МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 4

ШИФР _____

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6}, \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$\left|x^2-26x\right|^{\log_5 12}+26x\geqslant x^2+13^{\log_5\left(26x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=12$, $BD=13$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $4\leqslant x\leqslant 28$, $4\leqslant y\leqslant 28$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{8-6x}{3x-2}\geqslant ax+b\geqslant 18x^2-51x+28$$

выполнено для всех x на промежутке $\left(\frac{2}{3};2\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $TXYZ$, вершина Y которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра TY. Известно, что $XY=\sqrt{3}$, $TX=\sqrt{2}$, $TZ=2$. Найдите длину ребра XZ. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 5

$f(2)=0$; $f(3)=0$; $f(4)=f(2\cdot2)=0$; $f(5)=1$;
$f(6)=f(2\cdot3)=0$; $f(7)=1$; $f(8)=f(2\cdot4)=0$; $f(9)=f(3\cdot3)=0$;
$f(10)=f(2\cdot5)=1$; $f(11)=2$; $f(12)=f(2\cdot6)=0$;
$f(13)=3$; $f(14)=f(2\cdot7)=1$; $f(15)=f(3\cdot5)=1$;
$f(16)=f(2\cdot8)=0$; $f(17)=4$; $f(18)=f(2\cdot9)=0$;
$f(19)=4$; $f(20)=f(4\cdot5)=1$; $f(21)=f(3\cdot7)=1$;
$f(22)=f(2\cdot11)=2$; $f(23)=5$; $f(24)=f(2\cdot12)=0$;
$f(25)=f(5\cdot5)=2$; $f(26)=f(13\cdot2)=3$; $f(27)=f(3\cdot9)=0$;
$f(28)=f(4\cdot7)=1$

Всего: девять $f=0$; 8 $f=1$; $f=2$; $f=3$; $f=4$; одна $f=5$

$f(a)=f(1\cdot a)=f(1)+f(a) \Rightarrow f(1)=0$

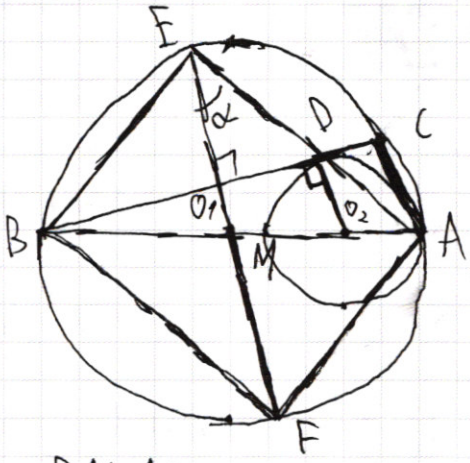
$f(1)=f\left(a\cdot\frac{1}{a}\right)=f(a)+f\left(\frac{1}{a}\right) \Rightarrow f\left(\frac{1}{a}\right)=-f(a)$

$\Rightarrow f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)-f(y)$. Чтобы $f\left(\frac{x}{y}\right)<0$ выполнялось, $f(y)$ должен быть больше $f(x)$

При $x=0$: при $f(x)=0$: $9\cdot(25-9)=144$; при $f(x)=1$: $8\cdot(25-9-8)=64$; при $x=2\cdot3\cdot(25-9-8-3)=15$; при $x=3$: $2\cdot(25-9-8-3-2)=6$; при $x=4$: $2\cdot1=2$. Всего: $144+64+15+8=231$

Ответ: 231.

№4



R - радиус Ω

r - радиус ω

∠ FEA = ∠α

$BD^2 = BM \cdot AB$

$13^2 = (2R - 2r) \cdot 2R$

∠ BCA - прямой (вписанный, опирающийся на диаметр

$\Delta BDO_2 \sim \Delta BCA$ (∠ (BA - общий; ∠ $BDO_2 = \angle BCA = 90°$)

$\frac{BO_2}{BA} = \frac{BD}{BC}$; $\frac{2R - r}{2R} = \frac{13}{25}$; $26R = 50R - 25r$;

$r = \frac{24}{25} R$; $13^2 = \frac{2}{25} R \cdot 2R$; $R = \sqrt{\frac{13^2 \cdot 5^2}{2^2}} = 32{,}5$

$r = \frac{24}{25} \cdot 32{,}5 = 31{,}2$

$EF \perp BC$, $O_2D \perp BC$ $\Rightarrow$ $EF \parallel O_2D \Rightarrow \angle O_2DA = \angle \alpha$

$O_2D = O_2A = r \Rightarrow \angle EAB = \angle \alpha$

∠ EAB = ∠FEA $\Rightarrow$ $\cup BE = \cup AF \Rightarrow BE = AF$

∠ BEA = 90° (опирается на диаметр) $\Rightarrow$ ∠ BEF = 90° - α

∠ BAF = ∠ BEF (опираются на одну дугу) = 90° - α

∠ EAF = ∠ EAB + ∠ BAF = α + 90° - α = 90°

$\Rightarrow$ EF - диаметр Ω.

∠ EMA = 180° - 2α ; ∠ BMO₁ = 2α ; ∠ O₁BM = 90° - 2α

$\cos(90° - 2\alpha) = \frac{BC}{2R} = \frac{12}{13}$; $\sin 2\alpha = \frac{5}{13}$; $\alpha = \frac{\arcsin(\frac{5}{13})}{2}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$MF = MA = R$; $\angle EFA = \angle BAF = 90° - \alpha$

$\angle EFA = 90° - \frac{\arcsin(\frac{5}{13})}{2}$

$S_{\triangle EAF} = EA \cdot AF = 2R \sin(\angle EFA) \cdot 2R \cos(EFA)$

$S_{\triangle EAF} = 4225 \cdot \sin(90° - \frac{\arcsin(\frac{5}{13})}{2}) \cdot \cos(90° - \frac{\arcsin(\frac{5}{13})}{2})$

Ответ: $R = 32,5$; $r = 31,2$;

$S_{AEF} = EF \sin\alpha + EF \cos\alpha =$

$= 2R^2 \cdot \sin(\frac{\arcsin\frac{5}{13}}{2}) \cdot \cos(\frac{\arcsin\frac{5}{13}}{2}) =$

$= 4225 \sin(\frac{\arcsin\frac{5}{13}}{2}) \cdot \cos(\frac{\arcsin\frac{5}{13}}{2})$

Ответ: $R = 32,5$; $r = 31,2$; $\angle A$.

$MF = MA = R$; $\angle EFA = \angle BAF = 90° - \alpha$; $\angle AFE = 90° - \frac{\arcsin(\frac{5}{13})}{2}$

$S_{\triangle EAF} = EA \cdot AF = 2R \cdot \sin(\angle EFA) \cdot 2R \cdot \cos(EFA)$

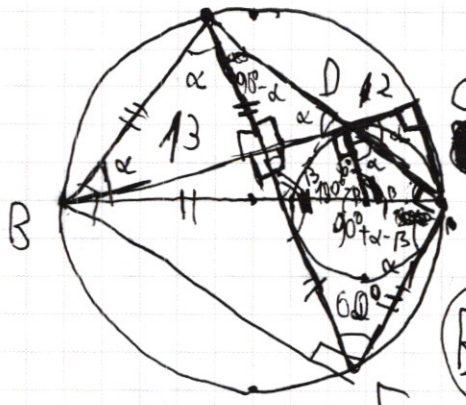
$S_{\triangle EAF} = 4225 \cdot \sin(90° - \frac{\arcsin(\frac{5}{13})}{2}) \cdot \cos(90° - \frac{\arcsin(\frac{5}{13})}{2})$

Ответ: $R = 32,5$; $r = 31,2$; $\angle EFA = 90° - \frac{\arcsin(\frac{5}{13})}{2}$, $S_{\triangle EAF} = 4225 \sin(90° - \frac{\arcsin(\frac{5}{13})}{2}) \cdot \cos(90° - \frac{\arcsin(\frac{5}{13})}{2})$.

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$2R \cdot \frac{2}{25}R = 13^2$ $R = \frac{13 \cdot 5}{2}$



$13^2 = 2R(2R-2r)$ 32,5

$90° - \alpha = 180° - \alpha - \beta$ $\frac{13 \cdot 12}{5}$

$2\alpha = 180° + \beta$ 31,2

$\alpha = 90° - \frac{\beta}{2}$

$90° - \alpha = 90° + \alpha - \beta$

$\beta = 2\alpha$

$R^2\sqrt{3}$ 60° 32,5 31,2

$\frac{2R-r}{2R} = \frac{13}{25}$

$25r = 24R$ $r = \frac{24}{25}R$

$18R = 30R - 15r$

$25r = 12R$ $R = \frac{25}{12}r$

$13^2 = 2R(2R - \frac{24}{25}R)$

$13^2 = 2R \cdot \frac{26}{25}R$

$180° - 90° - (180° - \beta) = \beta - 90° = 2\alpha - 90°$

$13^2 = \frac{R^2 \cdot 25 \cdot 4}{25} \sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta + \sin 2\beta \cdot \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$R^2 = \frac{13 \cdot 25}{4}$ $\sin 2\alpha \cdot \cos 4\beta + \sin 4\beta \cdot \cos 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$

$R = \frac{5}{2}\sqrt{13}$ $7 \cdot 4 \quad 9 \cdot 2$ $7 \cdot 2^5$ $3^2 \cdot 17^2$

$r = \frac{6}{5}\sqrt{13}$ 224 289 0

$-\frac{2}{3}$ $50 - 85 + 28$ $32 - 68 + 28$

-1 -8

$2 \geq a + b \geq -5$

$-2 \geq 2a + b \geq -12$

$18 \cdot 4 - 51 \cdot 2 + 28$

$72 - 112 + 28$

-12

$2\sin\alpha\cos\alpha \cdot (\cos^2\beta - \sin^2\beta) + 2\sin\beta\cos\beta \cdot (\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)$

$\sin^2\alpha \cdot \cos^2\beta$

$(\cdot t)^{\log_5 12} \geq -t + 13^{\log_5(\cdot t)}$

$\begin{array}{r} 65 \\ \times\ 65 \\ \hline 325 \\ 390 \\ \hline 4225 \end{array}$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №___ (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$y-6x=\sqrt{(x-1)(y-6)}$ $|x^2-26x|^{\log_3 12}+\ldots \geq x^2-26x+13^{\log_5}$

$|t|^{\log_5 12} \geq t+13^{\log_5(t)}$

$27x^2+18x+12y-12xy=45$ ...

$3(x+3)^2+$

$y^2-12xy+36x^2=(x-1)(y-6)$ $(3x-3)^2+(y-6)^2=90$

$t^{\log_5 12} \geq t+13^{\log_5 t}$

$\log_5\left(t^{\log_5 12-1}+1\right) \geq \log_5(t\cdot\frac{13}{5})$ $t(t^{\log_5 12-1}-1) \geq 13^{\log_5 t}$

$f(1)=0$ $f(2)=0$ $f(3)=0$ $f(4)=0$ $f(5)=1$ $f(6)=0$

$t^{\log_5 12-1}+1 \geq \frac{13}{5}t$ $f(7)=1$ $f(8)=0$ $f(9)=0$ $f(10)=1$

$f(11)=2$ $f(12)=0$ $f(13)=3$ $f(14)=1$ $f(15)=1$

$f(16)=0$ $f(17)=4$ $f(18)=0$ $f(19)=4$

$f(20)=1$ $f(21)=1$ $f(22)=2$ $f(23)=5$

$f(24)=0$ $f(25)=2$ $f(26)=3$ $f(27)=0$

$f(28)=1$

0: 9 1: 8 2: 3 3: 2 4: 2 5: 1

$9\cdot 16+8\cdot 8+3\cdot 5+2\cdot 3+2$

$16\times$
9
144

$144+64+15+8$

231

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{8-6x}{3x-2} \geq ax+b$$

$$8-6x-3ax^2+2ax-3bx+2b$$

$$-3ax^2+(2a-6)x+2b+8$$

$$(2a-3c)^2+48ac$$

$$4a^2+36ac+9c^2$$

$$c=\sqrt{ab}$$

$$(a+b)^2-2ab=90$$

$$(a+b)^2-2c^2=90$$

$$(3a+b-2c)(a+b+2c)=90$$

$$9x-9+y-6-2y-12x \quad 9x+y-7+2y+12x$$

$$(-11x-y-7)(13x+3y-7)=90$$

$$(3x-9)(3a+9)+(b-3)(b+3)=0$$

$$t^{\log_5 12}+t-t^{\log_5 13}\geq 0$$

$$\log_5 12\, t^{\log_5 12-1}+1-\log_5 13\, t^{\log_5 13-1}$$

$(18x^2 - 51x + 28)(3x - 2) = 8 - 6x$

$54x^3 - 153x^2 + 84x - 36x^2 + 102x - 56 = 8 - 6x$