МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{8}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases}3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2},\\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4.\end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x\geqslant |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{5}{2}$, $BD=\frac{13}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $3\leqslant x\leqslant 27$, $3\leqslant y\leqslant 27$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{4x-3}{2x-2}\geqslant ax+b\geqslant 8x^2-34x+30$$

выполнено для всех x на промежутке $(1;3]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $PQRS$, вершина P которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра PQ. Известно, что $QR=2$, $QS=1$, $PS=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра RS. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5)

$a, b \in \mathbb{R}; a, b > 0 \quad f(ab) = f(a) + f(b)$

пусть $a = 2 \Rightarrow f(2b) = f(2) + f(b)$.

но $f(2) = [\frac{2}{4}] = 0 \Rightarrow f(2b) = f(b)$

аналогично $f(3b) = f(b)$

пусть $a = 2; b = 1$: $\underset{0}{f(2\cdot1)} = \underset{0}{f(2)} + f(1)$; $f(1) = 0$

$b = \frac{1}{a}$: $\underset{0}{f(1)} = f(a) + f(\frac{1}{a})$

$a, b > 0$

$a, b \in \mathbb{R}$ $\quad f(a) = -f(\frac{1}{a})$

$f(p) = [p/4]$

$f(2) = [\frac{2}{4}] = 0$

$f(3) = [\frac{3}{4}] = 0$

$f(5) = 1$

$f(7) = 1$

$f(11) = 2$

пары:

$\begin{cases} 3 \le x \le 27 \\ 3 \le y \le 27 \\ f(x/y) < 0 \end{cases}$ – ?

$f(\frac{x}{y}) = f(x \cdot \frac{1}{y}) = f(x) + f(\frac{1}{y}) = f(x) - f(y)$

т.к. в промежутке $x, y > 0$

осталось лишь вычислить все значения f от 1 до 27:

$\begin{cases} 10 \text{ „0"} \\ 7 \text{ „1"} \\ 3 \text{ „2"} \\ 2 \text{ „4"} \\ 1 \text{ „5"} \\ 2 \text{ „3"} \end{cases}$

аргумент $f(t)$	~~1 2~~	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
значение $f(t)$	~~0 0~~	0	0	1	0	1	0	0	1	2	0	3	1	1	0	4	0	4	1	1	2	5	0	2	3	0
		p		p		p				p		p				p		p				p				

$f(3b) = f(2b) = f(b)$

$f(2) = 0 \Rightarrow f(4) = f(8) = f(16) = f(6) = f(18) = 0$

$f(3) = 0 \Rightarrow f(6) = f(12) = f(24) = f(9) = f(27) = 0$

$f(10) = f(2\cdot5) = 1 = f(15)$; $f(20) = f(2\cdot10) = 1$

$f(14) = f(2\cdot7) = 1$; $f(21) = 1$;

$f(22) = f(11) = 2$; $f(26) = f(13) = 3$

$f(25) = f(5\cdot5) = f(5) + f(5) = 1 + 1 = 2$

Итого: суммируем число пар

$150 + 56 + 15 + 6 + 2 = 229$ пар

все пары различны, все учтены

Ответ: 229 пар

$f(\frac{x}{y}) = f(x) - f(y)$ если $f(x) = 0$ 10 вариантов,

то $f(\frac{x}{y}) < 0$ верно при 15 вариантах

всего 150 вар. $f(y) = 1; 2; 3; 4; 5$

если $f(x) = 1$: 7 вар.

то $f(y) = 2; 3; 4; 5$: 8 вар

всего 56 вар

если $f(x) = 2$: 3 вар

$f(y) = 3; 4; 5$: 5 вар $\quad$ 15 вар

$f(x) = 3$: 2 вар

$f(y) = 4; 5$: 3 вар $\quad$ 6 вар

$f(x) = 4$: 2 вар

$f(y) = 5$: 1 вар $\quad$ 2 вар

$f(x) \ne 5$ 0 вар.

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

№6) $\frac{4x-3}{2x-2} \geq ax+b \geq 8x^2-34x+30$ $(a;b)$ такие, что н-во верно для $1<x\leq 3$

$$\begin{cases} 8x^2-(a+34)x+30-b\leq 0 & (1) \\ \frac{4x-3}{2x-2}-\frac{(2x-2)(ax+b)}{2x-2}\geq 0 & (2) \end{cases}$$

(2): $\frac{4x-3-(2ax^2-2ax+2bx-2b)}{2(x-1)} \geq 0$

$\frac{2ax^2+(2b-2a-4)x-2b+3}{2(x-1)}\leq 0$

парабола (ветви вверх) $f(1)$ $f(x)$ есть непрерывная функция, выпуклая вниз, значит для выполнения условий на всём $1<x\leq 3$ необходимо и достаточно: $\begin{cases} f(1)\leq 0 \\ f(3)\leq 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} 8-a-34+30-b\leq 0 \\ 72-3a-102+30-b\leq 0 \end{cases}; \begin{cases} 4\leq a+b \\ 0\leq 3a+b \end{cases}$$

Рассмотрим теперь результат преобразований (2):

$\frac{2ax^2+(2b-2a-4)x-2b+3}{2(x-1)}\leq 0$

$(x-1)>0$ на этом промежутке, значит парабола числителя $g(x)$ должна быть меньше 0 или равна

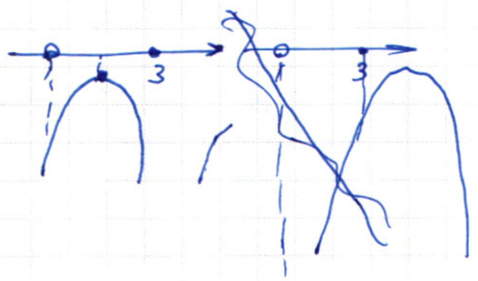
пусть $a>0$, тогда, чтобы н-во выполнялось

$g(x)=2ax^2+(2b-2a-4)x-2b+3\leq 0$, ведь $(x-1)>0$ на $x\in(1;3]$

при $a>0$ это верно при $\begin{cases} g(1)\leq 0 \\ g(3)\leq 0 \end{cases}$: $\begin{cases} 2a+(2b-2a-4)-2b+3\leq 0 \\ 18a+6b-6a-12-2b+3\leq 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} -1\leq 0 \\ 12a+4b-9\leq 0 \end{cases}$$

при $a<0$



Черновик

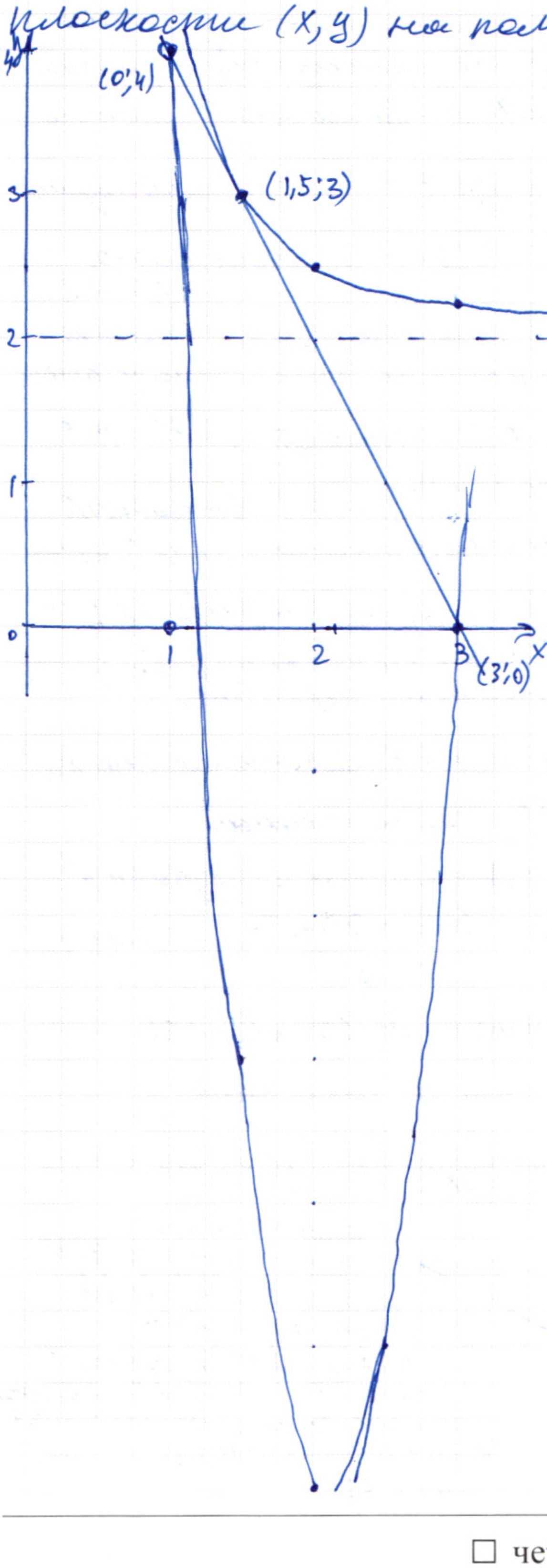
Черновик

☑ черновик ☐ чистовик Страница № ~~5~~

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6) $\frac{4x-3}{2x-2} \geq ax+b \geq 8x^2-34x+30$ изобразим это графически на плоскости (x,y) на полосе $1<x\leq 3$:



$f(x)=8x^2-34x+30$ парабола с абсциссой вершины $x_0=-\frac{-34}{2\cdot 8}=\frac{17}{8}=2,125$

$f(1)=4$; $f(3)=0$; $f(2)=-6$; $f(1,5)=-3$
$f(2,5)=-5$

теперь гипербола:

$y(x)=\frac{4x-3}{2x-2}=2+\frac{1}{2x-2}$ ассимптоты: $x=1$ и $y=2$

точки:

x	2	3	1,5
y	2,5	2,25	3

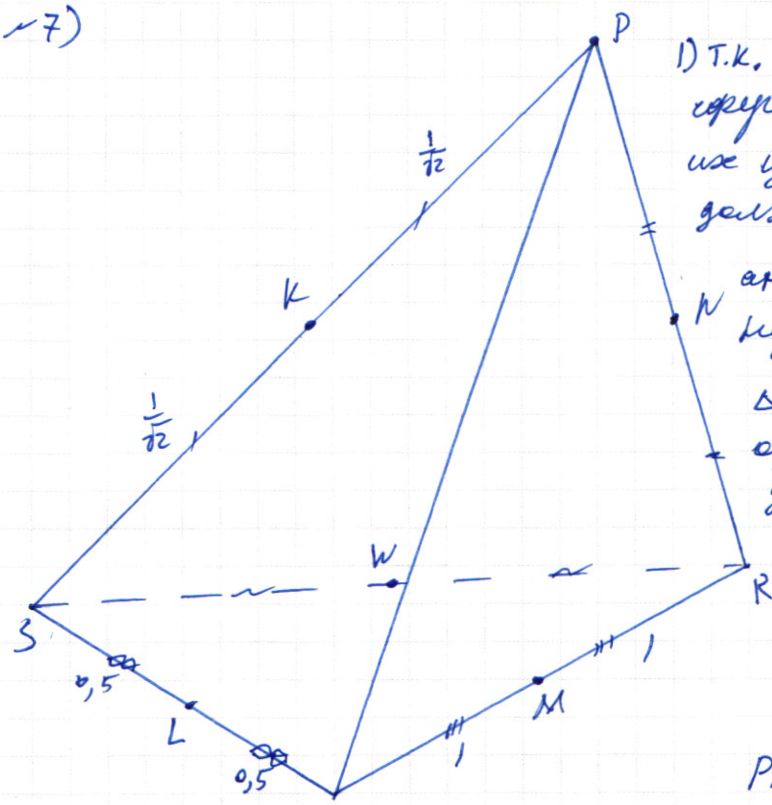
(правая ветка)

Т.е. наша прямая $y=ax+b$ должна лежать под гиперболой и над параболой, но т.к. точки: $(1;4)$; $(1,5;3)$ и $(3;0)$ лежат на одной прямой: $y=-2x+6$, точка гиперболы лежит на прямой между точками параболы, а значит только $y=-2x+6$ удовлетворяет неравенству $\Rightarrow a=-2$; $b=6$

$(a;b)=(-2;6)$
и других пар нет

Ответ: $(-2;6)$

№7)



1) Т.к. $K;P;N;M;L;W$ лежат на одной сфере, нормали к $\triangle MNW$ и $\triangle LWK$ в их центрах описанных окружностей, должны пересекаться

аналогично должны пересекаться нормали в ц. описанных ок-ней $\triangle PKN$ и $\triangle KNW$, но ведь $PKNW$ это одна плоскость $\Rightarrow$ нормали должны совпадать, а значит $PKNW$ — вписанный четырёхуг.

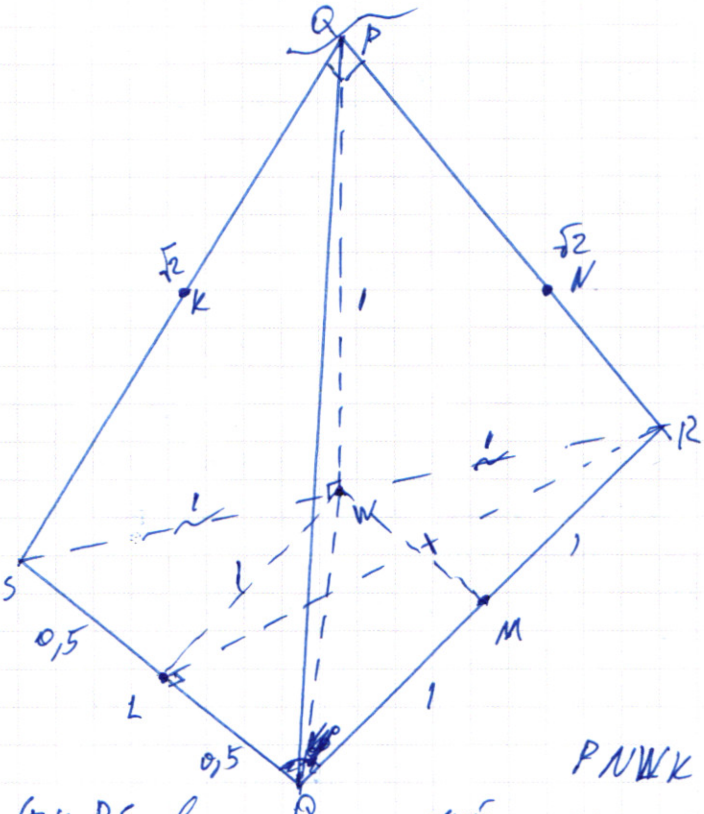
но ведь $PNKW$ — параллелограмм

$PN=KW$ как ср. линия, также $NW=KP$,

$PNKW$ может быть вписанным только если это прямоугольник, т.е. $\angle RPS$ прямой, $\angle RPS=90°$

аналогично: $KNML$ — вписанный параллелограмм $\Rightarrow NM \perp KN \Rightarrow$
$\Rightarrow NM \perp SR \Rightarrow$ ~~$(PQ \parallel MN)$~~ $\Rightarrow PQ \perp SR$
(по т. о 3-х перпендикулярах $PW \perp SR$

Переделаем чертёж:



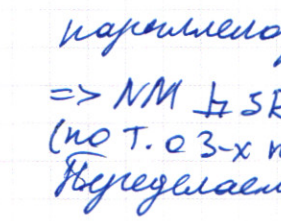
~~Т.е. точка P находится над W и $\triangle SRP$ равнобедренный~~

раз QW — высота и медиана в $\triangle QSR$ $QS=QR=\sqrt{2}$, по т. Пиф.:
$SR=2$

RL тогда $\perp SQ$ ведь $SR=RQ$

$PNWK$ — квадрат со стороной $\frac{1}{\sqrt{2}}$,

через $\cdot K$ и $\cdot N$ проходит прямоугольник $KNLM$.



опять же: единый центр у сферы будет лишь тогда, когда нормали к $MLNK$ и $PNWK$ будут пересекаться, а это возможно только если конструкция симметрична относит. оси PW

(т.к. RS — всегда диаметр одной из ок-ней сферы)
Наименьший радиус будет, если RS будет диаметром $\Rightarrow R_{min}=\frac{RS}{2}=1$,
~~при $QW=1$~~

ведь если RS не диаметр, то он меньше него.

Ответ: $RS=2$; $R_{min}=1$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3) $3^{\log_4(x^2+6x)}+6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2$

~~3log~~ по ОДЗ: D: $x^2+6x>0$ => мы можем снять модуль:
$x\in(-\infty;-6)\cup(0;+\infty)$

$3^{\log_4(x^2+6x)}+(x^2+6x) \geq (x^2+6x)^{\log_4 5}$, по свойству логарифма: $a^{\log_b c}=c^{\log_b a}$:

$(x^2+6x)^{\log_4 3}+(x^2+6x)-(x^2+6x)^{\log_4 5}\geq 0$

или же: $3^{\log_4(x^2+6x)}+4^{\log_4(x^2+6x)}-5^{\log_4(x^2+6x)}\geq 0$, для анализа нужно $t=\log_4(x^2+6x)$

$f(t)=3^t+4^t-5^t$; $\cancel{f'(t)=3^t\ln3+4^t\ln4-5^t\ln5}$

по св-ву показательной функции $f(t)$ непрерывна, тогда решим

$f(t)=3^t+4^t-5^t=0$; $3^t+4^t=5^t$; $\left(\frac{3}{5}\right)^t+\left(\frac{4}{5}\right)^t=1$

Как видно, левая часть уравнения с ростом t убывает по св-ву показательной функции на $t\in R$, ведь $\frac{3}{5}<1$ и $\frac{4}{5}<1$, тогда корень лишь один и ищется подбором, это $t=2$

$f(t)=3^t+4^t-5^t\geq 0$: + 2 − $f(t)$ t

$t\in(-\infty;2]$
или $t\leq 2$

Возвращаясь к исходному н-ву: $\log_4(x^2+6x)\leq 2$

по св-ву показат. функции: $x^2+6x\leq 16$

$x^2+6x-16\leq 0$

$(x-2)(x+8)\leq 0$

$x\in[-8;2]$

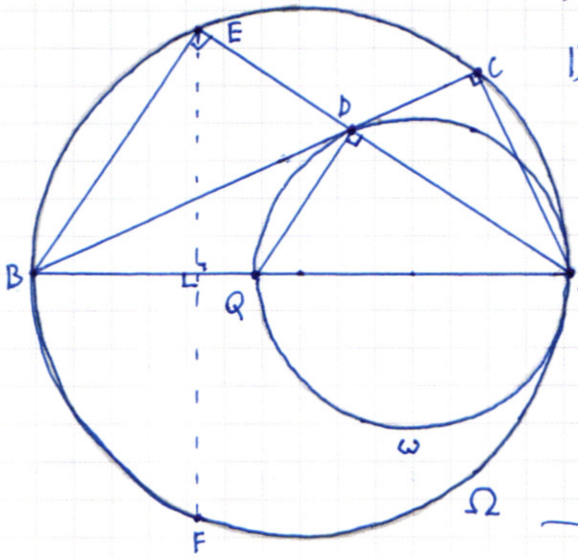
добавим ОДЗ: $x\in(-\infty;-6)\cup(0;+\infty)$

$\left[\begin{array}{l} -8 \quad 2 \quad x \\ D: -6 \quad 0 \quad x \end{array}\right.$

Итого: $x\in[-8;-6)\cup(0;2]$

Ответ: $x\in[-8;-6)\cup(0;2]$

№4) $CD=\frac{5}{2}$; $BD=\frac{13}{2}$; $r; R; \angle AFE; S_{\triangle AEF}$, пусть r – радиус ω; R – радиус Ω



1) по св-вам касательных:

$BD^2 = BQ \cdot BA$; или же $\left(\frac{13}{2}\right)^2 = (2R-2r)(2R)$ (*)

прямоугольные $\triangle ADQ$ и $\triangle AEB$ подобные
$\angle D = 90^\circ$ опора на диаметр ω; $\angle E = 90^\circ$ опора на диам. Ω; ведь $\angle DAQ$ у них общий,

тогда коэффициент подобия $k = \frac{BA}{QA} = \frac{2R}{2r} = \frac{R}{r}$

$BC = BD + DC = 9$; по т. Пиф. из $\triangle ABC$: $AC^2 = 4R^2 - 81$

$AC^2 = AB^2 - BC^2$

по т. Пиф. из $\triangle ACD$: $AD^2 = AC^2 + CD^2 = 4R^2 - 81 + \frac{25}{4}$

$AD^2 = 4R^2 - 81 + \frac{25}{4}$

Q – точка $AB \cap (\omega)$: $= \cdot Q$ (повторно)
$\cdot Q \neq \cdot A$

(*) $\left(\frac{13}{2}\right)^2 = 4R^2 - 4Rr$

$\underbrace{4R^2 = \left(\frac{13}{2}\right)^2 + 4Rr}$

$r = R - \frac{1}{4R}\left(\frac{13}{2}\right)^2$

2) по св-вам касательных:

$BD \cdot CD = AD \cdot DE$, кроме этого: $\frac{AE}{AD} = k = \frac{R}{r}$

$\frac{AD+DE}{AD} = \frac{R}{r}$

$1 + \frac{DE}{AD} = \frac{R}{r}$

$DE = AD\left(\frac{R}{r} - 1\right)$

$\frac{5}{2}\cdot\frac{13}{2} = AD \cdot AD\left(\frac{R}{r} - 1\right)$

$\frac{5 \cdot 13}{4} = \left(\frac{R}{r} - 1\right) AD^2$

$\frac{5 \cdot 13}{4} = \left(\frac{R}{r} - 1\right)\left(4R^2 - 81 + \frac{25}{4}\right)$

$\frac{5 \cdot 13}{4} = \left(\frac{R-r}{r}\right)\left(\left(\frac{13}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 4Rr - 81\right)$

$\frac{65}{4} = \left(\frac{R}{R - \frac{1}{4R}\left(\frac{13}{2}\right)^2} - 1\right)\left(\frac{169+25-324}{4} + 4R\left(R - \frac{1}{4R}\left(\frac{13}{2}\right)^2\right)\right)$

$\frac{65}{4} = \frac{\frac{1}{4R}\left(\frac{13}{2}\right)^2}{R - \frac{1}{4R}\left(\frac{13}{2}\right)^2}\left(-\frac{65}{2} + 4R^2 - \frac{169}{4}\right)$

$\frac{65}{4} = \frac{\frac{169}{4}}{4R^2 - \frac{169}{4}}\left(4R^2 - \frac{169}{4} + \frac{65}{2}\right)$

$\frac{65}{4} = \frac{\frac{169}{4}\cdot\frac{65}{2}}{4R^2 - \frac{169}{4}} + \frac{169}{4}$; $0 = \frac{169 \cdot 65}{32R^2 - 2 \cdot 169} + 26$

$169 \cdot 65 + 26 \cdot 32R^2 - 2 \cdot 26 \cdot 169 = 0$

$13^2 \cdot 5 + 2 \cdot 32R^2 - 2 \cdot 2 \cdot 13^2 = 0$

$5 \cdot 13^2 - 4 \cdot 13^2 + 2 \cdot 32R^2 = 0$

$2^6 \cdot R^2 = -13^2$? $\varnothing$

из этих положений был ~~чтобы~~ найден R, далее r из уравнений выше

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1) $\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\quad tg\alpha - ?$

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$\sin a + \sin b = 2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = 2\sin\frac{2\alpha+4\beta+2\alpha}{2}\cos\frac{2\alpha+4\beta-2\alpha}{2} = 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = -\frac{8}{17}$

Итого: $2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = -\frac{8}{17}$

$2\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right)\cos 2\beta = -\frac{8}{17}$

$\cos 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}} \Rightarrow \sin 2\beta = \pm\sqrt{1-\cos^2 2\beta} = \pm\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

случай 1: $\sin 2\alpha\cdot\frac{4}{\sqrt{17}} + \cos 2\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt{17}} = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\left(\sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}\right)$ $\quad 4\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1$

используем универсальную тригоном. подстановку:

$\sin 2\alpha = \frac{2t}{t^2+1}$; $\cos 2\alpha = \frac{t^2-1}{t^2+1}$; $\quad 4\frac{2t}{t^2+1} + \frac{t^2-1}{t^2+1} = -1$

где $t = tg\alpha$

$\frac{8t+t^2-1}{t^2+1} = -1$; $t^2+8t-1 = -t^2-1$

$2t^2+8t=0$

$\underline{t=0;\ t=-4}$

случай 2: $\sin 2\alpha\cdot\frac{4}{\sqrt{17}} + \cos 2\alpha\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\left(\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}\right)$ $\quad 4\sin 2\alpha - \cos 2\alpha = -1$

$\frac{8t}{t^2+1} - \frac{t^2-1}{t^2+1} = -1$; $\frac{-t^2+8t+1}{t^2+1} = -1$

$-t^2+8t+1 = -t^2-1$

$8t=-2$

$\cancel{t=-\frac{1}{4}}$

$\underline{t=-\frac{1}{4}}$

Все эти значения $t = tg\alpha$ может принимать в зависимости от β.

Ответ: значения $tg\alpha$: $\underline{-\frac{1}{4};\ 0;\ -4}$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

№2) $\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2} & (1) \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 & (2) \end{cases}$;

(2) $3x^2-6x+3y^2-4y=4$

$3(x^2-2x+1)-3+3(y^2-\frac{4}{3}y+\frac{4}{9})-\frac{4}{3}=4$

$3(x-1)^2+3(y-\frac{2}{3})^2=\frac{25}{3}$

$(x-1)^2+(y-\frac{2}{3})^2=\frac{25}{9}$

$(x-1)^2+(y-\frac{2}{3})^2=(\frac{5}{3})^2$

(1) $3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2}$

$D: 3y-2x\geq 0$; $y\geq \frac{2}{3}x$

$9y^2-12xy+4x^2=3xy-2x-3y+2$

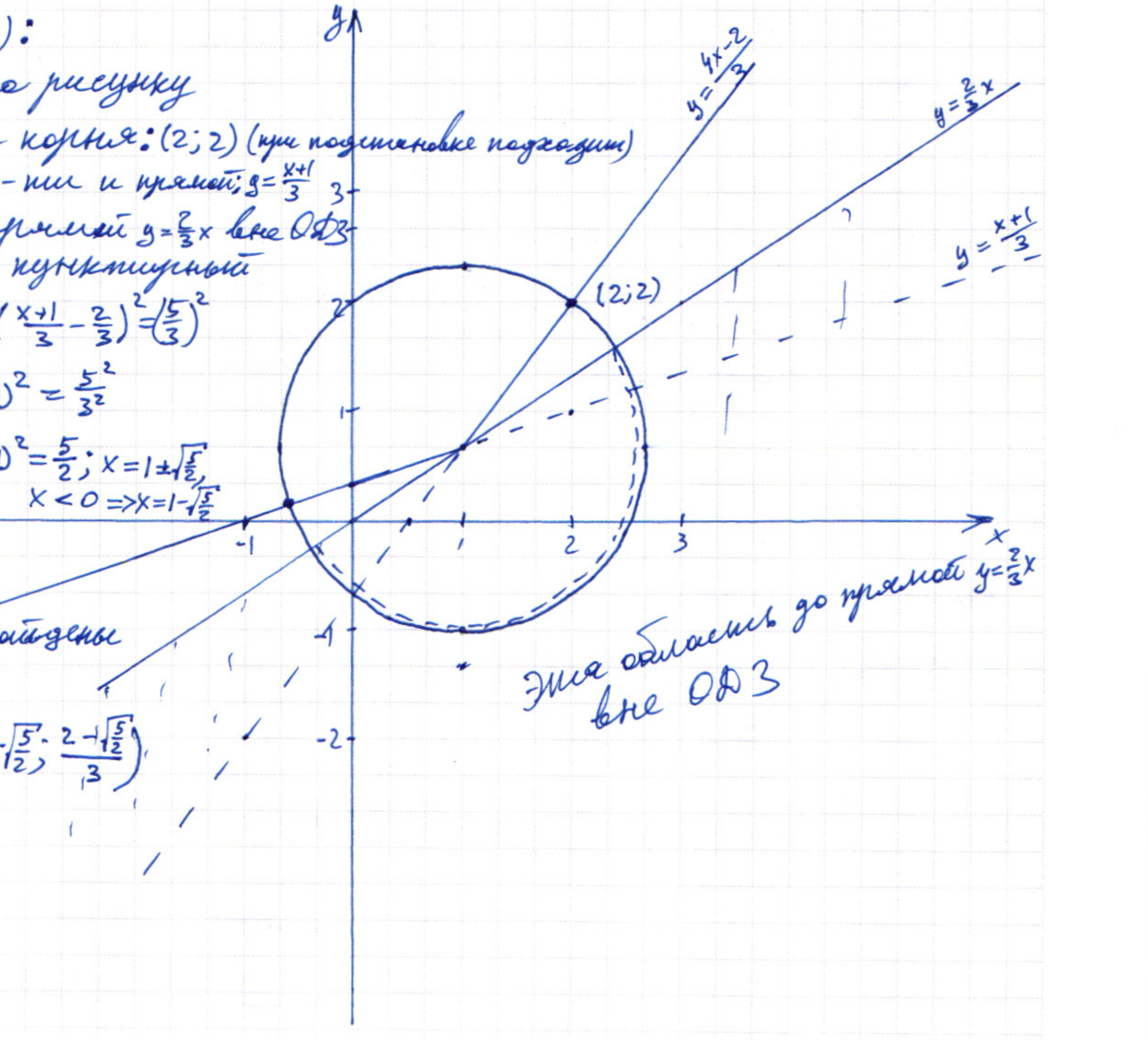
$4x^2-15xy+2x+9y^2+3y-2=0$

$4x^2+(2-15y)x+(9y^2+3y-2)=0$

$D=4-60y+225y^2-\overset{144}{\cancel{36}}y^2-48y+32=81y^2-108y+36=(9y-6)^2$

$x=\frac{15y-2\pm(9y-6)}{8}$; $x_1=3y-1$; $x_2=\frac{3y+2}{4}$

Итого: исходную систему можно удобно отобразить на плоскости (x,y):



Как видно по рисунку всего есть два корня: (2;2) (при подстановке подходит) и пересечение ок-ти и прямой $y=\frac{x+1}{3}$

область ниже прямой $y=\frac{2}{3}x$ вне ОДЗ и в графике там пунктирный

$y=\frac{x+1}{3}$; $(x-1)^2+(\frac{x+1}{3}-\frac{2}{3})^2=(\frac{5}{3})^2$

$\frac{10}{3^2}(x-1)^2=\frac{5^2}{3^2}$

$(x-1)^2=\frac{5}{2}$; $x=1\pm\sqrt{\frac{5}{2}}$

но $x<0 \Rightarrow x=1-\sqrt{\frac{5}{2}}$

$y=\frac{2-\sqrt{\frac{5}{2}}}{3}$

все корни найдены

Ответ: $(2;2)$; $\left(1-\sqrt{\frac{5}{2}}; \frac{2-\sqrt{\frac{5}{2}}}{3}\right)$

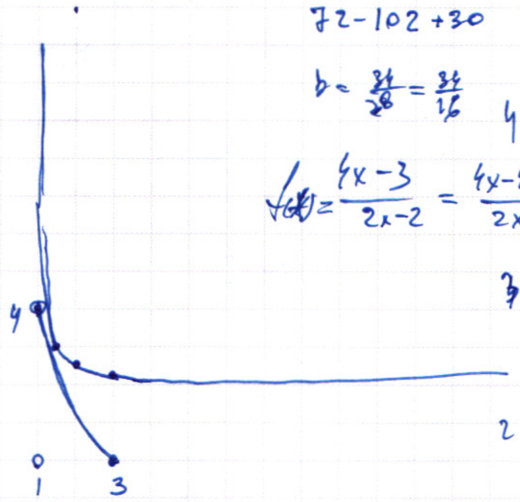
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$72-102+30$

$b=\frac{34}{28}=\frac{34}{16}$

$f(x)=\frac{4x-3}{2x-2}=\frac{4x-4+1}{2x-2}=2+\frac{1}{2x-2}$

$f(3)=2+\frac{1}{4}=2{,}25$

$f(2)=2{,}5$

$8\cdot\frac{9}{4}-34\cdot\frac{3}{2}+80$

$18-51+30$

$48=-3$

$8\cdot\frac{25}{2}-34\cdot\frac{5}{2}+30$

$50-85+30$

$32+30-68=-6$

$\cancel{y=-\frac{4}{3}x+4}$

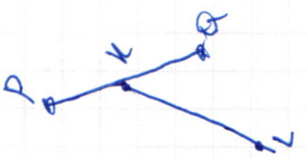
$1 \cdot -\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{2}+4$

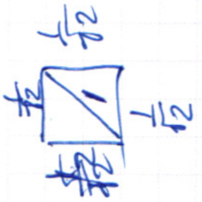
0 3

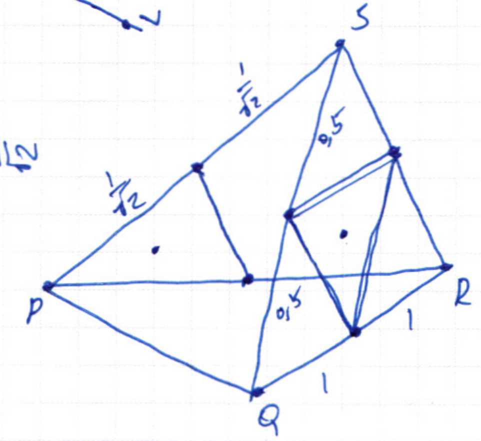
4 0

$y=-2x+6$

0 1 2 3







$4R^2-4Rx=\left(\frac{13}{2}\right)^2$

$\frac{65}{4}=\left(\frac{R}{2}-1\right)AD^2$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$\sin 2\alpha = \frac{2t}{t^2+1}$ $\sin\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{2} = 2\sin\frac{3\pi}{8}\cos$ $3^3+4^3-5^3$ 4^α $3^\alpha - 5^\alpha + 4$

27 64 125

$\cos 2\alpha \; \frac{t^2-1}{t^2+1}$

$\sum \sin\alpha + \sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha+\alpha}{2}\cos\frac{\alpha-\alpha}{2}$

$(\sin\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2} + \sin\frac{b}{2}\cos\frac{a}{2})(\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2} + \sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2})$

$\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2}\cos^2\frac{b}{2} + \sin^2\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\cos\frac{b}{2} + \cos^2\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\sin\frac{b}{2} + \sin^2\frac{b}{2}\cos\frac{a}{2}\sin\frac{a}{2}$

$\sin\alpha + \sin 2\alpha = 2\sin\frac{3\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$

$3^{\log_3 \log_3 4 (x^2+6x)}$

$\frac{1}{2}\cos b \,\cancel{\sin\alpha} + \cancel{\frac{1}{2}\cos\alpha \sin b} =$

$\cancel{\sin a\cos b + \cos a \sin b = \sin(a+b)}$

$3^{\log_4 t} - 5^{\log_4 t} + 4^{\log_4 t}$

$3^{\frac{1}{\log_3 4}\log_3(x^2+6x)}$

$\sin 2\alpha = \frac{2\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}+1}$

$\log_4 3$

$(x^2+6x)^{\log_4 3}$

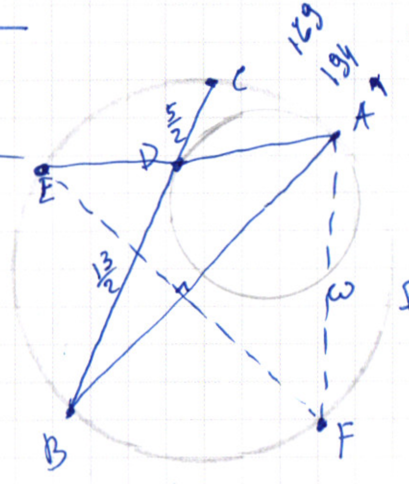
$(e^t)' = e^t$

$\cos 2\alpha = \frac{\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}-1}{\frac{1}{\cos^2\alpha}}$

$\cancel{3(e^{\ln 3 t})\ln 3}$

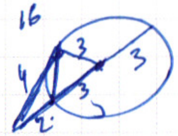
169

194

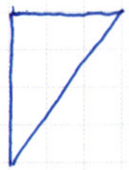


104

16



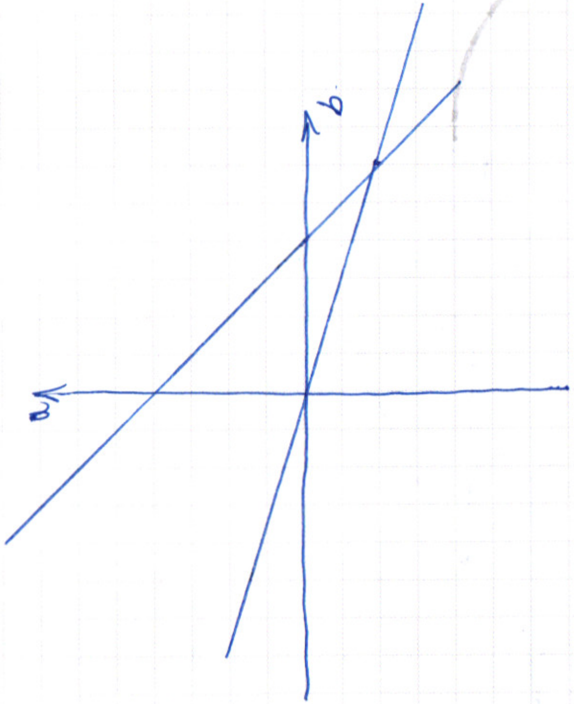
$BD^2 =$



$-\frac{1}{16} - 2 + 1 = -\frac{16}{17}$

$\frac{17}{16}$

$\frac{21}{3} + \frac{4}{3} = \frac{25}{3}$



$\frac{24y-8}{8} = 3y-1$

$15y-2$

$16y+25$

160

184

9 12; 15

$\frac{6y+4}{8} = \frac{3y+2}{4}$

$190-32$

9 6

$130 - 169\frac{65}{2}$

54

$\frac{-2}{\frac{17}{16}} + \frac{-\frac{15}{16}}{\frac{17}{16}} = -\frac{16}{17}$

229 23 67

$206 = 25 + 051$ 17 $-\frac{32}{17} - \frac{15}{17} = -1$

32 $\frac{1}{16}+1+2$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)