МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 4

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

Проверь.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6},\\ 9x^2+y^2-18x-12y=45.\end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$\left|x^2-26x\right|^{\log_5 12}+26x\geqslant x^2+13^{\log_5\left(26x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=12$, $BD=13$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $4\leqslant x\leqslant 28$, $4\leqslant y\leqslant 28$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{8-6x}{3x-2}\geqslant ax+b\geqslant 18x^2-51x+28$$

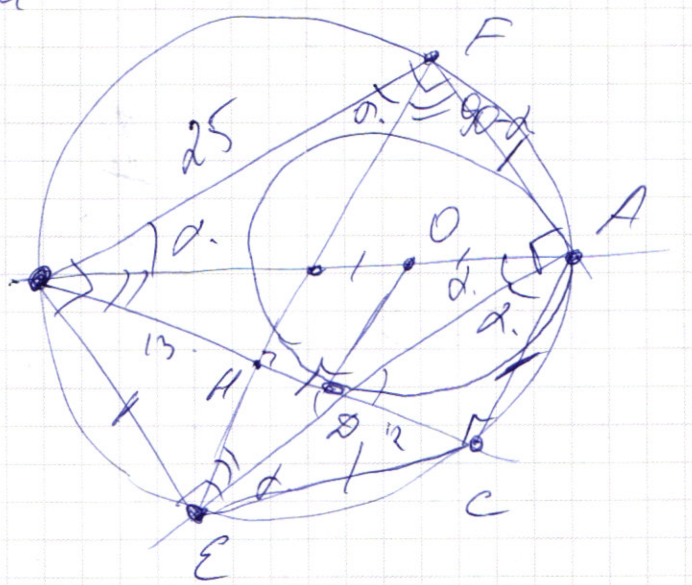
выполнено для всех x на промежутке $\left(\frac{2}{3};2\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $TXYZ$, вершина Y которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра TY. Известно, что $XY=\sqrt{3}$, $TX=\sqrt{2}$, $TZ=2$. Найдите длину ребра XZ. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4

Дано: Ω и ω — окружности.
AB — диаметр.
BC — касат. к ω.
$CD = 12$; $BD = 13$
$EF \perp BC$
$r\,\Omega$ — ?
$r\,\omega$ — ?
$S\,AEF$ — ?
$\angle AEF$ — ?



Решение: Пусть $\angle BAE = \alpha$. BC — касательная $\Rightarrow$
$\Rightarrow \angle BO_1D = 90^\circ \Rightarrow$ т.к. $\angle ABC$ — общий и
$\angle BDO_1 = \angle BCA = 90^\circ \Rightarrow \Delta BO_1D \sim \Delta BAC$.
$\angle BO_1D$ — центральный $\Rightarrow \angle BO_1D = 2\angle BAD = 2\alpha$.
$\angle BAC = \angle BOD \Rightarrow 2\alpha = \alpha + \angle EAC \Rightarrow \angle EAC = \alpha$.
$\angle BCA = 90^\circ$ т.к. опирается на AB.
$CH \perp FE$ и $CH \perp AC \Rightarrow AC \parallel FE$. $\Rightarrow \angle FEA = \angle EAC = \alpha$.
$\angle BAE = \angle BFE = \alpha$ т.к. опираются на BE
$\angle AFE + \angle AEF = 90^\circ \Rightarrow \angle FAE = 90^\circ \Rightarrow \square BFAE$ — прямоугольник. AD — биссектриса $\Rightarrow \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{13}{12}$
$\Delta BAC = \Delta BFA$ по двум сторонам и прямому углу $\Rightarrow BC = BF = 25$
$\cancel{\cos}\ \cancel{tg\,\alpha = \frac{BF}{BE} = \frac{25}{BE} = \frac{AC}{BC} = \frac{BE}{BF}}\ \frac{AB}{AC} = \frac{13}{12} \Rightarrow \cancel{\cos}$
$\cancel{\sin 2\alpha}\ \cos 2\alpha = \frac{AC}{AB} = \frac{12}{13} \Rightarrow 2\alpha = \arccos\frac{12}{13} \Rightarrow \alpha = \frac{\arccos\frac{12}{13}}{2}$
$\Rightarrow \angle AFE = 90 - \alpha$. α — острый, т.к. $\angle ACB = 90^\circ$.

$AB = 2R_\Omega$;

$\frac{AB}{BF} = \cos\alpha \Rightarrow \frac{AB}{25} = \frac{12}{13} \Rightarrow \cancel{AB = \frac{300}{13} \Rightarrow \frac{150}{13}} - \text{радиус.}$

Ω. $2\cos^2\alpha - 1 = \frac{13}{12}\frac{12}{13} \Rightarrow 2\cos^2\alpha = \frac{25}{13} \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{25}{26}$

$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{5}{\sqrt{26}} \Rightarrow \frac{AB}{25} = \frac{5}{\sqrt{26}} \Rightarrow AB = \frac{125}{\sqrt{26}} \Rightarrow \frac{125}{2\sqrt{26}}$ - радиус Ω

Ответ: $\angle AFE = \frac{\pi}{2} - \frac{\arccos\frac{12}{13}}{2}$; $R_\Omega = \frac{125}{2\sqrt{26}}$.

№2 (продолж.)

(1) $x = 0 \Rightarrow y = \sqrt{6 - y}$; $y \geq 0$

$y^2 + y - 6 = 0$; по т. Виета $\left[\begin{array}{l} y = 2 \\ y = -3 < 0 \end{array}\right.$

$\Rightarrow$ не уст.

$y - 6x \geq 0$; - выпол.

(2) $x = 2 \Rightarrow y - 12 = \sqrt{2y - 12 - y + 6}$

$y^2 - 24y + 144 = 2y - 12 - y + 6$

$y^2 - 25y + 150 = 0$; $D = 625 - 600 = 5^2$

$y_{1,2} = \frac{25 \pm 5}{2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y = 15;\ y - 6x = 15 - 12 > 0 \\ y = 10;\ y - 6x = 10 - 12 < 0 \Rightarrow \end{array}\right.$

не уст. $(0;2)$ не уст. т.к. $9(x-1)^2 + (y-6)^2 \neq 90$

Ответ: $(0;2)$; $\cancel{(2;15)}$.

$\sin 2\alpha = \frac{15}{17}$; $\frac{2tg\alpha}{1+tg^2\alpha} = \sin 2\alpha$; т.к. $\frac{2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha} = \sin 2\alpha$.

$\Rightarrow \frac{2tg\alpha}{1+tg^2\alpha} = \frac{15}{17}$; $1+tg^2\alpha > 0 \Rightarrow 34tg\alpha = 15+15tg^2\alpha$

$\Rightarrow 0 = 15tg^2\alpha - 34tg\alpha + 15$; $\frac{D}{4} = 17^2 - 15\cdot 15 = 289-225 =$
$= 64 = 8^2 \Rightarrow tg\alpha = \frac{17\pm 8}{15} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} tg\alpha = \frac{25}{15} = \frac{5}{3} \\ tg\alpha = \frac{9}{15} = \frac{3}{5} \end{array}\right.$

Так как по условию $tg\alpha$ принимает три значения, то подходят все три полученных ответа, ведь иначе значений будет менее трёх.

Ответ: -1; $\frac{5}{3}$; $\frac{3}{5}$.

$|x^2-26x|^{\log_5 12} + (26x-x^2) \geq 13^{\log_5(26x-x^2)}$ №3

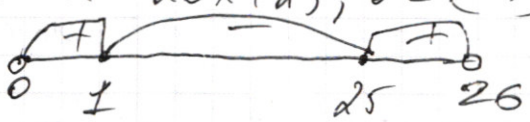
ОДЗ: $26x - x^2 > 0 \Rightarrow x(26-x) > 0 \Rightarrow x \in (0;26)$.*

Пусть $t = \log_5(26x-x^2)$; т.к. $5^t > 0$ (*) $|t| = t$.

$\cancel{t^{\log_5 12}}$ $a^{\log_b c} = c^{\log_b a} \Rightarrow 12^{\log_5(|x^2-26x|)} + (26x-x^2) \geq 13^{\log_5(26x-x^2)}$

$\Rightarrow 12^t + 5^t \geq 13^t$ Заметим, что при $t=2$ возникает равенство: $144+25=169$. $13^t > 0 \Rightarrow$ допустимо на него поделить: $\left(\frac{12}{13}\right)^t + \left(\frac{5}{13}\right)^t \geq 1$; $f(t) = \left(\frac{12}{13}\right)^t + \left(\frac{5}{13}\right)^t$; $f'(t) = \left(\frac{12}{13}\right)^t \ln\frac{12}{13} + \left(\frac{5}{13}\right)^t \times$
$\times \ln\frac{5}{13}$; $\frac{5}{13} < 1$ и $\frac{12}{13} < 1 \Rightarrow \ln\frac{5}{13} < 0$ и $\ln\frac{12}{13} < 0$; $\left(\frac{12}{13}\right)^t > 0$ и $\left(\frac{5}{13}\right)^t > 0$

$\Rightarrow f'(t) < 0 \Rightarrow$ функция монотонно убывает ~~возрастает~~ и при $f(t) \geq f(2)$; ($f(2) = 1$ см. выше) должно выполняться $t \leq 2 \Rightarrow$ ~~$26x-x^2 \leq 2 \Rightarrow 0 \leq x^2-26x+2$~~
~~$\frac{D}{4} = 169+2 = 171$~~) $\log_5(26x-x^2) \leq 2 \Rightarrow$ (26) $\log_5(26x-x^2) \leq \log_5 25$
$g(a) = \log_5 a$ — монотонно возрастает $\Rightarrow$
$f(u) \geq f(w)$ означает $u \geq w$. $\Rightarrow 26x - x^2 \leq 25 \Rightarrow$
$0 \leq x^2 - 26x + 25$; $0 \leq (x^2-x) - (25x-25) \Rightarrow 0 \leq (x-1)(x-25)$



Ответ: $(0;1] \cup [25;26)$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6} \Rightarrow y-6x\geq 0 \\ 9x^2+y^2-18x-12y=\cancel{80}\ 45; \Rightarrow (9x^2-18x+9)+(y^2-12y+36)=90 \end{cases}$

ОДЗ: $xy-6x-y+6\geq 0$ *

$\Rightarrow 9(x-1)^2+(y-6)^2=90$; Пусть $u=x-1$; $w=y-6$.

Тогда: $\begin{cases} w-6u=\sqrt{(x-1)(y-6)} \\ w^2+9u^2=90 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w-6u=\sqrt{uw} \Rightarrow \end{cases}$

$\Rightarrow w^2+36u^2-12uw=uw \Rightarrow w^2-13uw+36u^2=0$

Заметим, что $u\neq 0$, ведь тогда $w^2=0\Rightarrow w=0$, но $9\cdot 0^2+0^2\neq 90 \Rightarrow u\neq 0$.

$u^2\neq 0 \Rightarrow$ допустимо поделить на u^2.

$\frac{w^2}{u^2}-13\frac{w}{u}+36=0$; $t=\frac{w}{u} \Rightarrow t^2-13t+36=0$; $D=169-144=5^2$

$\Rightarrow t_{1,2}=\frac{13\pm 5}{2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t=9 \Rightarrow \cancel{w^2=81u^2 \Rightarrow 81u^2+u^2=90 \Rightarrow u^2=\frac{45}{41}} \\ t=4 \Rightarrow w^2=4u^2 \Rightarrow 13u^2=90 \Rightarrow u=\pm\sqrt{\frac{90}{13}} \end{array}\right.$

$\Rightarrow w^2=81u^2 \Rightarrow 9u^2+81u^2=90 \Rightarrow u^2=1 \Rightarrow u=\pm 1$.

① $u=1 \Rightarrow x=2$; ② $u=-1 \Rightarrow x=0$.

~~① $u=1 \Rightarrow x-1=1 \Rightarrow x=2$; ② $u=-1 \Rightarrow x-1=-1 \Rightarrow x=0$~~

~~③ $w=\sqrt{\frac{90}{13}}=3\sqrt{\frac{10}{13}} \Rightarrow y=6+3\sqrt{\frac{10}{13}}$; ④ $y=6-3\sqrt{\frac{10}{13}}$~~ (см. продолж. на стр. 4.)

~~Заметим, что $uw\geq 0$ (см. *) $\Rightarrow$ допускаются только варианты: $(2; 6+3\sqrt{\frac{10}{13}})$; $(0; 6-3\sqrt{\frac{10}{13}})$.~~

~~Ответ: $(2; 6+3\sqrt{\frac{10}{13}})$; $(0; 6-3\sqrt{\frac{10}{13}})$.~~

№1

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{\sqrt{17}}$; $2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta=-\frac{2}{17}$

$\Rightarrow 2\cdot -\frac{1}{\sqrt{17}}\cdot\cos 2\beta=-\frac{2}{17} \Rightarrow \cos 2\beta=\frac{1}{\sqrt{17}} \Rightarrow \cancel{\cos(\pi-2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}}}$

$\Rightarrow \sin(2\alpha+2\beta)=-\cos 2\beta \Rightarrow \sin(-2\alpha-2\beta)=\cancel{\cos}\sin(\frac{\pi}{2}-2\beta)$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} -2\alpha-2\beta=\frac{\pi}{2}-2\beta+2\pi k; k\in Z \Rightarrow -2\alpha=\frac{\pi}{2}+2\pi k; k\in Z \Rightarrow \\ \Rightarrow \alpha=-\frac{\pi}{4}-\pi k; k\in Z \Rightarrow tg\,\alpha=-1 \\ -2\alpha-2\beta=\pi-(\frac{\pi}{2}-2\beta)+2\pi k; k\in Z \Rightarrow -2\alpha-4\beta=\frac{\pi}{2}+4\beta+2\pi k; k\in Z \end{array}\right.$

$\Rightarrow \sin(2\alpha+4\beta)=\sin(-\frac{\pi}{2}+2\pi k)=-1 \Rightarrow -1+\sin 2\alpha=-\frac{2}{17}$

$\Rightarrow \sin 2\alpha=\frac{15}{17} \Rightarrow \cancel{\cos 2\alpha=\pm\sqrt{1-\frac{225}{289}}=\pm\frac{8}{17}}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$y^2-12xy+36y^2 = ky-6ky$

$(9x^2-18x+9)+(y^2-12y+36)=90$

$(3x-3)^2+(y-6)^2=90$

$\underset{A}{(3x-3)}$ $\underset{B}{(y-6)}$

$\begin{cases} B-2A=\sqrt{x(y-6)-(y-6)} \\ A^2+B^2=90 \end{cases}$

$(x-1)(y-6)$

$\sqrt{\frac{AB}{3}}=B-2A$

$\frac{AB}{3}=B^2-4AB+4A^2$

$t>0$

12^t

$0 \ge 13^t - 12^t + 5^t$

$5>0$

$0 \ge 1$

$\log_5(26x-x^2)$

$0 < 26x-x^2 \le 169$

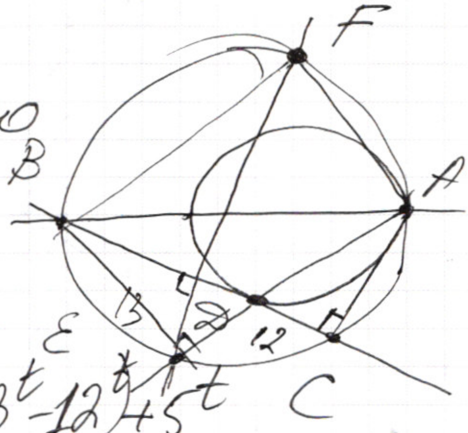
$\frac{1}{12}t \quad \frac{1}{13} \quad \frac{1}{12}$

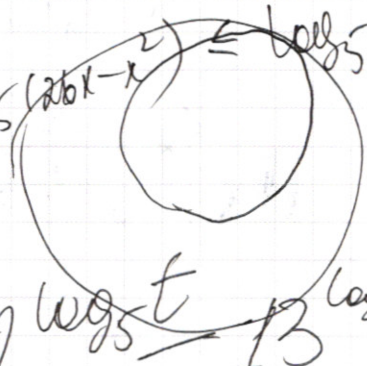
$C \quad \frac{1}{T}$

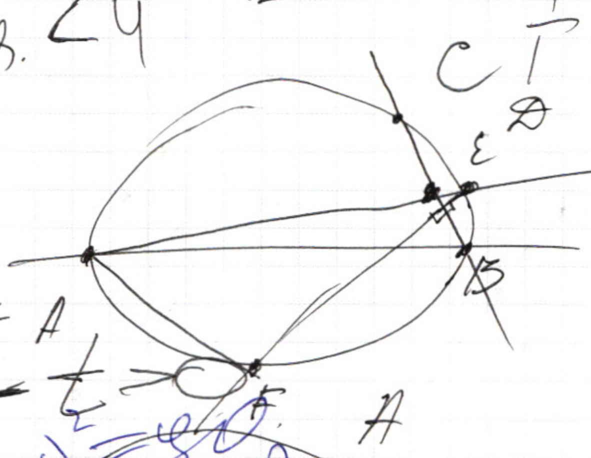
< 4

$0 \le \log_5(26x-x^2) \le \log_5 169$

$0 < \log_5(26x-x^2)$

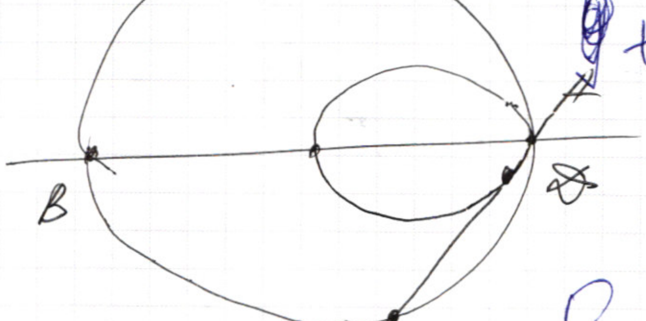


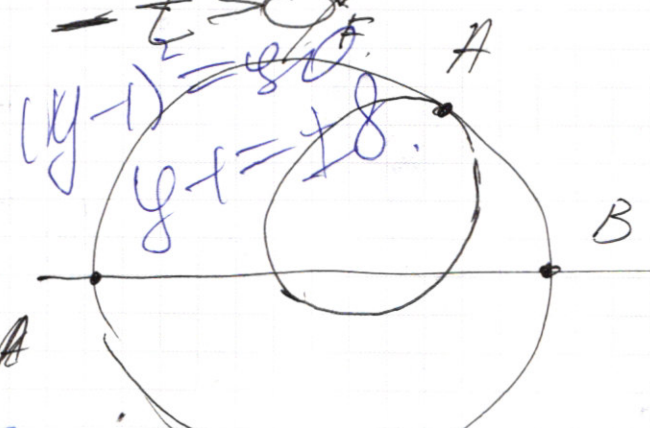




$\angle 12^{\log_5 t} = 13^{\log_5 t}$

$-t$





$9+(y-1)^2=90$

$y-1=18$

$3x \; 9(x-1)^2+(y-6)^2=90$

$9+\log$

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$\sin(-2\alpha-2\beta)=\sin(\frac{\pi}{2}-2\beta)$

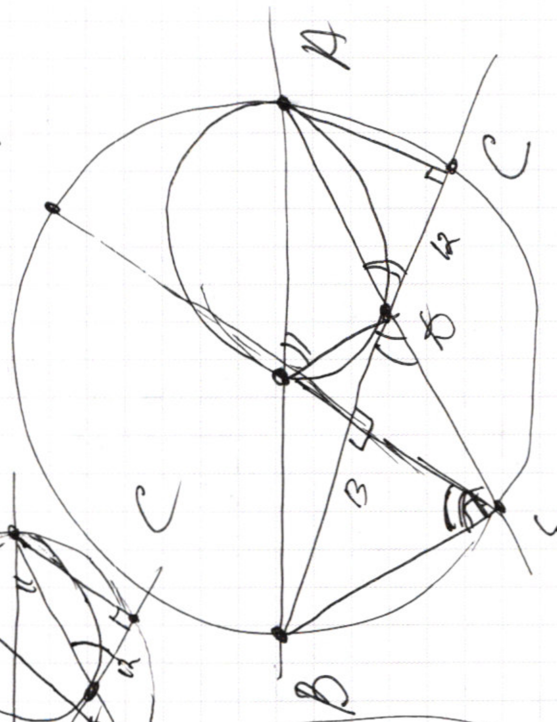
$$\left[\begin{array}{l}-2\alpha-2\beta=\frac{\pi}{2}-2\beta+2\pi k;\\ -2\alpha-2\beta=\frac{\pi}{2}+2\beta+2\pi k\end{array}\right.$$

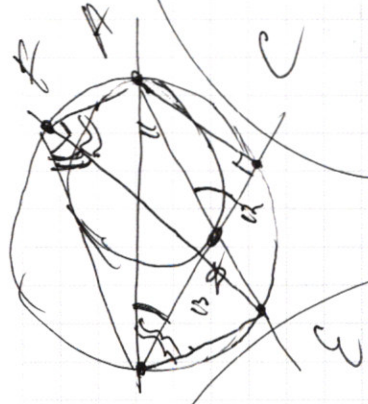
$\cancel{-4\beta=\frac{\pi}{2}-2\alpha+2\pi k}$

$-2\alpha-4\beta=\frac{\pi}{2}+2\pi k.$

$\alpha=-\frac{\pi}{4}-\pi k;\ k\in Z.$

$288-225$





6.4

$\sin 2x=\frac{2\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}^2x}.$

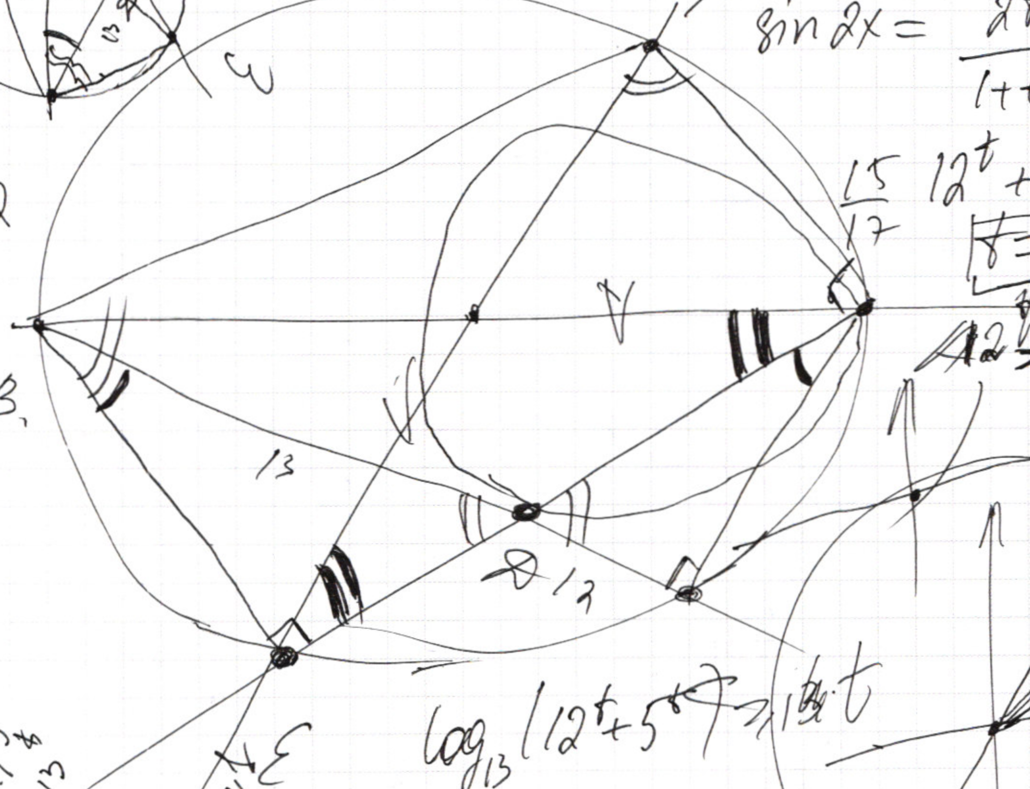
$\frac{15}{17}$

$12^t+5^t\geq 13^t$

$\boxed{t=2}$

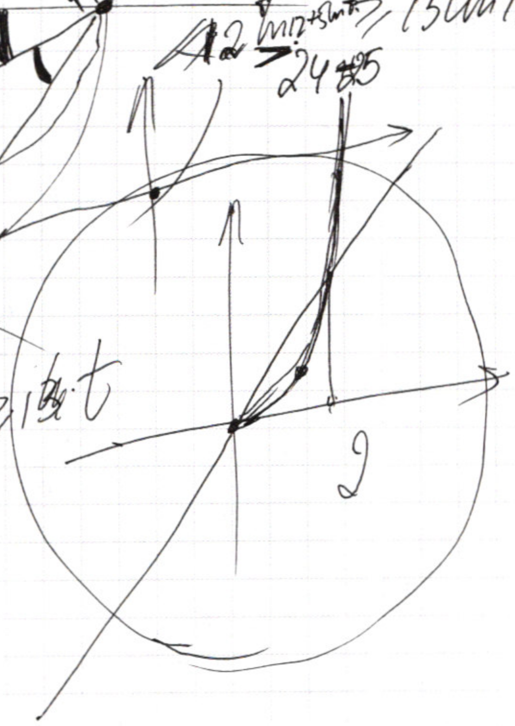
$12^{\ln 12+5\ln 5}\geq 13\ln 13$

$24\ 25$



$\log_{13}(12^t+5^t)\geq t$

$12^{\ln}$



$12^t+5^t\geq 13^t$

$12^t+5^t\geq 13^t$

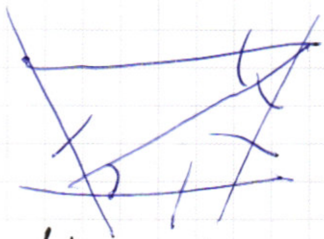
$\left(\frac{12}{13}\right)^t+\left(\frac{5}{13}\right)^t\geq 1$

$\left(\frac{12}{13}\right)^t+\left(\frac{5}{13}\right)^t\geq 1$

$\sin(2\alpha+4\beta)=-\frac{2}{\sqrt{17}} \Rightarrow 2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta=-\frac{2}{17}$

$-\frac{2}{\sqrt{17}}\cdot\cos 2\beta=-\frac{2}{\sqrt{17}}$

$\cos 2\beta=\frac{1}{\sqrt{17}} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\sin 2\beta=\frac{4}{\sqrt{17}}\\ \sin 2\beta=-\frac{4}{\sqrt{17}}\end{array}\right.$



① $\sin 2\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt{17}}+\cos 2\alpha\cdot\frac{4}{\sqrt{17}}=-\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha\pm 4\cos 2\alpha=-1$

$\cancel{\frac{1}{\sqrt{5}}(\sin 2\alpha\pm\frac{4\cos}{\sqrt{}}}$ $\cancel{\frac{1}{\sqrt{5}}}$ $t^{\log 20}=t^{\log_5 12}+t-t^{\log_5 13}$

$\sin(2\alpha\pm\arcsin\frac{4}{\sqrt{17}}$

4^2

$\cos 2\beta=\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\cos 4\beta=\frac{2}{17}-1$

$\begin{cases}\sin(2\alpha\pm 4\cos 2\alpha=-1\\ -\frac{1}{\sqrt{17}}\cdot\cos 2\beta\pm\sin 2\beta\cdot\frac{4}{\sqrt{17}}=-\frac{2}{\sqrt{17}}\end{cases}$ 13

~~$\sin 2a=-1-\cos 4\beta$~~

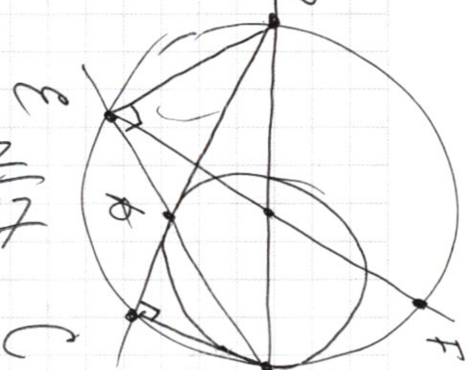
$\cos 2\beta=-\frac{2}{17}$

y

$\sin(\cancel{\ }-2a)$

$f(x^2)=2f(x)$

$\begin{cases}\sin(t)=-\frac{1}{\sqrt{17}}\\ \sin(at-\cancel{2a})=-\frac{2}{17}\end{cases}$



$\sin(at-2a)+\sin 2a=-\frac{2}{17}$

$\sin(2\alpha+2\beta)$

$\sin(2\alpha+4\beta)-\sin(2\alpha+2\beta)\cancel{-\sin 2a}=-\frac{2}{17}\mp\frac{1}{\sqrt{17}}$

$2\sin(2\alpha+3\beta)\cdot\cos 3\beta)$

☐ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$|x^2-26x|^{\log_5 12}+26x \geq x^2+13^{\log_5(26x-x^2)}$

$12^{26x-x^2}+(26x-x^2) \geqslant 13^{\log_5(26x-x^2)}$

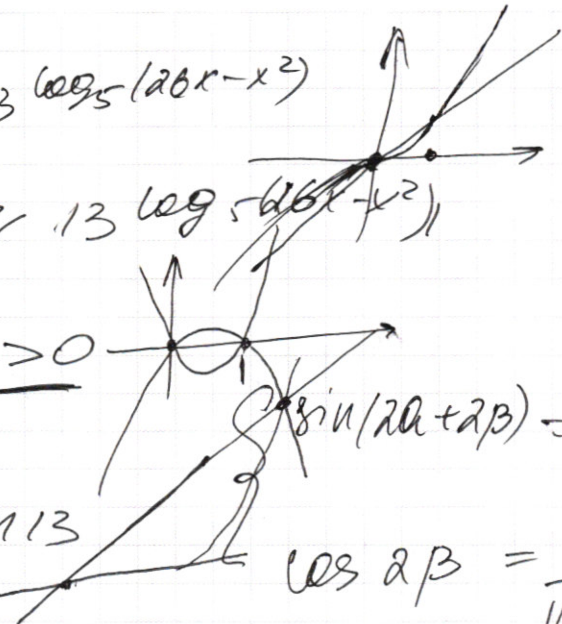
$f(t)=12^t+t-13^t \geq 0$

$f(0)=0.$ $\quad t\geq 0 \quad t>0$

$f(1)=0 \quad 13^t-12^t \cancel{<} t$

$f'(t)=12^t \ln 12+1-13^t \cdot \ln 13$

~~Если $t>1$~~ $f'(t) \geq 0$ <0



$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\cos 2\beta=\frac{1}{\sqrt{17}}$

$2\sin(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha+\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}} \qquad 2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta=0$

$\sin(2\alpha \quad \log_{13}(12^t+5^t)>13^t \quad x\ln \cancel{a}x-y\ln y$

$\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2} \quad t / t$

$\sin 2\alpha + \sin(2\alpha+4\beta)=2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta=-\frac{2}{\sqrt{17}}$

$a^{\log}$

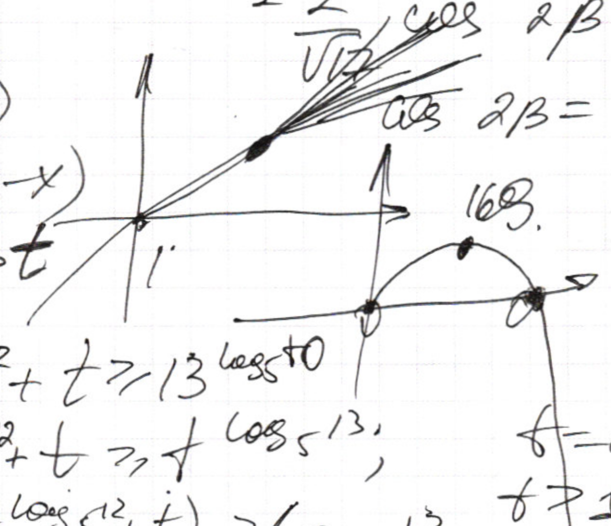
$-\frac{2}{\sqrt{17}} \quad \cos 2\beta=-\frac{2}{\sqrt{17}} \quad 12^t+t \geqslant 13^t$

$\cos 2\beta=\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\log_5(26x-x^2)$

$x(26-x)$

$13^t-12^t>t$



$12^t=13$

$0 \geqslant 13^t-12^t-5^t$

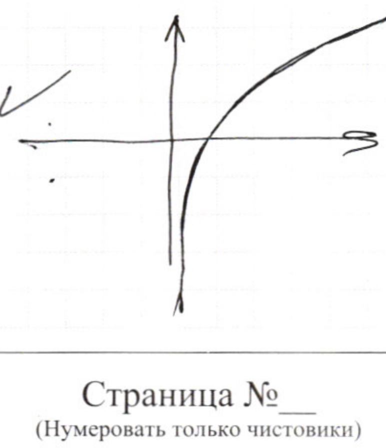
$\cancel{x^2-26}$

$t^{\log_5 12}+t \geqslant 13^{\log_5 t0}$

$t^{\log_5 12}+t \geqslant t^{\log_5 13},$ $\quad t=1$ ✓

$t>1$

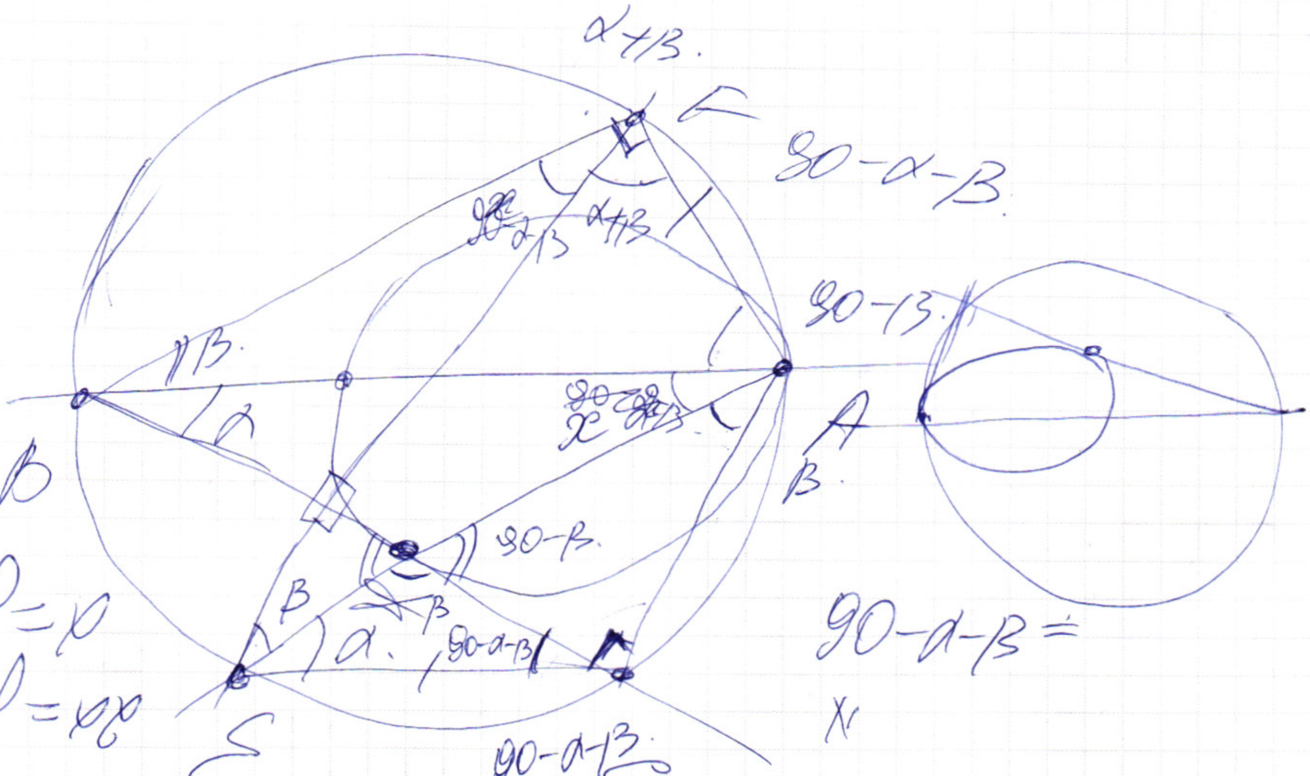
$\log_t(t^{\log_5 12}+t)>\log_5 13.$



$125+144 \quad 144 \cdot 12 = 288+1440=1728.$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)



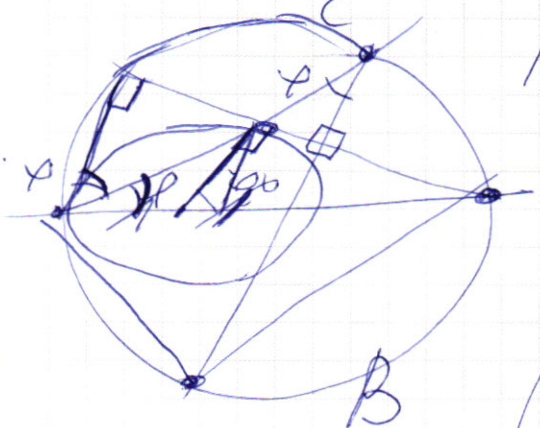
$\beta = \alpha$

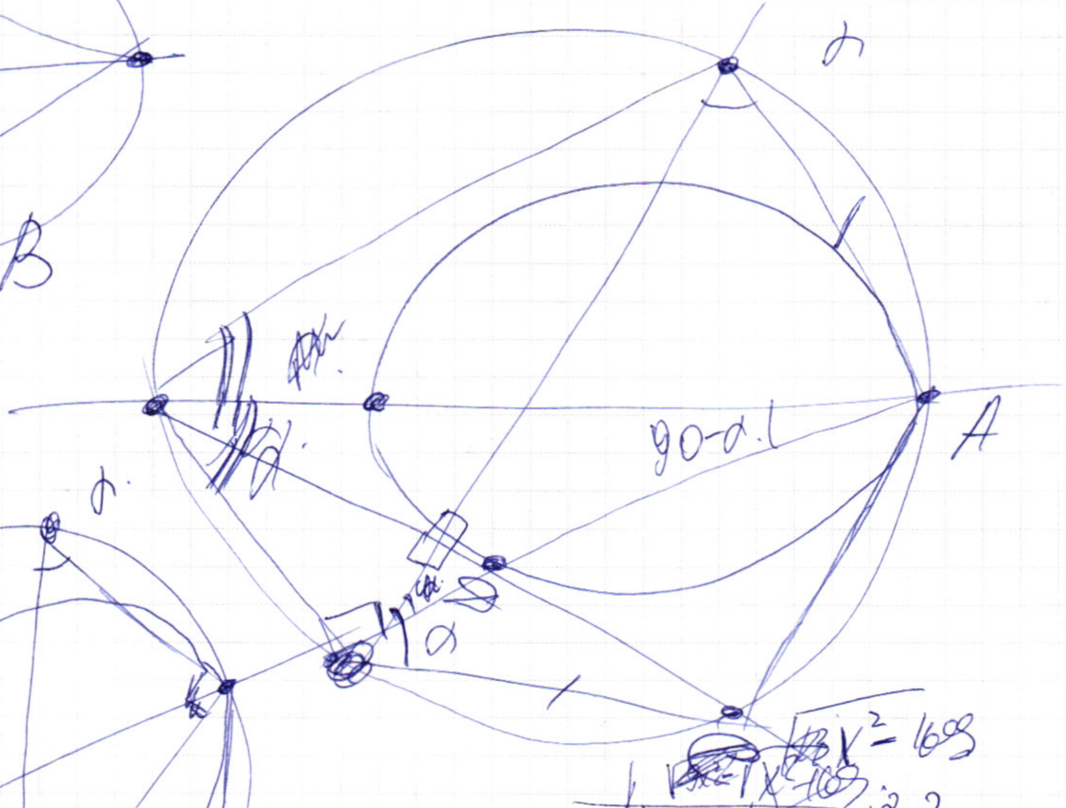
$\alpha + \beta = 2\alpha$

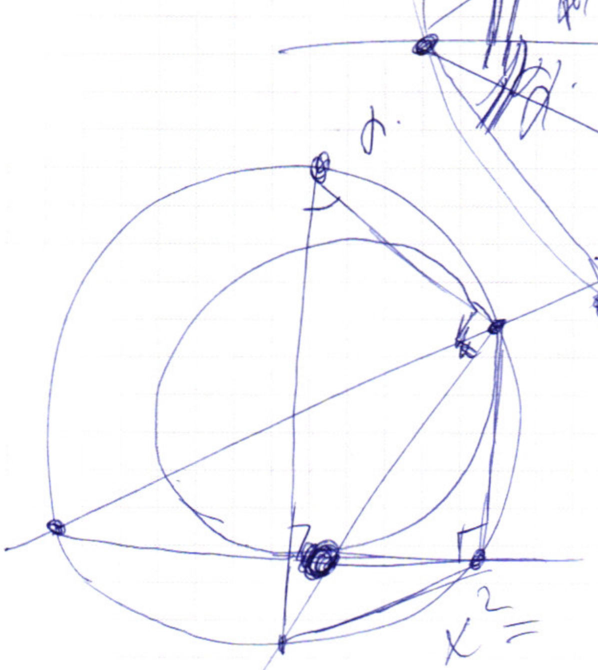
$90 - \alpha - \beta =$

$90 - \alpha - \beta$

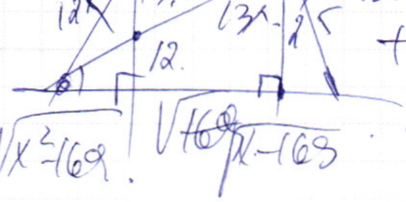
$180 - \alpha - \beta = 9$







$x^2 =$



$13x^2 = 1693$

$13x^2 = 625 +$

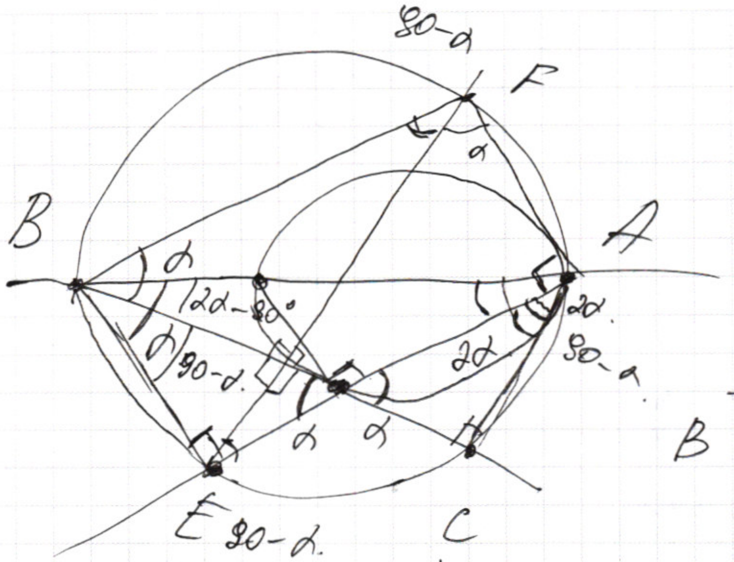
$+ 169 \cdot 13^2 (x^2 - 169)$

$12\sqrt{x^2-169}$

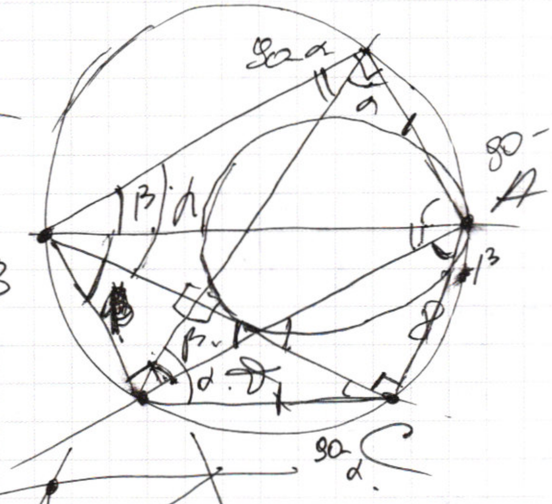
$\sqrt{169x^2 - 169}$

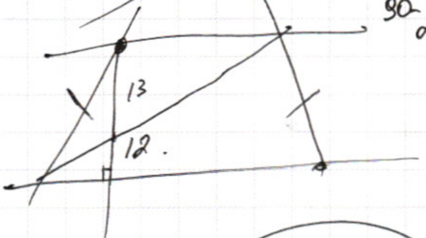
$\sqrt{x^2 - 169}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

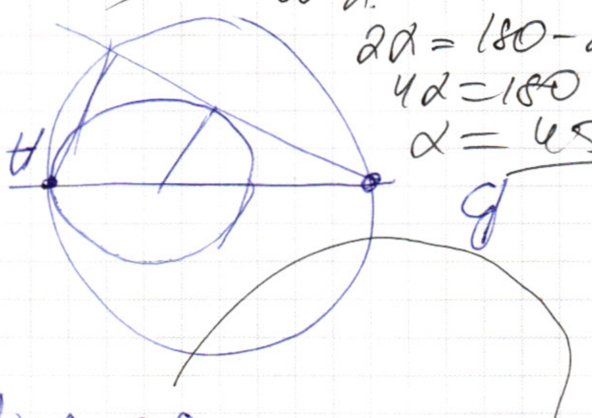


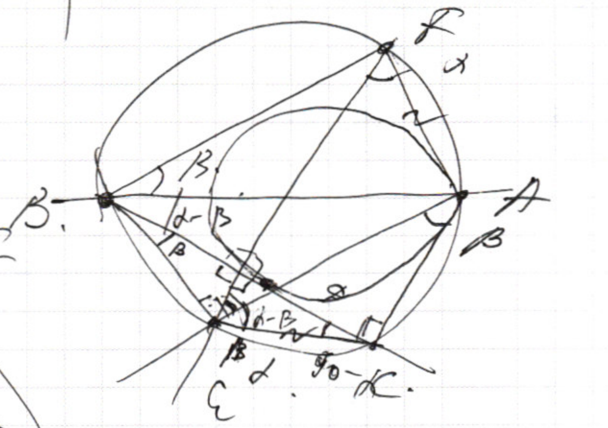
$2\alpha = 180 - 2\alpha$
$4\alpha = 180$
$\alpha = 45^\circ$

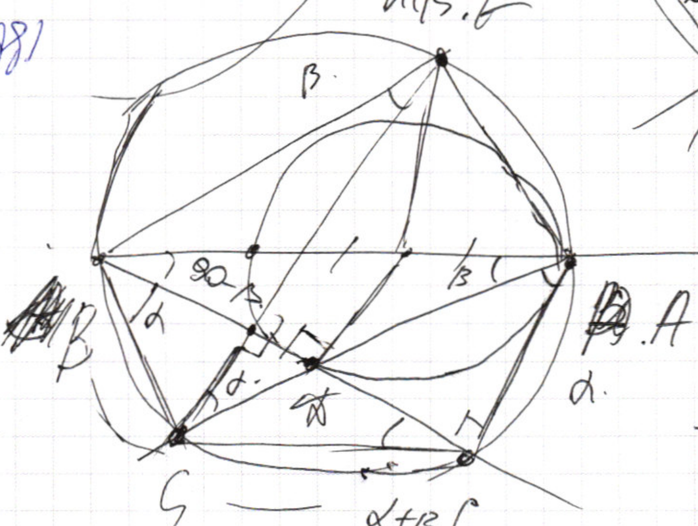


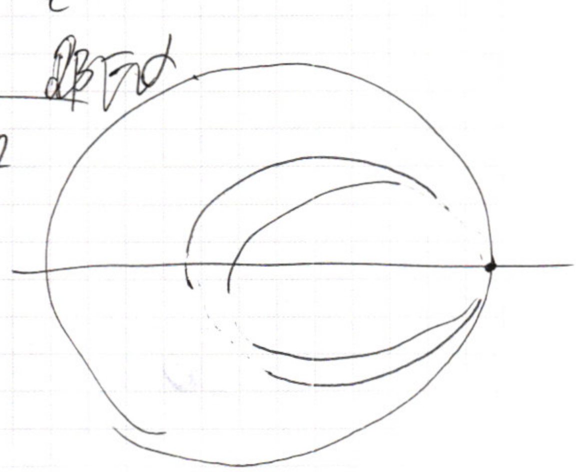


$\beta + \alpha - 90 =$
$= 180 - 2\alpha$









ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

Дано:

окружности ω; Ω

AB - диаметр.

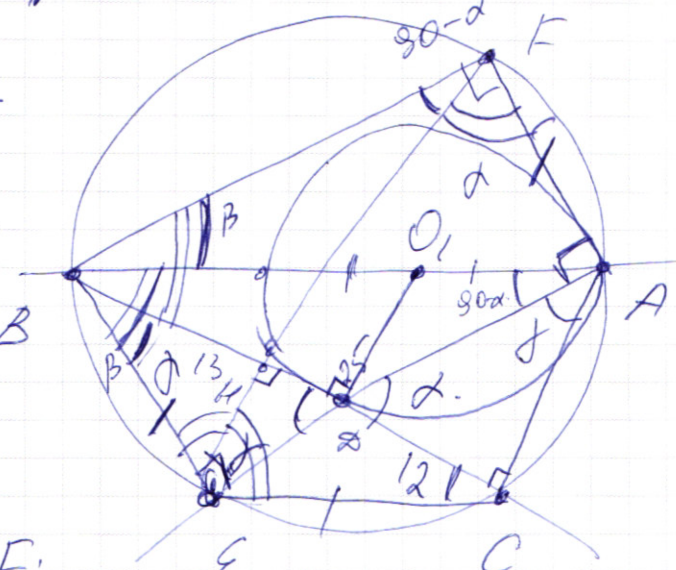
$EF \perp BC$. $CD = 12$; $BD = 13$.

BC касат-к ω

а) $\angle AEF$ - ?

r_ω и r_Ω - ?

$S_{\triangle AEF}$ - ?



Решение: $CH \perp EF$;

$\angle BCA = 90^\circ$ т.к. опирается на диаметр $\Rightarrow CH \perp AC \Rightarrow AC \parallel EF \Rightarrow ACEF$ - равнобокая трапеция* $\angle EFA = \angle ABE$ т.к. опираются на EA. Пусть $\angle EAC = \gamma$; $\angle AFE = \alpha \Rightarrow \angle FBE = 90 - \alpha = \angle BAE$ (т.к. опираются на BE). Пусть O_1 - центр ω. Тогда т.к. $\angle BO_1D$ - центральный $\angle BO_1D = 180 - 2\alpha$

$\triangle BO_1D \sim \triangle BAC$ по $\angle ABC$ и $\angle BDO_1 = \angle BCA = 90^\circ$ (радиус в точку касания)

$\Rightarrow \angle BO_1D = \angle BAC \Rightarrow 180 - 2\alpha = \gamma + 90 - \alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow 90 - \alpha = \gamma \Rightarrow \angle ADC = \alpha \Rightarrow \angle HDE$ как вертикальные $\Rightarrow \angle FEA = 90 - \alpha \Rightarrow \angle FAE = 180^\circ - \alpha - \gamma = 180^\circ - \alpha - (90 - \alpha) = 90^\circ \Rightarrow \square BFAE$ - прямоугольник $\Rightarrow EC = FA = BE \Rightarrow \triangle BEC$ - равнобедренный, EH - высота, медиана и биссектриса $\Rightarrow \angle BEF = \angle FEA \Rightarrow$ т.к. равные углы стягивают равные хорды $BF = FA \Rightarrow \square BEAF$ - квадрат $\Rightarrow \alpha$ - угол между стороной и диагональю ~~диагоналями~~ квадрата $\Rightarrow \alpha = 45^\circ = \angle AEF$

$y = \sqrt{6 - y}$

$y^2 + y - 6 = 0$

$D = 1 + 24$