left(\frac{1}{4}\right) = -2 + 9 - 3 = 4$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$$10x+|x^2-10x|^{\log_3 4} \geq x^2+5^{\log_3(10x-x^2)}$$

ОДЗ: $10x-x^2>0$

$$10x+(10x-x^2)^{\log_3 4} \geq x^2+5^{\log_3(10x-x^2)}$$

$10x-x^2>0$

$\cancel{x(10-x)\geq 0}$

$$\boxed{(10x-x^2)+(10x-x^2)^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3(10x-x^2)}}$$

$x(10-x)<0$

$5+5+3+2+3+2$

$x\in(0;10)$

3825	3
1275	3
425	5
85	5
17	17
1	

$f(x)=x^{\log_3 4}$

$g(x)=10x-x^2$

$f(g(x))=(10x-x^2)^{\log_3 4}$

$65 \cdot 65$: 325, 390

$$(10-2x)+\log_3 4\cdot(10x-x^2)^{(\log_3 4)-1}\cdot(10-2x)$$

$$(10-2x)\left(1+\log_3 4\cdot(10x-x^2)^{\log_3 4-1}\right) = 0$$

$x=5$

$$5+5^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3 5}$$

$$\frac{2R-r}{2R}=\frac{17}{2}\cdot\frac{2}{32}=\frac{17}{32}$$

$m>0$

$$64R-32r=34R$$

$$r=\frac{30}{32}R=\frac{15}{16}R$$

$$\boxed{m+m^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3 m}}$$

$$(2R-r)^2=r^2+BD^2$$

$CD=\frac{15}{2}$

$BD=\frac{17}{2}$

$$4R^2-4Rr+\cancel{r^2}=\cancel{r^2}+BD^2$$

$15 \cdot 17$: 105, 15, 255

$$\frac{r}{AP}=\frac{AD}{AD+x}=\frac{\frac{15\sqrt{17}}{2}}{\frac{16\sqrt{17}}{2}}=\frac{15}{16} \Rightarrow$$

$$4R^2-\frac{15}{4}R^2=BD^2$$

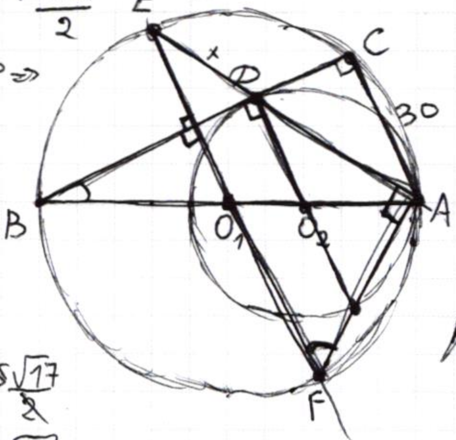
$$\Rightarrow r=\frac{15}{16}AP \Rightarrow$$

$$\frac{1}{4}R^2=BD^2$$

$$\Rightarrow \boxed{AP=R}$$

$$R=2BD=17$$

$$r=\frac{15}{16}\cdot 17=\frac{255}{16}$$



$k=\frac{17}{32}$

$$\frac{15\cdot 17}{24}=x\cdot\frac{15\sqrt{17}}{2}$$

$$x=\frac{\sqrt{17}}{2}$$

$$r=\frac{17}{32}CA \Rightarrow CA=\frac{32}{17}r=\frac{32}{17}\cdot\frac{15\cdot 17}{16}=30$$

$$AD=\sqrt{900+\frac{225}{4}}=\sqrt{\frac{3825}{2}}=\frac{15\sqrt{17}}{2}$$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №___

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6} \\ x^2+36y^2-12x-36y=45 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-12y=\sqrt{(x-6)(2y-1)} \\ (x-6)^2+9(2y-1)^2=90 \end{cases}$$

$\frac{a^2+b^2}{2}$

$(x-6)(2y-1)\geq 0$

$$(x-6)^2+9(2y-1)^2 \geq 3\cdot 2(x-6)(2y-1)$$

$a^2+b^2 \geq 2ab$

$$(x-6)(2y-1) \leq \frac{90}{6}$$

$$x-12y \leq \frac{90}{6}$$

$$(x-6)(2y-1)\geq 0$$

$$90 \geq 6(x-6)(2y-1)$$

$$\sqrt{15} \geq \sqrt{(x-6)(2y-1)}$$

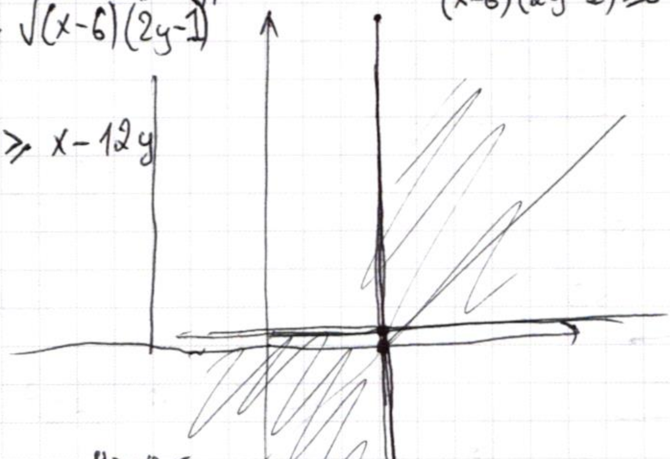
$$\sqrt{15} \geq x-12y$$

$x-6\geq 0$

$x\geq 6$

$2y-1\geq 0$

$y\geq 0,5$



$y\geq 0,5$

$$y \geq \frac{x-\sqrt{15}}{12}$$

$$2y \geq \frac{1}{2}+\frac{x}{12}-\frac{\sqrt{15}}{12}$$

$$y \geq \frac{1}{4}+\frac{x}{24}-\frac{\sqrt{15}}{24}$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \frac{x-\sqrt{15}}{12} \geq 0,5 \\ x\geq 6 \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{x-\sqrt{15}}{12} \leq 0,5 \\ x \leq 6 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \Big[\quad \Big]$$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)