МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2},\\ x^2+9y^2-4x-18y=12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2\geqslant \left|x^2+18x\right|^{\log_{12}13}-18x.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=8$, $BD=17$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1\leqslant x\leqslant 24$, $1\leqslant y\leqslant 24$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x+11}{4x+3}\leqslant ax+b\leqslant -8x^2-30x-17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4};-\frac{3}{4}\right)$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB=1$, $BD=2$, $CD=3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$(x-2)^2 - 5(x-2)(y-1) + 4(1-y)^2 = 0 \quad |:(1-y)^2$!: Рассмотрим $y=1$, тогда => $x=2$ =>

(1): $0=0$

(2): $-13=12$, т.е. => $x=2$, $y=1$, не явл. решением

$\left(\frac{x-2}{-1+y}\right)^2 - 5\frac{(x-2)}{(y-1)} + 4 = 0$; Пусть $t=\frac{x-2}{y-1}$

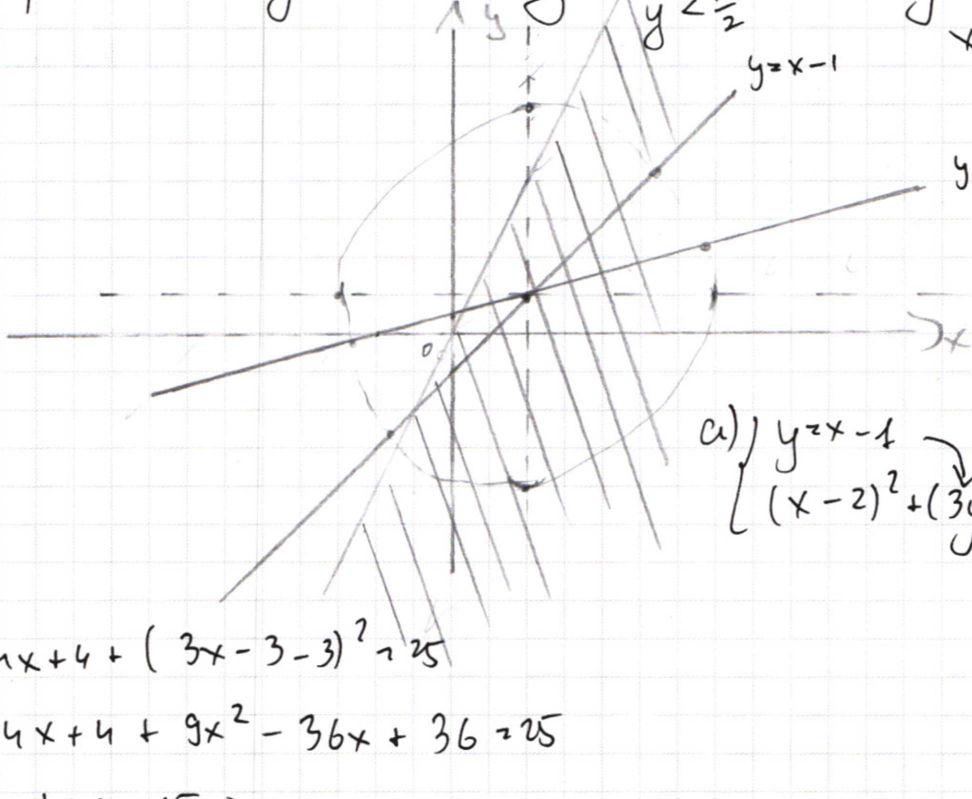
$t^2-5t+4=0$

$\left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=4 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x-2=y-1 \\ x-2=4y-4 \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} x-1=y \\ \frac{x+2}{4}=y \end{array}\right.$

2) $x^2-4x+9y^2-18y=12$

$(x-2)^2+(3y-3)^2=5^2$

3) Построим это, учтя, что из ОДЗ => ~~$(x-2)(y-1)\geq 0$~~ $y<\frac{x}{2}$, $x-2y>0$



a) $\begin{cases} y=x-1 \\ (x-2)^2+(3y-3)^2=25 \end{cases}$

$x^2-4x+4+(3x-3-3)^2=25$

$x^2-4x+4+9x^2-36x+36=25$

$10x^2-40x+15=0$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

$2x^2 - 8x + 3 = 0$

$D_1 = 16 - 6 = 10$

$x_{1,2} = \dfrac{4 \pm \sqrt{10}}{2}$ $\Rightarrow$ $y_{1,2} = \dfrac{2 \pm \sqrt{10}}{2}$

б) $\begin{cases} y = \frac{x+2}{4} \\ (x-2)^2 + 9(y-1)^2 = 25 \end{cases}$

$x^2 - 4x + 4 + 9\left(\frac{x+2}{4} - \frac{4}{4}\right)^2 = 25$

$(x-2)^2 + 9 \cdot \dfrac{(x-2)^2}{16} = 25$

$(x-2)^2 \cdot \left(\dfrac{25}{16}\right) = 25$

$(x-2)^2 = 16 = 4^2$

$(x-2-4)(x-2+4) = 0$

$\left[\begin{array}{l} x_3 = 6 \\ x_4 = -2 \end{array}\right. \Rightarrow \begin{array}{l} y_3 = 2 \\ y_4 = 0. \end{array}$

4) Проверим, удв. ли данные (•) одз $(y < \frac{x}{2})$

4.1) $\dfrac{2+\sqrt{10}}{2} < \dfrac{4+\sqrt{10}}{4}$

$\cancel{8} + 4\sqrt{10} < \cancel{8} + 2\sqrt{10}$

ложь

$x = \dfrac{4+\sqrt{10}}{2}$

$y = \dfrac{2+\sqrt{10}}{2}$ – не подх.

4.2) $\dfrac{2-\sqrt{10}}{2} < \dfrac{4-\sqrt{10}}{4}$

$\cancel{8} - 4\sqrt{10} < \cancel{8} - 2\sqrt{10}$

Истина

4.3) $2 < 3$, истина

4.4) $0 < -1$, ложь

$x = -2$

$y = 0$ – не подх.

Ответ: $\left(\dfrac{4-\sqrt{10}}{2}; \dfrac{2-\sqrt{10}}{2}\right); (6; 2)$.

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2

$x^2-5xy+4y^2\}+x+2y-2=0$ | $(x-y)(x-4y)+x+2y-2=0$

$D=25y^2-16y^2=(3y)^2$

$x_1=\frac{5y+3y}{2}=4y$

$x_2=y$

$x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}$

$(x-2y)^2=xy+x-2y+2-2x$

$(x-2y)^2-(x-2y)=xy+2-2x=x(y-2)+2.$

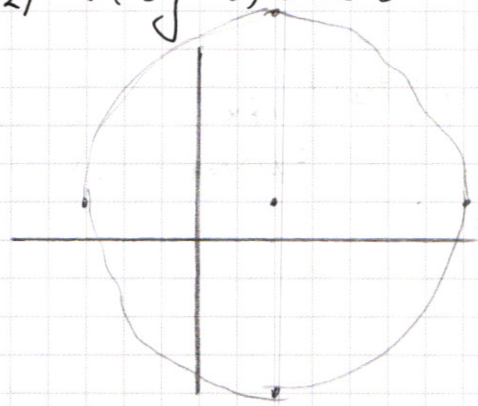
$x^2-4x+(3y)^2-2\cdot3\cdot3y=12$

$x^2-4x+4+(3y)^2-2\cdot3\cdot3y+9=25$

$(x-2)^2+(3y-3)^2=25$

$(x-2)^2+9(y-1)^2=25$

$(x-2)^2+(3y-3)^2=25=5^2$



$x-2y=\sqrt{x(y-1)-2(y-1)}=$

$=\sqrt{(y-1)(x-2)}$

$(x-2y)^2=(y-1)(x-2)$

$x^2-4xy+4y^2=(y-1)(x-2)$

~~$-4x(y-y^2)=4x(y^2-y)=4xy(y-1)$~~

$x^2-4xy+4y^2=xy-x-2y+2$

$x^2+x+4y^2+2y=5xy+2$

$x^2+2\cdot\frac{1}{2}\cdot x+(2y)^2+2\cdot\frac{1}{2}\cdot y=$

$=5xy+2$

$\sin 2\alpha = 2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha = 2\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5} = \frac{24}{25}$

4

$4tg\alpha + 1 - \cancel{tg^2\alpha} = -1 - \cancel{tg^2\alpha}$

$4 tg\alpha = -2.$

$tg\alpha = -\frac{1}{2}.$

$2.\quad \frac{2tg\alpha}{1+tg^2\alpha} + \frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha} = -1.$

$\frac{4tg\alpha + 1 - tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha} = -1.$

$4tg\alpha + 1 - \cancel{tg^2\alpha} = -\cancel{tg^2\alpha} - 1$

$4tg\alpha = -2$

$\boxed{tg\alpha = -\frac{1}{2}.}$

$\cos 2\alpha = \frac{1-\frac{9}{16}}{1+\frac{9}{16}} = \frac{7}{25} = \sqrt{1-\frac{24^2}{25^2}} = \sqrt{\frac{1\cdot 49}{25}} = \frac{7}{25}.$

№3.

$5^{\log_{12}(x^2+13x)} + x^2 \geq |x^2+13x|^{\log_{12}13} - 13x$

$x^2+13x = a$

$5^{\log_{12}(a)} + a \geq |a|^{\log_{12}13}$

$5^{\log_5 a}$

$5^{\log_{12}a} + 5^{\log_5 a} \geq |a|^{\log_{12}13} = 5^{\log_5(a)\cdot\log_{12}(13)}$

$a^{\log_{12}5} + a \geq |a|^{\log_{12}13}$

$a^{\log_{12}5} + a^{\log_{12}12} \geq |a|^{\log_{12}13}$

$5^{\log_{12}a} + 5^{\log_5 a} \geq 5^{\log_5|a|\cdot\log_{12}13}$

$a^{\log_{12}5}\left(1 + a^{\log_{12}12 - \log_{12}5}\right) = |a|^{\log_{12}13}.$

☐ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

11

$x=1$

$1+9(y-1)^2=25$

$9(y-1)^2=24$

$3(y-1)=2\sqrt{6}.$

$y-1=\pm\frac{2\sqrt{6}}{3}$

$y=\pm\frac{2\sqrt{6}}{3}+1$

$\frac{2\sqrt{6}}{3}+1 \vee 5$

$\frac{2\sqrt{6}}{3} \vee 4$

$2\sqrt{6} \vee 12 \quad |^2$

$4\cdot 6 \vee 144$

$+\begin{array}{r}143\\42\\8\\5\\\hline 198\end{array}$

$(x-1)^2+(2y-3)^2=9$

$2y-3=0$

$y=\frac{3}{2}$

$(x-1)^2+(y-\frac{3}{2})^2=9$

$(x-2)^2+(3\cdot(x-1)+-3)^2=5^2$

$x^2-4x+4+(3x-6)^2=25$

$x^2-4x+4+9x^2-36x+36=25.$

$10x^2-40x+15=0$

$2x^2-8x+3=0$

$D_1=16-6=10$

x_1

$x^2-4x+4+$

$+9(\frac{x-2}{4})^2=$

$=\cancel{\frac{9}{16}(x^2}$

$\frac{25}{16}(x^2-4x+4)=25$

$x^2-4x+4=16$

$x^2-4x-12=0$

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

12

$x=6;\ y=2$

$\cancel{36}+9\cdot4-24-\cancel{36}=12$

☺

$6-4=\sqrt{6\cdot2-6-4+2}$

$2=\sqrt{6-4+2}=2$ ☺

$x=-2$

$y=0$

$4+0+8-0=12$

☺

$y<\frac{x}{2}$

$-2=\sqrt{2+}$

$(x-2)(y-1)>0$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

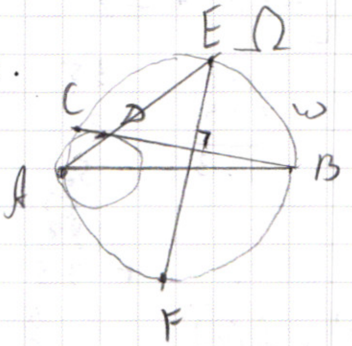
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5

$a^{\log_{12}5-\log_{12}13}+a^{\log_{12}12-\log_{12}13}$ $\boxed{a>0}$ $\geq 1.$

$a^{\log_{12}\frac{5}{13}}+a^{\log_{12}\frac{12}{13}}\geq 1.$

№4.



R-? r-?

∠AFE-?

$S_\triangle AEF$-?

CD=8

BD=17

$2ry=4rR-4r^2$

$2y-4R=4r$

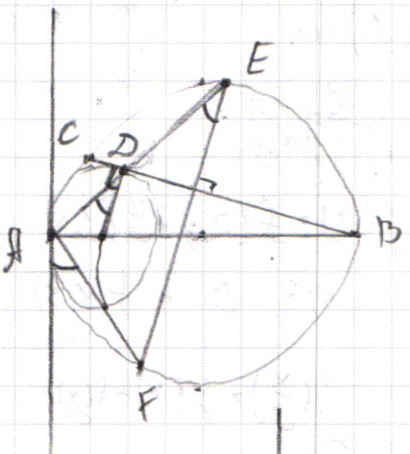
$y-2R=2r$

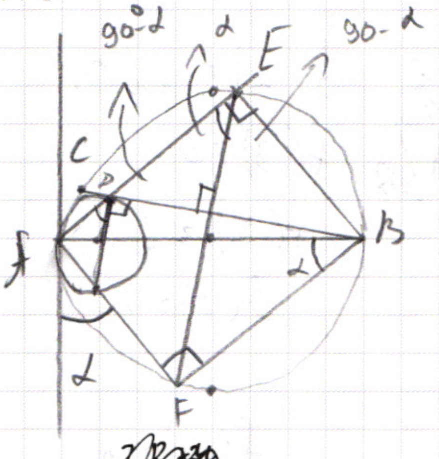
$y=2R$

$y=R+t$

$2R+2r=R+t$

$R+2r=t.$





$\frac{DO}{AF}=\frac{ED}{FE}$

$\frac{4,5}{AF}=\frac{ED}{2R}$

2R=2a

$12,5^4/2$

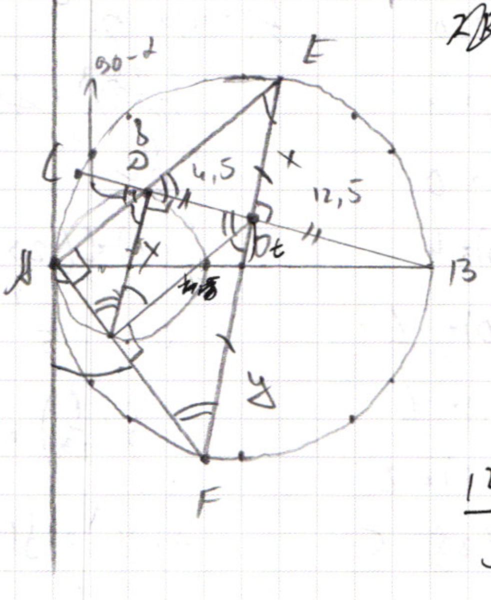
$22\cdot r\cdot 12,5^2\cdot y-$

$-y^3$

$x=2r$

$\frac{2r}{2R-2r}=\frac{2r}{y}$

$-2ry$



$x\cdot y=12,5^2$

x+y-?

$x=\frac{12,5^2}{y}$

$\frac{2r}{2R-x}=\frac{x}{y}$

~~$2ry=2rx-x^2$~~

$2r(y-x)=-x^2$

$x^2=2r(x-y)$

$\frac{12,5^4}{y^2}=2r\left(\frac{12,5^2}{y}-y\right)\ |\cdot y^2$

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

6

№5. $f(ab)=f(a)+f(b)$. $f(\frac{x}{y})<0$

$f(p)=[\frac{p}{4}]$. $1\le x,y\le 24$

$[3,7)=3$

$[3,1]=3$.

$f(ab)=f(a)+f(b)=f(a)+f(1)+f(b)$

$f(1)=0$.

-1 1

-2 $-1,5$ 0 $1,5$

$p>0$

~~$[p]<4$~~

$[-1,5]=-2$.

$a,b \in \mathbb{R}^+$ $[p]\le p$

$$\begin{array}{r} 40 \\ +143 \\ 35 \\ 8 \\ \hline 191 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 130 \\ +13 \\ \hline 143 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 35 \\ 8 \\ 5 \end{array}$$

$[\frac{p}{4}]\le\frac{p}{4}$

$$\begin{array}{r} 143 \\ +35 \\ 8 \\ 5 \\ \hline 191 \end{array}$$

$f(6)=f(2)+f(3)$. ; $f(6)=0.=f(1)+f(6)$.

~~$f(6)=[\frac{6}{4}]=1$~~

~~$f(2)=[\frac{2}{4}]=0$~~

$f(2)=0$.

$f(3)=0$

$f(5)=1$.

$f(6)=0$.

$f(1)=0$.

~~$f(\frac{6}{4})=f($~~

$f(3)=f(2)+f(1,5)$

$0=0+f(1,5)$

<0.

$f(4)=0$

$f(7)=1$

$f(8)=0$

$f(9)=0$

$f(10)=1$

$f(11)=2$

$f(12)=0$

$f(13)=3$

$f(14)=1$

$f(15)=1$.

$f(16)=0$

$f(17)=4$

$f(18)=0$

$f(19)=4$

$f(20)=1$

$f(21)=1$

$f(22)=2$

$f(23)=5$

$f(\frac{x}{y})=f(x)-f(y)$

$f(24)=0$.

~~$f(\frac{1}{24})=f(24)+f(\frac{1}{24})$~~

$f(1)=f(23)+f(\frac{1}{23})$

0 5

$f(\frac{1}{23})=-5$.

$f(x)=f(y)+f(\frac{x}{y})$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin 2\alpha \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}} \quad | \cdot \sqrt{5}$

$2\sin 2\alpha - \cos 2\alpha = -1$

$\frac{4\,tg\alpha}{1+tg^2\alpha} - \frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha} = -1$

$4\,tg\alpha - 1 + tg^2\alpha = -1 - tg^2\alpha$

$2tg^2\alpha + 4\,tg\alpha = 0$

$tg\alpha(tg\alpha + 2) = 0$

$\left[\begin{array}{l} tg\alpha = 0 \\ tg\alpha = -2. \end{array}\right.$ Ответ: $tg\alpha = 0;\ tg\alpha = -\frac{1}{2};\ tg\alpha = -2$

№3

$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13} - 18x$

Пусть $18x + x^2 = a$, тогда

$5^{\log_{12}a} + a \geq |a|^{\log_{12}13}$

$5^{\log_{12}a} + 12^{\log_{12}a} \geq 13^{\log_{12}|a|}$

а) Пусть $a \geq 0$, тогда

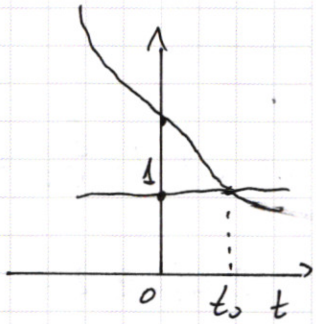
$5^{\log_{12}a} + 12^{\log_{12}a} \geq 13^{\log_{12}a} \quad |: 13^{\log_{12}a}$

$\left(\frac{5}{13}\right)^{\log_{12}a} + \left(\frac{12}{13}\right)^{\log_{12}a} \geq 1.$

Заметим, что ф-ция слева - есть сумма 2ух $\downarrow$ $\Rightarrow$ ф-ция слева также $\downarrow$. $\Rightarrow$ она имеет 1 пересечение с 1 ~~и все т~~. t.

Пусть $t = \log_{12} a$, тогда

$\left(\frac{5}{13}\right)^t + \left(\frac{12}{13}\right)^t \geq 1$, она имеет примерный вид:



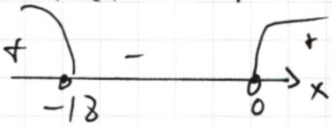
Найдём t_0, такой что $\left(\frac{5}{13}\right)^{t_0} + \left(\frac{12}{13}\right)^{t_0} = 1$

Очевидно $t_0 = 2 \Rightarrow$ $t \leq 2. \Rightarrow$

$\begin{cases} \log_{12} a \leq 2 \\ a \geq 0 \end{cases} \Rightarrow 0 < a \leq 144 \Rightarrow$ $0 \leq x^2 + 18x \leq 144$

$x^2 + 18x \geq 0$

$x(x+18) \geq 0$



$x \in (-\infty; -18] \cup (0; +\infty)$

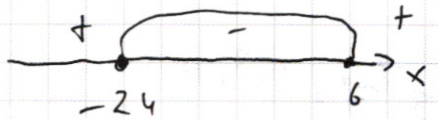
$x^2 + 18x - 144 \leq 0$

$x^2 + 18x - 144 = 0$

$D_1 = 81 + 144 = 225$

$x_1 = -9 + 15 = 6$

$x_2 = -24$



$x \in [-24; 6]$.

б) Пусть $a < 0 \Rightarrow$ нер-ство не имеет смысла, т.к. из ОДЗ $\Rightarrow$ $x^2 + 18x > 0$ $\Rightarrow$.

Ответ: $x \in [-24; -18) \cup (0; 6]$

№2. $\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy - x - 2y + 2} & (1) \\ x^2 + 9y^2 - 4x - 18y = 12 & (2). \end{cases}$

1) $(x-2y)^2 = x(y-1) - 2(y-1)$

$(x - 2 + 2 - 2y)^2 = (x-2)(y-1)$

$(x-2)^2 + 4(x-2)\cdot(1-y) + 4(1-y)^2 = (x-2)(y-1)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5. $f(ab)=f(a)+f(b)$ $a,b\in\mathbb{R}_+$; $f(\frac{x}{y})<0$; Сколько $x;y$, таких, что $1\le x,y\le 24$

$f(p)=\left[\frac{p}{4}\right]$, где p - простое

$f(6)=f(2)+f(3)=0 \Rightarrow f(6)=0$; $f(6)\overset{0}{=}f(1)+f(6)$ ~~$f(5)$~~ $\Rightarrow f(1)=0$.

$f(2)=\left[\frac{2}{4}\right]=0$ $f(5)=\left[\frac{5}{4}\right]=1$

$f(3)=\left[\frac{3}{4}\right]=0$

Продолжая по аналогии, можем найти все значения $f(t)$, где $t\in[1;24]$.

$f(4)=0$ $f(18)=0$
$f(5)=1$ $f(19)=4$
$f(6)=0$ $f(20)=1$
$f(7)=1$ $f(21)=1$
$f(8)=0$ $f(22)=2$
$f(9)=0$ $f(23)=5$
$f(10)=1$ $f(24)=0$
$f(11)=2$
$f(12)=0$
$f(13)=3$
$f(14)=1$
$f(15)=1$
$f(16)=0$
$f(17)=4$

~~$f(\frac{x}{y})$~~ $f(x)=f(y)+f(\frac{x}{y}) \Rightarrow$

$\begin{cases} f(\frac{x}{y})=f(x)-f(y) \\ f(\frac{x}{y})<0 \end{cases} \Rightarrow$

$f(x)<f(y)$; теперь учтя значения $f(t)$, подберём

1) Пусть $f(x)=0$, тогда y - 13 вариантов
~~2) $f(x)=1$, тогда y~~ x - 11 вар.

2) Пусть $f(x)=1$, тогда y - ~~8~~ 6 вар.
x - 7 вар.

3) Пусть $f(x)=2$, тогда y - 4 вар
x - 2 вар.

4) Пусть $f(x)=3$, тогда y - 3 вар
x - 1 вар

5) Пусть $f(x)=4$, тогда y - 1 вар.
x - 2 вар $\Rightarrow$

Тогда всего может быть: $13 \cdot 11 + \cancel{5}^{6} \cdot 7 + 4 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 1 \cdot 2 =$
$= \cancel{191}^{193}$ - вариантов.

Ответ: $\cancel{191}^{193}$ ~~вари~~ пара чисел.

№1. $\begin{cases} \sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}} \ (1) \\ \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5} \ (2) \end{cases}$ $\quad tg\,\alpha - ?$; $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + 2\pi k.$

$\sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = 2 \cdot \sin(2\alpha + 2\beta) \cdot \cos 2\beta = -\frac{4}{5}$

$2 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \cos 2\beta = \frac{4}{5}$

$\cos 2\beta = \frac{\sqrt{5} \cdot 2}{5} = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$\sin 2\beta = \pm\sqrt{1 - \frac{4}{5}} = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$

Рассмотрим (1)

$\sin(2\alpha + 2\beta) = \sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta + \cos 2\alpha \cdot \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}.$

1) Пусть $\sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$, то

$\sin 2\alpha \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} + \cos 2\alpha \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}} \quad | \cdot \sqrt{5}.$

$2\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1$, где $\sin 2\alpha = \frac{2\,tg\,\alpha}{1 + tg^2\alpha}$

$\frac{4\,tg\,\alpha}{1 + tg^2\alpha} + \frac{1 - tg^2\alpha}{1 + tg^2\alpha} = -1$ $\qquad \cos 2\alpha = \frac{1 - tg^2\alpha}{1 + tg^2\alpha}$

$4\,tg\,\alpha + 1 - \cancel{tg^2\alpha} = -1 - \cancel{tg^2\alpha}$

$tg\,\alpha = -\frac{1}{2}.$

2) Пусть $\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, тогда

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

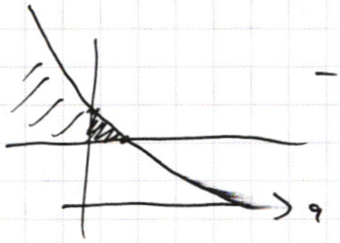
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

9

$a^{\log_{12}\frac{5}{13}} + a^{\log_{12}\frac{12}{13}} \geq 1.$



$-\begin{array}{r}400\\360\\\hline 40.\end{array}$

$a^{\log_{12}\frac{5}{13}} + a^{\log_{12}\frac{12}{13}} = 1$

$a \quad a^{\log_{12}5} + a^{\log_{12}12} = a^{\log_{12}13}. \qquad 1 \cdot a^{\log}$

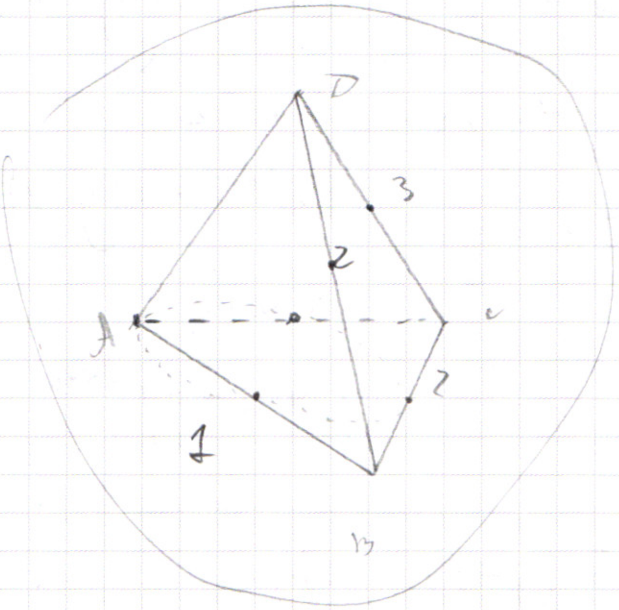
$5^2+12^2=13^2$

$\log_a\left(a^{\log_{12}5}+a^{\log_{12}12}\right)=\log_{12}13$

$\log_a 1$

$5^{\log_{12}a}+12^{\log_{12}a}=13^{\log_{12}a}.$

$3+\frac{2}{3+4x}\leq ax+b$



$3+\frac{2}{3+(-1)}=3+\frac{2}{-3}=$

$=3-\frac{1}{7^2}$

$=2,75$

$3+\frac{2}{3-3}=3$

$$(x-2)^2+(3y-3)^2=5^2 \qquad a^2+9b^2=25$$

$$(x-2y)=\sqrt{(y-1)(x-2)} \qquad (x-2y)^2=ab$$

$$(x-2)^2+(3y-3)^2=5^2$$

$$\cancel{x^2-4xy+4y^2}=$$

$$(x-2y)^2=(x-2)(y-1)$$

$$(x-2+2-2y)^2$$

$$=((x-2)+2(1-y))^2=$$

$$(x-2y)^2=(y-1)(x-2)$$

$$(x-2)^2+9(y-1)^2=25$$

$$(x-2)^2=(5-3(y-1))(5+3(y-1))$$

$$(x-2y)^4=(y-1)^2\cdot(5-3y+3)(5+3y-3)=(y-1)^2\cdot(8-3y)\cdot(2+3y)$$

$$a^2+2\cdot 3b\cdot a+(3b)^2=25+2\cdot a\cdot 3b$$

$$=(x-2)^2+4(x-2)(1-y)=$$

$$=(x-2)(y-1)$$

$$(a+3b)^2=25+2\cdot 3\cdot(x-2y)^2$$

$$(x-2+3(y-1))^2=25+6(x-2y)^2 \qquad (x-2)(x-2)-4(y-1)-(y-1)=0$$

$$(x-2+3y-3)^2=(x+3y-5)^2=25+6(x-2y)^2$$

$$x^2+9y^2+\cancel{25}+6xy-30y-10x=\cancel{25}+6x^2-24xy+24y^2$$

$$5x^2+15y^2-30xy+10x+30y=0$$

$$x^2+3y^2-6xy+2x+6y=0.$$

$$\left[\begin{array}{l} x=2 \\ x-2-5(y-1)=0 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x=2 \\ x-2-5y+5=0 \end{array}\right.$$

$$(x-2)^2+4(x-2)(1-y)+4(1-y)^2=(y-1)(x-2).$$

$$(x-2)^2-4(x-2)(y-1)+4(y-1)^2=(y-1)(x-2)$$

$$a^2-5ab+4b^2$$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

9

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$; $f\left(\frac{x}{y}\right) < 0 \Rightarrow$

$f(x) < f(y)$.

№ 6. $\frac{12x+11}{4x+3} = \frac{12x+9+2}{4x+3} = 3 + \frac{2}{4x+3} \le ax+b \le -8x^2-30x-17$.

$\left[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}\right) = -\frac{22}{8}; -\frac{6}{8} = -\frac{33}{12}; -\frac{9}{12}$.

$0 \le \cancel{ax+b}$ $-\frac{11}{12}a+b \le$

$x = -\frac{11}{12}$. $\frac{-\frac{11}{3}}{4}$

$-225 \atop 136$ $\quad 89$ $\quad 17 \cdot 8 = 136$

$-8x^2-30x-17=0$

$8x^2+30x+17=0$

$D_1 = 225 - 8\cdot 17 = 225-136 = 89$.

$y_b = -8\cdot\frac{225}{64} + \frac{15}{8} - 17 =$

$x = \frac{-15 \pm \sqrt{89}}{8}$.

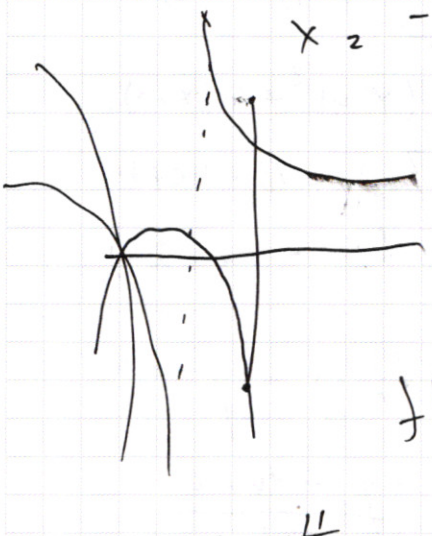
$f' = -16x - 30 = 0$ $\quad = \frac{-225}{8} + \frac{15}{8} - 17$

$= \frac{-210}{8} - 17$

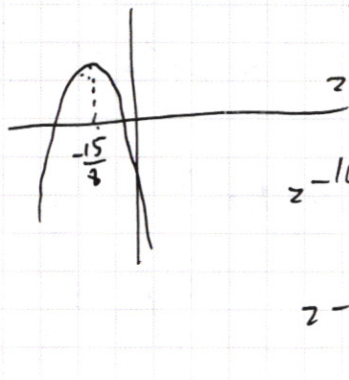
$-16x = 30$

$x = -\frac{30}{16} = -\frac{15}{8}$.

$-\frac{105}{4} - 17$



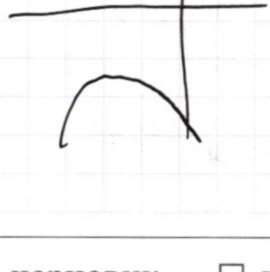
$f' = \frac{0-4\cdot 2}{(4x+3)^2} = \frac{-8}{(4x+3)^2}$



$= \frac{-105-68}{4} =$

$x = -\frac{11}{12}$

$= -\frac{173}{4} =$



$= -43\frac{3}{4}$.

☐ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

№ 2. $(x-2)^2+(3y-3)^2=25$

$(x-2y)=\sqrt{(y-1)(x-2)}$

$x^2-4xy+4y^2=xy-x-2y+2$

$x^2+9y^2-4x-18y=12$

$-4xy+4y^2-9y^2+4x+18y=xy-x-2y-10$

$-4xy-5y^2+4x+18y-xy+x+2y+10=0$

$-5xy-5y^2+5x+20y+10=0.$

$-xy-y^2+x+4y+2=0.$

$+4-4$

$y^2+xy-x-4y-2=0$

$\cancel{x(y-1)-4(y-1)-6=0}$

$y^2+(y-1)(x-4)-6=0.$

$6-y^2=(y-1)(x-4)$

$(y-1)=\frac{6-y^2}{x-4}$

$(x-2)^2+9\left(\frac{6-y^2}{x-4}\right)^2=25.$

$y^2+y(x-4)-(x+2)=0$

$D=(x-4)^2+4(x+2)=$

$=x^2-8x+16+4x+8=$

$=(x^2-4x+24)$

$x(y-1)+y^2-4y-2=0$

$x=\frac{-y^2+4y+2}{y-1}.$

$\left(\frac{-y^2+4y+2-2y-2}{y-1}\right)^2=$

$=\left(\frac{-y^2+2y}{y-1}\right)^2+9(y-1)^2=25$

$y^2\left(\frac{2-y}{y-1}\right)^2+9(y-1)^2=25$

$y^2(2-y)^2+9(y-1)^4=$

$=25\cdot(y-1)^2$

?

$5^{\log_{12}a}+a\geq|a|^{\log_{12}13}$

$a^{\log_{12}5}+a\geq|a|^{\log_{12}13}$

$a^{\log_{12}5}+a^{\log_{12}12}\geq|a|^{\log_{12}13}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1

№1. $tg\,\alpha - ?$ $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$

$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}} = \sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta + \cos 2\alpha \cdot \sin 2\beta$

$\sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$;

$\sin 2\alpha \cdot \cos 4\beta + \sin 4\beta \cdot \cos 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$\sin 2\alpha \cdot \cos 4\beta + 2\sin 2\alpha \cdot \cos^2 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$\sin(2\alpha + 4\beta) = \sin((2\alpha + 2\beta) + 2\beta) = \sin(2\alpha + 2\beta) \cdot \cos 2\beta +$
$+ \cos(2\alpha + 2\beta) \cdot \sin 2\beta$.

$\cos(2\alpha + 2\beta) = \sqrt{1 - \frac{1}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$-\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \cos 2\beta + \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \sin 2\beta + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$\sin x + \sin y = 2 \cdot \sin \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2}$.

№2. $x^2 + 9y^2 - 4x - 18y = 12$

$x^2 - 4x + (3y)^2 - 2 \cdot 3 \cdot 3y = 12$

$x^2 - 4x + 4 - 4 + (3y)^2 - 2 \cdot 3y \cdot 3 + 9 - 9 = 12$

$(x-2)^2 + (3y-3)^2 = 25$ (1)

$(x - 2y)^2 = xy - x - 2y + 2$ | $x^2 - 4xy + 4y^2 = xy - x - 2y + 2$

$xy - x - 2y + 2 \geq 0$

☐ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

(3)

$4x^2+2\cdot\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+(2y)^2+2\cdot\frac{1}{2}\cdot 2y+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=5xy+2$

$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(2y+\frac{1}{2}\right)^2=5xy+\frac{5}{2}\quad\cdot/4$

$(2x+1)^2+(4y+1)^2=20xy+10$

$(x-2y)^2=(y-1)(x-2)\qquad f(x)=(x-2y)^2$

$\underset{f(x)}{\shortparallel}\qquad\qquad \underset{g(x)}{\shortparallel}$

$(x-2)^2+(3y-3)^2=25$

$(\underbrace{x-2}_{a})^2+9(\underbrace{y-1}_{b})^2=25$

$\Rightarrow \begin{cases} a^2+9b^2=25 \\ ab=(a-2b)^2\end{cases}$

$-\begin{cases} x-2=a \\ y-1=b \quad |\cdot 2\end{cases}$

$2y-2=2b$

$x-\cancel{2}-2y+\cancel{2}=a-2b$

$x-2y=a-2b$

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cancel{\cos\alpha\sin\beta}$

$+$

$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cancel{\cos\alpha\sin\beta}$

$\sin x+\sin y=$

$=2\sin\alpha\cos\beta$

$\underset{\frac{x+y}{2}}{\shortparallel}$

№1.

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=2\cdot\sin\left(\frac{4\alpha+4\beta}{2}\right)\cdot\cos(2\beta)=$

$=2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta=-\frac{4}{5}\qquad 2\sin\cdot(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha+\beta)=-\frac{1}{\sqrt5}.$

$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt5}$

$-\frac{2}{\sqrt5}\cdot\cos 2\beta=-\frac{4}{5}$

$\cos 2\beta=\frac{\sqrt5\cdot 4^2}{2\cdot 5}=\frac{2\sqrt5}{5}=\frac{2}{\sqrt5}$

$\sin 2\beta=\sqrt{1-\frac{4}{5}}=\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin 2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}.$

$\cos 2\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$

$\operatorname{tg}\alpha=\frac{3}{4}$

5, 3, 4, α

$\sin 2\alpha=\frac{2\cdot\frac{3}{4}}{1+\frac{9}{16}}=\frac{\frac{3}{2}\cdot 16}{25}=\frac{3\cdot 16}{50}=\frac{48}{50}=\frac{24}{25}$

$\sin(2\alpha+2\beta)=\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta+\cos 2\alpha\cdot\sin 2\beta=-\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin 2\alpha\cdot\frac{2}{\sqrt5}+\cos 2\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt5}=-\frac{1}{\sqrt5}\quad|\ \sqrt5$

$2\sin 2\alpha+\cos 2\alpha=-1.$