МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 2

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6}, \\ x^2+36y^2-12x-36y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$10x+\left|x^2-10x\right|^{\log_3 4}\geqslant x^2+5^{\log_3\left(10x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{15}{2}$, $BD=\frac{17}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $2\leqslant x\leqslant 25$, $2\leqslant y\leqslant 25$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{16x-16}{4x-5}\leqslant ax+b\leqslant -32x^2+36x-3$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[\frac{1}{4};1\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $KLMN$, вершина N которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра KN. Известно, что $KL=3$, $KM=1$, $MN=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра LM. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

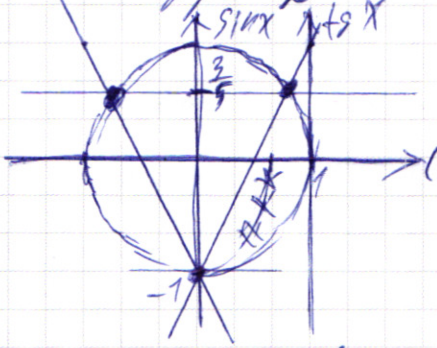
1. $\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt5}$ $\qquad$ $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{5}$

$2\alpha=x \qquad 2\beta=y$

$\sin(x+y)=-\frac{1}{\sqrt5}$ $\qquad$ $\sin((x+y)+y)+\sin((x+y)-y)=-\frac{2}{5}$

$2\sin(x+y)\cdot\cos y=-\frac{2}{5}$

$-\frac{2}{\sqrt5}\cdot\cos y=-\frac{2}{5} \Leftrightarrow \cos y=\frac{\sqrt5}{5} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} tg\, y=2 \\ tg\, y=-2\end{array}\right.$



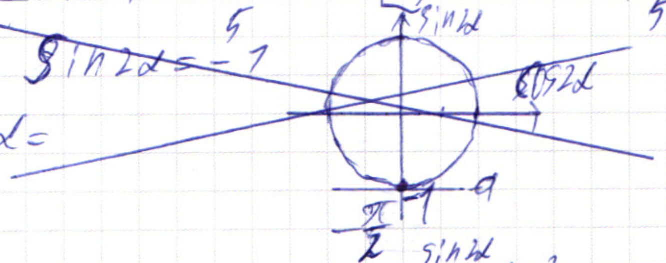
$\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\cdot\sin y$

$\sin x=-tg\, y\cdot\cos x-1$

$\left[\begin{array}{l}\sin x=-1\\ \sin x=\frac{3}{5}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin 2\alpha=-1\\ \sin 2\alpha=\frac{3}{5}\end{array}\right.$

~~$\sin 2\alpha=-1$~~

$2\alpha=$



$tg\,\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha}=$

$=\frac{\sin 2\alpha}{2}(1+tg^2\alpha)$

$\frac{\sin 2\alpha}{2}tg^2\alpha-tg\,\alpha+\frac{\sin 2\alpha}{2}=0$

$\sin 2\alpha=-1$

$-\frac{1}{2}tg^2\alpha-tg\,\alpha-\frac{1}{2}=0$

$tg^2\alpha+2\,tg\,\alpha+1=0$

$(tg\,\alpha+1)^2=0$

$tg\,\alpha=-1$

$\sin 2\alpha=\frac{3}{5}$

$\frac{3}{10}tg^2\alpha-tg\,\alpha+\frac{3}{10}=0$

$3\,tg^2\alpha-10\,tg\,\alpha+3=0$

$\left[\begin{array}{l} tg\,\alpha=3\\ tg\,\alpha=\frac{1}{3}\end{array}\right.$

Ответ: $\left\{-1;\ 3;\ \frac{1}{3}\right\}$

2. $\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6} \\ x^2+36y^2-12x-36y=45 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-6)-6(2y-1)=\sqrt{2y(x-6)-(x-6)} \\ (x^2-12x+36)+(36y^2-36y+9)=90 \end{cases}$

$\begin{cases} (x-6)-6(2y-1)=\sqrt{(x-6)(2y-1)} \\ (x-6)^2+9(2y-1)^2=90 \end{cases}$

$a=x-6 \qquad b=2y-1$

$\begin{cases} a-6b=\sqrt{ab} \\ a^2+9b^2=90 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-12ab+36b^2=ab \\ a^2+9b^2=90 \\ \cancel{ab\geq 0}\ a\geq 6b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-9b)(a-4b)=0 \\ a^2+9b^2=90 \\ a\geq 6b \end{cases}$

$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} a=9b \\ a=4b \end{array}\right. \\ a^2+9b^2=90 \\ a\geq 6b \end{cases}$

1) $\begin{cases} a=9b \\ 81b^2+9b^2=90 \\ a\geq 6b \end{cases}$ 2) $\begin{cases} a=4b \\ 16b^2+9b^2=90 \\ a\geq 6b \end{cases}$

$\begin{cases} a=9b \\ b^2=1 \\ a\geq 6b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=9b \\ \left[\begin{array}{l} b=1 \\ b=-1 \end{array}\right. \\ a\geq 6b \end{cases}$ $\begin{cases} a=4b \\ b^2=\frac{18}{5} \\ a\geq 6b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=4b \\ \left[\begin{array}{l} b=\frac{3\sqrt{2}}{5} \\ b=-\frac{3\sqrt{2}}{5} \end{array}\right. \end{cases}$

$\begin{cases} a=-1 \\ b=-9 \end{cases}$ $\begin{cases} a=\frac{12\sqrt{2}}{5} \\ b=\frac{3\sqrt{2}}{5} \end{cases}$

$\begin{cases} x-6=-1 \\ 2y-1=-9 \end{cases}$ $\begin{cases} x-6=\frac{12\sqrt{2}}{5} \\ 2y-1=\frac{3\sqrt{2}}{5} \end{cases}$

$\begin{cases} x=5 \\ y=-4 \end{cases}$ $\begin{cases} x=\frac{12\sqrt{2}+30}{5} \\ y=\frac{3\sqrt{2}+5}{10} \end{cases}$

Ответ: $(5;-4)$, $\left(\frac{12\sqrt{2}+30}{5};\ \frac{3\sqrt{2}+5}{10}\right)$.

3. $10x+|x^2-10x|^{\log_3 4}\geq x^2+5^{\log_3(10x-x^2)}$

$10x-x^2+(10x-x^2)^{\log_3 4}\geq 5^{\log_3(10x-x^2)}$, т.к. $10x-x^2>0$ условие области определения логарифма

$a=10x-x^2 \qquad a>0$

$a+a^{\log_3 4}\geq 5^{\log_3 a}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$a+4^{\log_3 a}\geq 5^{\log_3 a}$ при $a=1$ $1+1^{\log_3 4}\geq 5^0$

$t=\log_3 a \Leftrightarrow a=3^t$ $1+1\geq 1$

$3^t+4^t\geq 5^t$ $2\geq 1$

$\frac{3^t}{5^t}+\frac{4^t}{5^t}\geq 1$ $\frac{3}{5}<1 \Rightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^t \downarrow$

$\left(\frac{3}{5}\right)^t+\left(\frac{4}{5}\right)^t\geq 1$ $\frac{4}{5}<1\Rightarrow\left(\frac{4}{5}\right)^t\downarrow$

Т.к. $\exists!\, t_0: \left(\frac{3}{5}\right)^t+\left(\frac{4}{5}\right)^t=1$

при $t=2$

$\frac{9}{25}+\frac{16}{25}=\frac{25}{25}=1 \Rightarrow t\leq 2 \xRightarrow{\text{монотон.}} \left(\frac{3}{5}\right)^t+\left(\frac{4}{5}\right)^t\geq 1$

$\log_3 a\leq 2$

$0<a\leq 9$

$\begin{cases}10x-x^2\leq 9\\ 10x-x^2>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x-1)(x-9)\geq 0\\ x(x-10)<0\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}0<x\leq 1\\ 9\leq x<10\end{array}\right.$

Ответ: $(0;1]\cup[9;10)$.

5. $D_f\in \mathbb{Q}^+$ $\forall a,b\in D_f$

$f(ab)=f(a)+f(b)$ $\xRightarrow{\forall c\in D_f} f(a\cdot b\cdot c)=f((a\cdot b)\cdot c)=f(a\cdot b)+f(c)=$
$=f(a)+f(b)+f(c)$ и т.д.

p - простое $f(p)=\left[\frac{p}{4}\right]$

$\forall c$ $[c]\leq c$

$x,y\in\mathbb{N}$ $(x;y)-?$ $2\leq x\leq 25$

$2\leq y\leq 25$

$f\left(\frac{x}{y}\right)<0$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

~~$f(a)=f(1\cdot a)=f(1)$ $f(1)=f(1\cdot 1)$~~ $f(a)=f(1\cdot a)=f(1)+f(a) \Rightarrow f(1)=0$

$f(1)=f\left(\frac{a}{a}\right)=f(a)+f\left(\frac{1}{a}\right)=0 \Rightarrow f\left(\frac{1}{a}\right)=-f(a)$

$n\in\mathbb{N}$ $f(a^n)=f(\underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n})=f(a)+f(a)+\ldots+f(a)=n f(a)$

$n\in\mathbb{N}$ $f\left(\frac{1}{a^n}\right)=f(\underbrace{\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{a}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{a}}_{n})=\underbrace{f\left(\frac{1}{a}\right)+f\left(\frac{1}{a}\right)+\ldots+f\left(\frac{1}{a}\right)}_{n}=$

$= n\cdot f\left(\frac{1}{a}\right)$

$x=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot p_n^{\alpha_n}$ $p_1,p_2,\ldots,p_n$ – простые

получается $f(x)=\alpha_1 f(p_1)+\alpha_2 f(p_2)+\ldots+\alpha_n f(p_n)=\alpha_1\left[\frac{p_1}{4}\right]+\alpha_2\left[\frac{p_2}{4}\right]+$
$+\ldots+\alpha_n\left[\frac{p_n}{4}\right]=S_x$

$f\left(\frac{1}{x}\right)=-f(x)=-S_x$

получается $f\left(\frac{x}{y}\right)=S_x-S_y$

$S_x<S_y$ должно быть при $(x;y)$

$f(2)=\left[\frac{2}{4}\right]=\left[\frac{1}{2}\right]=0$ $f(13)=3$

$f(3)=0$ $f(17)=4$

$f(5)=1$ $f(19)=4$

$f(7)=1$ $f(23)=5$

$f(11)=2$

Для x, y числа p это | для всех чисел p – простых и p $2\le p\le 25$

всевозможные простые делители

1) если $x\,⋮\,2 \vee x\,⋮\,3$ $f(x)=f(x_1)$, где $x_1\in\mathbb{N}$ поделенное на 2 или 3

2) если $x\,⋮\,5 \vee x\,⋮\,7$ $f(x)=f(x_1)+1$, где x_1 поделённое на 5 или 7

3) если $x=11 \vee x=22$ $f(x)=f(11\cdot x_1)=2$

4) если $x=13$ $f(x)=3$

5) если $x=17 \vee x=19$ $f(x)=4$

6) если $x=23$ $f(x)=5$

получается $y\in\{\underbrace{5,10,15,20}_{1},\underbrace{7,14,21}_{1},\underbrace{11,22}_{2},\underbrace{13}_{3},\underbrace{17}_{4},\underbrace{19}_{4},\underbrace{23}_{5},\underbrace{25}_{2}\}$, т.к.

☐ черновик ☑ чистовик Страница № 4

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$f(y) > 0$, что неверно из-за $S_x < S_y$

таких y — всего 14 чисел, набора соответствующему только ① группе чисел

или X одно из ~~определённых чисел~~, что $S_x = 0$ и $S_y > 0$

таких наборов $\underbrace{10}_{\text{для } x} \cdot \underbrace{14}_{\text{для } y} = 140$

или $S_x > 0$, то есть x из того же набора, что и y, то можно поделить на группы ②, ③, ④, ⑤, ⑥, ⑦

или x из ②, то y может быть только из ③, ④, ⑤, ⑥, ⑦

или x из ③, то y может быть только из ④, ⑤, ⑥, ⑦

или x из ④, то y из ⑤, ⑥, ⑦

или x из ⑤, то y из ⑥, ⑦

а ~~количество~~ количество соответствующих пар

$7 \cdot 7 + 2 \cdot 5 + 4 + 2 + 2 + 1 = 68$

таким образом всего таких пар $140 + 68 = 208$.

Ответ: 208.

6. $a(x) = \dfrac{16x-16}{4x-5} \le ax + b \le -32x^2 + 36x - 3 = b(x)$ $\left.\begin{matrix}\left[\dfrac{1}{4}; 1\right]\end{matrix}\right\}$ $(a; b)$ — ?

$\dfrac{16x-16}{4x-5} = 1 + \dfrac{4}{4x-5}$

вершина параболы при $x_0 = \dfrac{9}{16}$, $\Rightarrow \dfrac{1}{4} \le x \le 1$

$b(x_0) = 7\dfrac{1}{8}$

$a(x_0) = -\dfrac{5}{11}$

$a(\frac{1}{4}) = 0$

$b(\frac{1}{4}) = 2$

$a(x_0) < b(x_0)$

$a(\frac{1}{4}) < b(\frac{1}{4})$

$a(1) < b(1)$

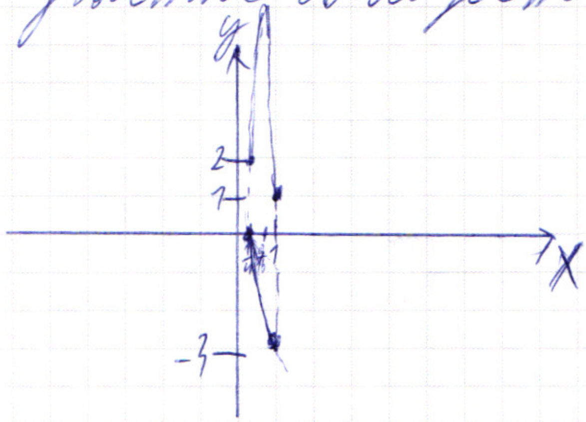
$a(1) = -3$

$b(1) = 1$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

~~т.к. вершина параболы~~ из чего следует, что
из-за разной выпуклости график на этом участке выходит примерно так;



~~из чего~~ а ~~это~~ что подтверждает что $-1 \le a \le -\frac{4}{3}$

~~а что~~ а значит

$\le \cancel{b} \le$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~$f\left(\frac{x}{y}\right) = 0(\alpha_1-\beta_1)+0(\alpha_2-\beta_2)+(\alpha_3-\beta_3)+(\alpha_4-\beta_4)$~~

если $x \,\vdots\, 2$ $f(x)=f(2\cdot x_1)=f(x_1)$

если $x \,\vdots\, 3$ $f(x)=f(3\cdot x_1)=f(x_1)$

если $x \,\vdots\, 5 \vee 7$ $f(x)= = f(x_1)+1$

если $x \in \{11; 22\}$ $f(x)=2$

если $x = 13$ $f(x)=3$

если $x \in \{17; 19\}$ $f(x)=4$

если $x = 25$ $f(x)=5$

24

~~5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 25~~

10, 14, 22

15, 21

20

14

$k = 10\cdot 4 + 7\cdot 6 + 2\cdot 5 + 4 + 2 + 2 + 1$

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sin 2\alpha}{2\cos^2\alpha} = \frac{\sin 2\alpha}{2}(1+\operatorname{tg}^2\alpha)$

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{}$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$\operatorname{tg}\alpha - ?$ $\frac{b^2}{4} = 25-9 = 16$ $\frac{5\pm4}{3}$

$\sin a + \sin b = 2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$

$2\alpha = x$ $2\beta = y$

~~$2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta$~~

$\sin(x+y) = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin(x+2y) + \sin x = -\frac{2}{5}$

$\sin(x+y)\cdot\cos y + \cos(x+y)\cdot\sin y + \sin x = -\frac{2}{5}$

$-\frac{2}{\sqrt5}\cdot\cos y = -\frac{2}{5}$

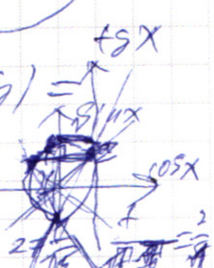
$\operatorname{tg} y = \pm\sqrt4 = \pm2$ $\cos y = \frac{\sqrt5}{5}$ $\operatorname{tg}^2 y + 1 = \frac{1}{\cos^2 y}$

$\sin((x+y)+y) + \sin((x+y)-y) = 2\sin(x+y)\cdot\cos y = -\frac{2}{5}$

$\sin x\cos y + \cos x\sin y = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin x = \cos x - 1$

$\left[\begin{array}{l}\sin x = -1\\ \sin x = \frac{3}{5}\end{array}\right.$ $1 = 5\cdot 2$



☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6}=\sqrt{2y(x-6)-(x-6)}=\sqrt{(2y-1)(x-6)} \\ x^2+36y^2-12x-36y=45 \end{cases}$$

$$(x^2-12x+36)+(36y^2-36y+9)=90$$

$$(x-6)^2+(6y-3)^2=90$$

$$x-12y=(x-6)-(12y-6)=(x-6)-6(2y-1)$$

$a=x-6$

$b=2y-1$

$$\begin{cases} a-6b=\sqrt{ab} \\ a^2+9b^2=90 \end{cases}$$

$\cancel{(\sqrt{a})^2+\sqrt{ab}+\left(\sqrt{\frac{b}{2}}\right)^2=6b+\frac{b}{2}=\frac{13}{2}b}$

$ab\geq 0$

$t=\sqrt{|a|}$

$$\begin{cases} a^2-13ab+36b^2=0 \\ a^2+9b^2=90 \\ ab\geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a-9b)(a-4b)=0 \\ a^2+9b^2=90 \\ ab\geq 0 \end{cases}$$

1). $a=9b$

$81b^2+9b^2=90$

$b^2=1$

$b=\pm 1$

$a=\pm 9$

2). $a=4b$

$16b^2+9b^2=90$

$b^2=\frac{18}{5}$

$b=\pm\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$

$a=\pm\frac{12\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$10x + |x^2 - 10x|^{\log_3 4} \geq x^2 + 5^{\log_3(10x - x^2)}$

$(10x - x^2) + (10x - x^2)^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3(10x-x^2)}$

$t = 10x - x^2 > 0$

$t + t^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3 t}$

$t + t^{\log_3 t \cdot \log_t 4} \geq 5^{\log_3 t}$

$t + 4^{\log_3 t} \geq 5^{\log_3 t}$

$t \geq 5^{\log_3 t} - 4^{\log_3 t}$

$y = \log_3 t$

при $t = 1$

$t = 1$ $\quad 1 + 1 \geq 5^0$

$t \geq t^{\log_3 5} - t^{\log_3 4} = f(x)$

$\log_4 5 > \log_3 4$

$3^y \geq 5^y - 4^y$

$3^y + 4^y \geq 5^y$

$0 < y \leq 2$

$\frac{y - y_1}{x - x_1} = a$

$\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = a$

$x \in [\frac{1}{4}; 1]$

$1 + \frac{4}{4x - 5} < -32x^2 + 36x - 3$

$x^2 - 10x + 9 \geq 0$

$(x-1)(x-9) \geq 0$

$1 + \frac{4}{\frac{9}{4} - 5} = -\frac{5}{11}$

$\frac{9}{16}$

$y_0 = -32 \cdot \frac{81}{16^2} + 36 \cdot \frac{9}{16} - 3 = -\frac{81}{8} + \frac{81}{4} - 3 = \frac{81}{8} - 3 = \frac{81 - 24}{8} = \frac{57}{8} = 7\frac{1}{8}$

при $x = \frac{1}{4}$ $\quad 0 < -32 \cdot \frac{1}{16} + \frac{36}{4} - 3 = -2 + 9 - 3 = 4$

при $x = 1$ $\quad -3 < -32 + 36 - 3 = 1$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$D_f \in \mathbb{Q}^+$

$\forall a, b \in D_f \quad f(ab) = f(a) + f(b)$

p – простое $\quad f(p) = \left[\frac{p}{4}\right]$

$[x] \in \mathbb{Z} \quad x-1 < [x] \le x$

$(x; y)$ – ? $\quad 2 \le x \le 25$

$x, y \in \mathbb{N} \quad 2 \le y \le 25$

$f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f\left(x \cdot \frac{1}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) < 0$

p, q – простые

$f(p \cdot q) = f(p) \cdot f(q) = \left[\frac{p}{4}\right] + \left[\frac{q}{4}\right]$

или $x = p \cdot y \quad p$ – простое

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f\left(\frac{py}{y}\right) = f(p) = \left[\frac{p}{4}\right] \ge 0$

$f\left(1 \cdot \frac{1}{y}\right) = f(1) + f\left(\frac{1}{y}\right) = f\left(\frac{1}{y}\right) \Rightarrow f(1) = 0$

$f(2) = \left[\frac{2}{4}\right] = \left[\frac{1}{2}\right] = 0$

$f(x^n) = nf(x)$

$n \in \mathbb{N}$

$f(3) = \left[\frac{3}{4}\right] = 0$

$f(4) = \left[\frac{4}{4}\right] = [1] = 1$

$f(1) = f\left(\frac{x}{x}\right) = 0 = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) \Rightarrow f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$

$f(x^2) = 2 \cdot f(x)$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y) \quad \left[\frac{5}{4}\right] = 1 \quad 2 \in \mathbb{Z}$

$x = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n} \quad \left[\frac{7}{4}\right] = 1 \quad x \in \mathbb{N} \quad p \in \{2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23\}$

$y = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\beta_n} \quad \left[\frac{11}{4}\right] = 2 \quad \left[\frac{13}{4}\right] = 3 \quad \left[\frac{17}{4}\right] = 4 \quad \left[\frac{19}{4}\right] = 4 \quad \left[\frac{23}{4}\right] = 5$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = \alpha_1\left[\frac{p_1}{4}\right] + \alpha_2\left[\frac{p_2}{4}\right] + \ldots + \alpha_n\left[\frac{p_n}{4}\right] - \left(\beta_1\left[\frac{p_1}{4}\right] + \beta_2\left[\frac{p_2}{4}\right] + \ldots + \beta_n\left[\frac{p_n}{4}\right]\right) =$

$= \left[\frac{p_1}{4}\right](\alpha_1 - \beta_2) + \left[\frac{p_2}{4}\right](\alpha_2 - \beta_2) + \ldots + \left[\frac{p_n}{4}\right](\alpha_n - \beta_n)$