МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 3 ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам
$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{8}{17}.$$
Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений
$$\begin{cases}3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2},\\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4.\end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство
$$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x\geqslant |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{5}{2}$, $BD=\frac{13}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $3\leqslant x\leqslant 27$, $3\leqslant y\leqslant 27$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство
$$\frac{4x-3}{2x-2}\geqslant ax+b\geqslant 8x^2-34x+30$$
выполнено для всех x на промежутке $(1;3]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $PQRS$, вершина P которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра PQ. Известно, что $QR=2$, $QS=1$, $PS=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра RS. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 5 Так как $f(ab) = f(a) + f(b) \Rightarrow f(x) = f(\frac{x}{y}) + f(y)$

$(x \neq 0)$ $\Rightarrow f(\frac{x}{y}) = f(x) - f(y)$.

Таблица значений $f(x)$ для $1 \leq x \leq 27$ $\underline{x}$ - простое число

x	1	$\underline{2}$	$\underline{3}$	4	$\underline{5}$	6	$\underline{7}$	8	9	10	$\underline{11}$	12	$\underline{13}$	14	15	16	$\underline{17}$	18	$\underline{19}$	20	21	22	$\underline{23}$	24	25	26	27
$f(x)$	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	2	0	3	1	1	0	4	0	4	1	1	2	5	0	2	3	0

Так как $f(p) = [\frac{p}{4}]$, то ~~$f(x)$~~ если $x = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n}$,

то $f(x) = f(p_1^{\alpha_1}) + f(p_2^{\alpha_2}) + \ldots + f(p_n^{\alpha_n}) =$

$$= \underline{\alpha_1 f(p_1) + \alpha_2 f(p_2) + \ldots + \alpha_n f(p_n)}, \quad (*)$$

$p_{1 \ldots n}$ - простые числа; $\alpha_1 \ldots \alpha_n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

Заполним таблицу, определяя $f(x)$ для простых x по определению, а для остальных чисел - пользуясь равенством $(*)$.

$f(\frac{x}{y}) < 0 \Leftrightarrow f(x) - f(y) < 0 \Leftrightarrow f(x) < f(y)$.

Подсчитаем количество аргументов $\in \mathbb{N}$ на отрезке $[3; 27]$, дающих каждое из возможных значений $f(x)$:

значение f	количество
0	10
1	7
2	3
3	2
4	2
5	1

Будем перебирать значения $f(x)$.

Для каждого $f(x)$ подходят только $f(y) > f(x)$ $\Leftrightarrow$

Всего количество пар

$$N = \underbrace{10 \cdot (7+3+2+2+1)}_{f(x)=0} + \underbrace{7(3+2+2+1)}_{f(x)=1} +$$

$$+ \underbrace{3 \cdot (2+2+1)}_{f(x)=2} + \underbrace{2(2+1)}_{f(x)=3} + \underbrace{2 \cdot 1}_{f(x)=4} =$$

$$= 10 \cdot 15 + 7 \cdot 8 + 3 \cdot 5 + 2 \cdot 3 + 2 = 150 + 56 + 15 + 6 + 2 =$$

$= 229$ Ответ: 229.

№ 6 $\quad \frac{4x-3}{2x-2} \geq ax+b \geq 8x^2-34x+30$

Пусть $f(x) = \frac{4x-3}{2x-2}$, $g(x) = 8x^2-34x+30$.

1). $f(x) = \frac{2(2x-2)+1}{2x-2} = 2 + \frac{1}{2x-2}$ – гипербола с горизонт. асимптотой $y=2$ и вертикальной асимптотой $x=1$

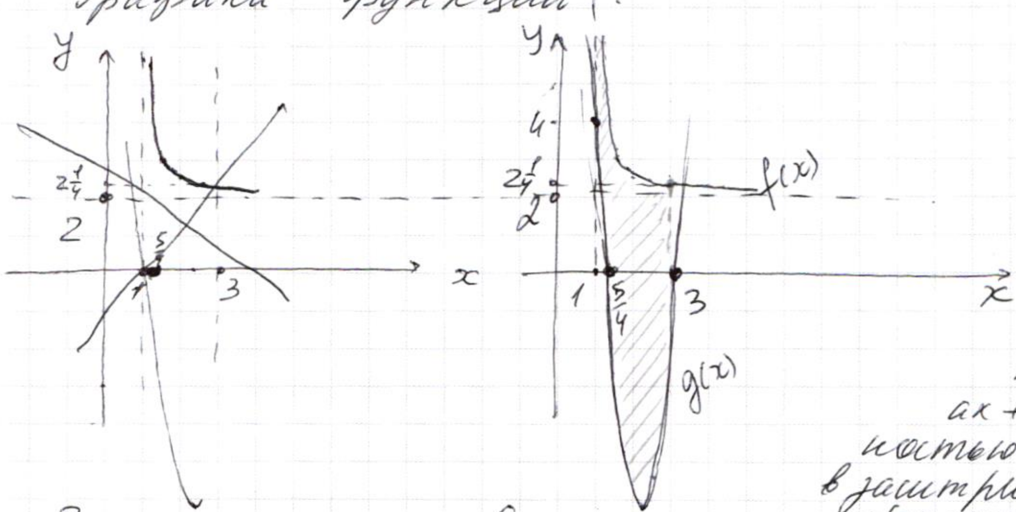
$f'(x) = -\frac{1}{2(x-1)^2}$

2) $g(x)$ – парабола ветвями вверх

вершина: $x_0 = \frac{34}{16} = \frac{17}{8}$ $\quad f(x_0) = 8\cdot\frac{289}{64} - \frac{34\cdot 17}{8} + 30 = -\frac{49}{8}$.

$g(x) = 0 \Leftrightarrow 8x^2-34x+30=0 \quad D = 17^2\cdot 4 - 30\cdot 8\cdot 4 = 4(289-240) = 2^2\cdot 7^2$ $\quad x_{1,2} = \frac{34\pm 14}{16} = \left[\begin{array}{l}3\\ \frac{5}{4}\end{array}\right.$

Графики функций:



$ax+b$ – прямая по условию, на $[1;3]$ она должна быть выше $g(x)$ и ниже $f(x)$ $\Leftrightarrow$ на $[1;3]$ $ax+b$ должна полностью находиться в заштрихованной области (между графиками).

Пусть $q(x) = ax+b$.

$\cancel{\text{Тогда } f(1) \geq g(1) = 4}$

$\cancel{g(3) \leq f(3) = 2\frac{1}{4}}$

$\cancel{g(3) \geq g(3) = 0}$

На промежутке $[1;3]$ $f(x)$ выпукла вниз $f''(x) = \frac{1}{(x-1)^3} > 0 \Rightarrow$ она находится выше касательной к любой точке при $x \in (1;3] \Rightarrow$ пусть $k(x)$ – касательная с углом наклона a. тогда $q(x)$ должна быть не выше $k(x)$.

Заметим, что прямая, проходящая через $(1;4)$ и $(3;2\frac{1}{4})$ имеет уравнение $y = -2x+6$ и является касательной к $f(x)$ в точке $x_0 = \frac{3}{2}$: $f(x_0) = 3$; $f'(x_0) = -2$

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$y(\frac{3}{2}) = 3.$ Значит, пара $(-2;6)$ – решение.

~~Пусть Общее уравнение касательной к~~ $f(x)$:

$k(x) = f'(x^*)\cdot(x-x^*) + f(x^*)$. x^* – точка касания.

~~При $x^* < \frac{3}{2}$ $f'(x^*) < -2$, а $f(x^*) > 3 \Rightarrow$~~

~~$k(3) = f'(x^*)(3-x^*) + f(x^*) > -2(3-x^*)+3 =$~~

~~$= 2x^* - 3$~~

~~$\begin{cases} -f(x^*) > 2 \\ -x^* > -\frac{3}{2} \end{cases}$~~

~~$k(3) = f'(x^*)(3-x^*) + f(x^4) \geq$~~

~~$= -f(x^*)(3- =$~~

Чтобы находиться между графиками, прямая должна удовлетворять условиям (необходимые условия):

$\begin{cases} g(1) \geq g(1) = 4 \\ g(3) \geq g(3) = 0 \\ g(3) \leq f(3) = 2\frac{1}{4} \end{cases}$

Любые другие прямые $ax+b$, ~~проходящие~~ пересекающие ~~пр~~ границу $x=1$ выше $(1;4)$ и пересекающие $x=3$ выше $(3;0)$ будут выше данной касательной $\Rightarrow$ они будут на некотором отрезке $[c;d] \in (1;3]$ выше $f(x) \Rightarrow$ не подходят.

Ответ: $(a;b) = (-2;6)$.

№ 3

$$3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5} - x^2$$

Чтобы логарифм в левой части был определен, должно выполняться условие $x^2+6x > 0$.

$\overset{ОДЗ}{\Longleftrightarrow}$ $3^{\log_4(x^2+6x)} \geq (x^2+6x)^{\log_4 5} - (x^2+6x)$

ОДЗ: $x^2+6x > 0$

Пусть $t = x^2+6x$, $t > 0$.

$$3^{\log_4 t} \geq t^{\log_4 5} - t$$

Пусть $k = \log_4 t \Rightarrow t = 4^k$

Тогда $3^k \geq (4^k)^{\log_4 5} - 4^k$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

$\Leftrightarrow 3^k \geq (4^k)^{\log_4 5} - 4^k \Leftrightarrow \cancel{3^k \geq 5^k - 4^k}$

$3^k \geq 4^{k \cdot \log_4 5} - 4^k$

$3^k \geq 5^k - 4^k \Leftrightarrow 3^k + 4^k \geq 5^k$

~~Рассмотрим равенство~~ $\cancel{3^k + 4^k = 5^k}$. ~~По~~

~~Согласно Большой (Великой) теореме Ферма, данное равенство имеет решения~~

~~Заметим, что при~~ $\cancel{k = 2 \quad 3^2 + 4^2 = 25 = 5^2}$

~~При Так как~~ $\cancel{5^k = (4+1)^k = 4^k + C_k^1 4^{k-1}} + \underbrace{C_k^2 4^{k-2} + \ldots + 1}_{f(k)} =$

$= \cancel{4^k + k \cdot 4^{k-1} + f(k)}$, $f(k) > 0$.

$\cancel{k \cdot 4^{k-1}}$

$3^k + 4^k = (3+4)^k - C_k^1 \cdot 4^{k-1} \cdot 3 - \underbrace{C_k^2 4^{k-2} \cdot 3^2 - \ldots}_{f(k)} - C_k^{k-1} 4 \cdot 3^{k-1} =$

$= 7^k - \underbrace{k \cdot 3 \cdot 4^{k-1} - k \cdot 4 \cdot 3^{k-1} - f(k)}_{p(k)}$

$p(k)$ возрастает по $k \Rightarrow$

~~Ре~~ при $k > 2 \quad 3^k + 4^k < 5^k$, а при $k < 2$

$3^k + 4^k > 5^k$.

$\overset{-}{\longrightarrow} 2 \overset{+}{\longrightarrow} +$

$k = 2 \Rightarrow t = 16 \Rightarrow x^2 + 6x - 16 = 0 \quad D = 36 + 64 = 10^2$

$x_{1,2} = \frac{-6 \pm 10}{2} = \left[\begin{array}{l} 2 \\ -8 \end{array}\right.$

Ответ: $x \in (-\infty; -8] \cup [2; +\infty)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 2 $\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2} \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \end{cases}$ Заметим, что $\sqrt{3xy-2x-3y+2} = \sqrt{(3y-2)(x-1)}$,

а $3y-2x = (3y-2) - 2(x-1)$

Пусть $p = 3y-2$, $q = x-1$. Так как под корнем должно быть неотрицательное выражение, возможны 2 варианта:

1) $\begin{cases} p \geq 0 \\ q \geq 0 \end{cases}$ $p^2 = 9y^2-12y+4$ $q^2 = x^2-2x+1 \Rightarrow$

$\frac{p^2}{3} + 3q^2 = 3y^2+3x^2-6x-4y+4\frac{1}{3}$

Подставим p и q в исходную систему:

$\begin{cases} p-2q=\sqrt{pq} \\ \frac{p^2}{3}+3q^2 = 8\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p-2q=\sqrt{pq} \\ p^2+9q^2=25. \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases} p^2 - \cancel{4pq} + q^2 = 5pq \\ p^2+9q^2=25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8q^2 = 25-5pq \\ 8p^2 = 45pq-25 \end{cases}$

1. $8q^2+5pq-25=0$ $D = 25p^2+4\cdot 25\cdot 8 = \cancel{25p^2+8}$
$= 25(p^2+32) \Rightarrow q_{1,2} = \frac{-5p \pm 5\sqrt{p^2+32}}{16}.$

2. $8p^2-45pq+25=0$ $D = 25\cdot 81q^2 - 25\cdot 8\cdot 4 =$
$= 25(\cancel{p^2}\,81q^2-32)$ $p_{1,2} = \frac{45\cancel{p}q \pm 5\sqrt{81q^2-32}}{16}$

~~Заметим~~ Пусть ~~, что~~ , что $\begin{cases} q_1>0 \\ q_2<0 \end{cases}$ $\begin{cases} p_1>0 \\ p_2<0 \end{cases}$

$q_1 = \frac{-5p+5\sqrt{p^2+32}}{16}$ $q_1^2 = \frac{1}{256}\left((-5p+5\sqrt{p^2+32})^2\right)$

$p_1 = \frac{45q + 5\sqrt{81q^2-32}}{16}$

$p_1 = \frac{45q_1}{16} + \frac{5}{16}\sqrt{\frac{81(-5p+5\sqrt{p^2+32})^2-32}{16}}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1. $\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ (1); $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$ (2)

1. Преобразуем равенство (2): $2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta + \sin 2\alpha = -\frac{8}{\sqrt{17}}$

Подставим значение из (1):

$$-\frac{2}{\sqrt{17}}\cdot\cos 2\beta + \sin 2\alpha = -\frac{8}{\sqrt{17}} \quad (3)$$

~~2. Вычтем из (2) (1)~~ :

$\cancel{\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha - \sin(2\alpha+2\beta)}$

тогда $\sin 2\alpha = -\frac{8}{\sqrt{17}} + \frac{2}{\sqrt{17}}\cos 2\beta =$

$= \frac{2}{\sqrt{17}}(\cos 2\beta - 4)$

$\cancel{\frac{2}{\sqrt{17}}(\cos 2\beta - 4)}$

1. Преобразуем (2): $2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17} \Leftrightarrow$

$$-\frac{2}{\sqrt{17}}\cos 2\beta + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17} \Rightarrow \sin 2\alpha = -\frac{8}{17} + \frac{2}{\sqrt{17}}\cos 2\beta$$

2. Вычтем из (2) (1):

$$\sin(2\alpha+4\beta) - \sin(2\alpha+2\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17} + \frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$2\sin\beta\cos(2\alpha+3\beta) - \cancel{\frac{8}{17}} + \frac{2}{\sqrt{17}}\cos 2\beta = -\cancel{\frac{8}{17}} + \frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$2\sin\beta(\cos(2\alpha+2\beta)\cos\beta - \sin(2\alpha+2\beta)\sin\beta) + \frac{2}{\sqrt{17}}\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}$$

Из (1) получаем, что $\cos(2\alpha+2\beta) = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}$

1) $\cos(2\alpha+2\beta) = \frac{4}{\sqrt{17}}$

$$2\sin\beta\cdot\frac{4}{\sqrt{17}}\cos\beta + \frac{2}{\sqrt{17}}\sin\beta + \frac{2}{\sqrt{17}}\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$\sin 2\beta\cdot\frac{4}{\sqrt{17}} + \sin\beta\cdot\frac{2}{\sqrt{17}} + \cos 2\beta\cdot\frac{2}{\sqrt{17}} = \frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$\frac{8}{\sqrt{17}}\sin\beta\cos\beta+\frac{1}{\sqrt{17}}\sin\beta+\frac{2}{\sqrt{17}}-\frac{4}{\sqrt{17}}\sin^2\beta=\frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$\cancel{\frac{4}{\sqrt{17}}\sin\beta(2\cos\beta-\sin\beta)-\frac{1}{\sqrt{17}}(\sin\beta+1)}$$

$$\frac{8}{\sqrt{17}}\sin\beta\cos\beta+\frac{2}{\sqrt{17}}\sin\beta-\frac{4}{\sqrt{17}}\sin^2\beta+\frac{1}{\sqrt{17}}=0$$

$$\cancel{\frac{2}{\sqrt{17}}\sin\beta(4\cos\beta+1)-\frac{1}{\sqrt{17}}(4\sin^2\beta-1)=0}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta + \sin 2\alpha = -\frac{8}{\sqrt{17}}$ $\cos(2\alpha+2\beta) = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}$

(1) $-\frac{2}{\sqrt{17}}\cos 2\beta + \sin 2\alpha = -\frac{8}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha = -\frac{8}{\sqrt{17}} + \frac{2}{\sqrt{17}}\cos 2\beta$

$\sin(2\alpha+4\beta) - \sin(2\alpha+2\beta) = 2\sin\beta\cos(2\alpha+3\beta) =$

$= 2\sin\beta(\cos(2\alpha+2\beta)\cos\beta - \sin(2\alpha+2\beta)\sin\beta) =$

$= 2\sin\beta\cos\beta\cdot\frac{4}{\sqrt{17}} + \frac{\sin\beta}{\sqrt{17}} = \sin 2\beta\cdot\frac{4}{\sqrt{17}} + \frac{\sin\beta}{\sqrt{17}} = -\frac{8}{\sqrt{17}} - \sin 2\alpha + \frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\beta\cdot\frac{4}{\sqrt{17}} + \sin\beta\cdot\frac{1}{\sqrt{17}} = -\frac{\cancel{7}}{\sqrt{17}} - \sin 2\alpha$

~~$\sin 2\beta\cdot\frac{4}{\sqrt{17}} + \sin\beta\cdot\frac{1}{\sqrt{17}} = -\frac{7}{\sqrt{17}} + \frac{8}{\sqrt{17}} - \frac{2}{\sqrt{17}}\cos 2\beta$~~

~~$\sin 2\beta\cdot\frac{4}{\sqrt{17}} + \sin\beta\cdot\frac{1}{\sqrt{17}} = \frac{1}{\sqrt{17}} - \frac{2}{\sqrt{17}}\cos 2\beta$~~

~~$\frac{8}{\sqrt{17}}\sin\beta\cos\beta + \frac{4}{\sqrt{17}}\cos^2\beta - \frac{2}{\sqrt{17}} + \sin\beta\cdot\frac{1}{\sqrt{17}} - \frac{1}{\sqrt{17}} = 0$~~

$\sin 2\alpha = -\frac{8}{\sqrt{17}} + \frac{2}{\sqrt{17}}\cos 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}\cos^2\beta - \frac{10}{\sqrt{17}}$

$\cos 2\alpha = \pm\sqrt{1 - \frac{4}{17}(\cos 2\beta - 4)^2}$ ~~$= \sqrt{1 - \frac{4}{17}\cos 2\beta}$~~

$= \sqrt{1 - \frac{4}{17}\cos^2 2\beta + \frac{32}{17}\cos 2\beta - \frac{64}{17}} =$

$= \sqrt{-\frac{4}{17}\cos^2 2\beta + \frac{32}{17}\cos 2\beta - \frac{47}{17}}$ $= -\frac{8}{\sqrt{17}} + \frac{2}{\sqrt{17}}\cos 2\beta$

$= \sqrt{}$ $= \frac{2}{\sqrt{17}}(\cos 2\beta - 4)$

$\sin(2\alpha+3\beta)\cos\beta$

$\sin(\quad(2\alpha+2\beta))\cos\beta =$ $-\frac{10}{\sqrt{17}}$

$-\frac{6}{\sqrt{17}}$

$= (\sin(2\alpha+2\beta)\cos\beta + \sin\beta\cos(2\alpha+2\beta))$

$\sin\beta\cos\beta\cos(\ )$

$= \sin(\ )\cos^2\beta + \sin\beta\cos\beta$

$-\frac{8}{17} - \sin 2\alpha + \frac{1}{\sqrt{17}} - \frac{8}{\sqrt{17}} - \frac{8}{\sqrt{16}} = -2$

$\sin 2\beta\frac{4}{\sqrt{17}} + \frac{\sin\beta}{\sqrt{17}} = $

$$\sin 2\alpha = -\frac{8}{17} + \frac{2}{\sqrt{17}}\cos 2\beta = \frac{2}{\sqrt{17}}\left(\cos 2\beta - \frac{4}{\sqrt{17}}\right)$$

$$\cancel{\cos 2\alpha =} \quad \cos 2\alpha = \sqrt{1 - \frac{4}{17}\left(\cos 2\beta - \frac{4}{\sqrt{17}}\right)^2} =$$

$$\cancel{= 1 - \frac{4}{17}\cos^2 2\beta + \frac{32}{}}$$

8

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5. $f(x) = f(\frac{x}{y}) + f(y) \qquad f(\frac{x}{y}) = f(x) - f(y)$

$f(3) = 0 \quad f(4) = 2f(2) = 0 \quad f(5) = 1$

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
0	0	0	1	0	1	0	0	1	2	0	3	1	1	0	4	0	4	1	1	3	5	0	2	3	0

0 − 12
1 − 7
2 − 2
3 − 3
4 − 2
5 − 1

$12\cdot(7+2+3+2+1) + 7\cdot(2+3+2+1) +$
$+2(3+2+1) + 3(2+1) + 2\cdot 1 =$
$= 12\cdot 15 + 7\cdot 8 + 2\cdot 6 + 3\cdot 2 + 2 =$
$= 180 + 56 + 12 + 6 + 2 = 236 + 20 = 256.$

$f'(x) - g'(x) \geq 0$

$f'(x) \geq g'(x)$

$-x^2+6x+10$

$f'(x) = -2x+6 \quad f'' = -8$

$x = 3$

$\begin{array}{r} 206 \\ \times\ 15 \end{array}$

$\begin{array}{r} 221 \\ \times\ 8 \\ \hline 229 \end{array}$

$f'(x) = -\frac{1}{2(x-1)^2} = -2$

$(1;4) \to \cancel{y}\ x=2$

$(x-1)^2 = \frac{1}{4}$

$x-1 = \frac{1}{2}$

$x = 1\frac{1}{2}$

6. $\frac{4x-3}{2x-2} \geq ax + b \geq 8x^2 - 34x + 30$

$f(x) = \frac{4x-3}{2x-2} = \frac{2(2x-2)+1}{2x-2} = 2 + \frac{1}{2x-2}.$

$\left(f(x) - g(x)\right) \geq 0$

$g(x) = 8x^2 - 34x + 30 \qquad x_0 = \frac{34}{16} = \frac{17}{8} \qquad f(x_0) = 8\cdot\frac{289}{64} - \frac{34\cdot 17}{8} + 30 =$

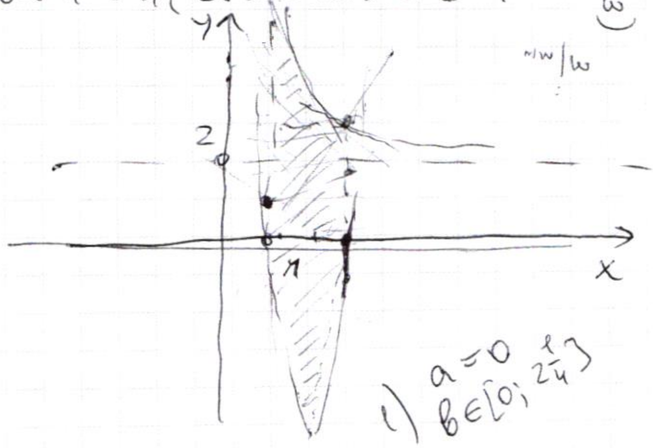
$= \frac{289}{8} - \frac{2\cdot 289}{8} + 30 = -\frac{289}{8} + 30 = -\frac{49}{8}.$

$D = 34^2 - 30\cdot 8\cdot 4 = 17^2\cdot 4 - 30\cdot 8\cdot 4 = 4(289-240) = 2^2\cdot 7^2$

$(\frac{3}{2}; 3)$

$x_{1,2} = \frac{34 \pm 14}{16} = \left[\begin{array}{l} 3 \\ \frac{5}{4} \end{array}\right.$

$\frac{3}{2}$



$f(3) = 2 + \frac{1}{4} = 2\frac{1}{4}$

$f'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}\right)' = -\frac{1}{2}\frac{1}{(x-1)^2}$

$f'(3) = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} = -\frac{1}{8}$

$a = -\frac{1}{8}$

$f''(x) = \frac{1}{(x-1)^3}$

1) $a = 0 \quad b \in [0; 2\frac{1}{4}]$

$\cancel{g'} \geq 0$

$\begin{cases} a+b \geq 0 \\ 3a+b \geq 2\frac{1}{4} \end{cases}$

$\begin{cases} 2a \geq 2\frac{1}{4} \\ b \geq -a \end{cases}$

$\{ a \geq$

$\begin{cases} a+b \geq 4 \\ 3a+b \leq \frac{9}{4} \\ 3a+b \geq 0 \end{cases}$

1) $a = 0$
$b \in [0; 2\frac{1}{4}]$

2) $a > 0$

$\begin{cases} -a-b \leq -4 \\ 3a+b \leq \frac{9}{4} \end{cases}$

$2a \leq -\frac{7}{4}$

$a \leq -\frac{7}{8}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

~~$k(x) = f'(x_0)\cdot(f(x) - f(x_0))$~~

$k(x) = ax + b \quad a = f'(x_0)$

$f'(x_0)\cdot x_0 + b = f(x_0)$

$b = f(x_0) - f'(x_0)x_0$

$k(x) = f'(x_0)\cdot x + f(x_0) - f'(x_0)\cdot x_0 =$

$= f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ $\quad x_0 = \frac{3}{2}$

$k_1(x) = -2(x - \frac{3}{2}) + 3 = -2x + 6$

$k_1(1) = 4 \quad k_1(3) = 0$

$\sin 2\alpha\cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$-\frac{2}{\sqrt{17}}\cos 2\beta + \sin 2\alpha = -\frac{8}{\sqrt{17}}$

$2\sin(2\alpha + 2\beta)\cos 2\beta = -\frac{8}{17}$

$-\frac{2}{\sqrt{17}}\cos 2\beta = -\frac{8}{\sqrt{17}}$

$f'(x)(x - x^*) + f(x^*)$

$f'(x^*)(3 - x^*) + f(x^*)$

$3f'(x^*) - f'(x^*)x^* + f(x^*) \geq 0$

$3f'(x^*) - f'(x^*)x^* + f(x^*) \geq 0$

$3^{\log_4 t} \geq t^{\log_4 5} - t$

$k = \log_4 t \quad t = 4^k$

~~$k\log_4 3 \geq k + 1$~~

$3^k \geq 4^k(4$

~~$3^k \geq 4^k(5^{\log_4 5})$~~

$3^k \geq 4^{k\cdot\log_4 5} - 4^k$

$3^k \geq 5^k - 4^k$

$k\log_4 3 \geq \log_4(5^k - 4^k)$

$5^k - 4^k - 3^k \leq 0$

~~$f(x) = 5^k \log_4 5$~~

$4^k = p$

$3^k = p^{\log_4 3}$

$5^k = (4^{\log_4 5})^k = p^{\log_4 5}$

$x^2 + 6x$

$t^{\log_4 \frac{5}{4}} = 2$

$t = 2^{\frac{1}{\log_4 \frac{5}{4}}} = 2^{\log_{\frac{5}{4}} 4} = x^2 + 6x$

$x(x + 6)$

$-6 \quad x_1 \quad x_2 \quad 0$

$x^2 + 6x - 2^{\log_{\frac{5}{4}} 4} = 0$

$D = 36 - 4\cdot 2^{\log_{\frac{5}{4}} 4} = -2^{\log_{\frac{5}{4}} 4 + 2}$

$\frac{-6 \pm \sqrt{36 - \ldots}}{2}$

$3^{\log_4(x^2+6x)} \leq 4^{\log_4(x^2+6x)} =$

$= x^2 + 6x$

$2(x^2 + 6x)$

$(x^2 + 6x)^{\log_4 5}$

$(x^2 + 6x)(2 - (x^2 + 6x)^{\log_4 5 - 1}) > 0$

$-\frac{2}{\sqrt{17}}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{8}{17} \end{cases}$$

$\cos t = \pm \frac{4}{\sqrt{17}}$

$-\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha+4\beta) = \sin(2\alpha+2\beta+2\beta) = \sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta +$
$+ \sin 2\beta\cos(2\alpha+2\beta)$

1) + $\sin(2\alpha+4\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}\cos 2\beta + \frac{4}{\sqrt{17}}\sin 2\beta$

$\sin(2\alpha+4\beta) - \sin(2\alpha+2\beta) = 2\sin\beta\cos(2\alpha+3\beta)$

(5) $3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \ge |x^2+6x| \log_4 x^2$

$3^{\log_4(x^2+6x)} + (x^2+6x) \ge |x^2+6x|$

ОДЗ $x^2+6x>0 \Rightarrow t = x^2+6x$

$-6 \quad 0$

$3^{\log_4 t} + t \ge t^{\log_4 5}$

$3^{\log_4 t} \ge t^{\log_4 5} - t$

$f(t) \qquad g(t)$

$\log_4(3^{\log_4 t}) \ge \log_4(t^{\log_4 5} - t)$

$\log_4 t \log_4 3 \ge \log_4(t^{\log_4 5} - t)$

$p^2+q^2 = 5pq$

$p^2+9q^2 = 25$

$8q^2 = 25-5pq$

$8p^2 = 45pq - 25$

$(p^2+q^2)^2 = 25p^2q^2$

$(25-8q^2)^2 = 25p^2q^2$

$0 = (25-8q^2-8pq)(25-8q^2+5pq)$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$$3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5} - x^2$$

$t = x^2+6x \qquad t > 0$

$g(p) = 3^p$

$g' = 3^p \ln p$

$p' = \frac{1}{t \cdot \ln 4}$

$g'(t) = 3^p \ln \cancel{\log_4 t} \frac{1}{t \ln 4}$

$q = \frac{-5p + 5\sqrt{p^2+32}}{16}$

$x-1 = \frac{-15y + 10 + 5\sqrt{9y^2-12y+36}}{16}$

$\cancel{3^{\log_4 t} + t \geq t^{\log_4 5}}$

$\cancel{f(t) = 3^{\log_4 t} + t - t^{\log_4 5}}$

$\cancel{f'(t) = 3^{\log}}$

$3^{\log_4 t} + t \geq t^{\log_4 5}$

$3^{\log_4 t} \geq t(t^{\log_4 \frac{5}{4}} - 1)$

$\log_4 t \log_4 3 \geq \log_4 t + \log_4 (t^{\log_4 \frac{5}{4}} - 1)$

$\log_4 t(\log_4 3 - 1) \geq \log_4 (t^{\log_4 \frac{5}{4}} - 1)$

$\log_4 t \cdot \log_4 \frac{3}{4} \geq \log_4 (t^{\log_4 \frac{5}{4}} - 1)$

$\log_4 t^{\log_4 \frac{3}{4}} \geq \log_4 (t^{\log_4 \frac{5}{4}} - 1)$

$(\Rightarrow)$

$t^{\log_4 \frac{3}{4}} \geq t^{\log_4 \frac{5}{4}} - 1$

$t^{\log_4 3} \geq t^{\log_4 5} - t^{\log_4 4}$

$\cancel{t^{\log_4 5}} - t - t^{\log_4 3} \geq 0$

$f(t) = ? \qquad f'(t) = \cancel{\log_4 5\, t^{\log_4 \frac{5}{4}} - 1} - \log_4 3\, t^{\log_4 \frac{3}{4}} = 0$

$\cancel{t^{\log_4 \frac{5}{4}}(t^{\log_4 \frac{3}{4}} \leq 1)}$

$\cancel{t^{\log}}$

$5^k = (4+1)^k = 4^k + \cancel{k \cdot 4^{k-1}} \ldots$

$3^k \ln 3 + 4^k \ln 4 \qquad 5^k \ln 5$

$> 9 \ln 3 + 16 \ln 4 > (3^k + 4^k) \ln 5$

$27 + 64 \qquad 125 \qquad 125$

$$\begin{cases} 3y - 2x = \sqrt{3xy - 2x - 3y + 2} \\ 3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 4 \end{cases}$$

$3y(x-1) - 2(x-1)$

$\begin{cases} 3y - 2x = \sqrt{(3y-2)(x-1)} \\ \end{cases}$

$\cancel{y(3y-2)}$

$3x^2 + 3y^2 - 2(3x+2y) = 4$

$3y - 2 + 2 - 2x$

$(3y-2) + 2(1-x) = \sqrt{(3y-2)(x-1)}$

$\frac{p^2}{3} + 3q^2 = 3y^2 + 3x^2 - 4y - 6x + 4\frac{1}{3}$

$\sqrt{pq} = p - 2q$

$\begin{cases} p - 2q = \sqrt{pq} \\ \frac{p^2}{3} + 3q^2 = 8\frac{1}{3} \end{cases}$

$\frac{p^2}{3} = 9y^2 - 12y + 4 = 3y^2 - 4y + \frac{4}{3}$

$3q^2 = 3x^2 - \cancel{6x} + \cancel{3}$

$\begin{cases} p^2 - 4pq + 4q^2 = pq \\ p^2 + 9q^2 = 25 \end{cases}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)