МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{8}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases}3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2},\\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4.\end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x\geqslant |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{5}{2}$, $BD=\frac{13}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $3\leqslant x\leqslant 27$, $3\leqslant y\leqslant 27$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{4x-3}{2x-2}\geqslant ax+b\geqslant 8x^2-34x+30$$

выполнено для всех x на промежутке $(1;3]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $PQRS$, вершина P которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра PQ. Известно, что $QR=2$, $QS=1$, $PS=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра RS. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 2

$$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2} & (1) \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 & (2) \end{cases}$$

(1) Одз $3xy-2x-3y+2\geq 0$; возв обе части в кв.

$3y-2x\geq 0$

$(3y-2x)^2=3xy-2x-3y+2$

$9y^2-12xy+4x^2=3xy-2x-3y+2$

$4x^2-15xy+2x+9y^2+3y-2=0$

$4x^2-(15y-2)x+9y^2+3y-2=0$

$D=(15y-2)^2-16(9y^2+3y-2)=225y^2-60y+4-144y^2-48y+32=$
$=81y^2-108y+36=(9y-6)^2$

$x_{1,2}=\frac{(15y-2)\pm(9y-6)}{8}=\begin{cases}\frac{24y-8}{8}=3y-1 \\ \frac{6y+4}{8}=\frac{3}{4}y+\frac{1}{2}\end{cases}$

1) $x=3y-1$ подст. во (2)

$3\cdot(3y-1)^2+3y^2-6(3y-1)-4y-4=0$

$3(9y^2-6y+1)+3y^2-18y+6-4y-4=0.$

$30y^2-40y+5=0$

$6y^2-8y+1=0$

$\frac{D}{4}=16-6=10.$

$y_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{10}}{6}=\begin{cases}\frac{4+\sqrt{10}}{6} & x_1=1+\frac{\sqrt{10}}{2} \text{ - не уд одз.} \\ \frac{4-\sqrt{10}}{6} & x_2=1-\frac{\sqrt{10}}{2}\end{cases}$

2) $x=\frac{3}{4}y+\frac{1}{2}$ $\quad 3(\frac{3}{4}y+\frac{1}{2})^2+3y^2-6(\frac{3}{4}y+\frac{1}{2})-4y-4=0$

$\frac{27}{16}y^2+\frac{9}{4}y+\frac{3}{4}+3y^2-\frac{9}{2}y-3-4y-4=0.$

$\frac{75}{16}y^2-\frac{25}{4}y-\frac{25}{4}=0.\quad |:\frac{25}{4}$

$\frac{3}{4}y^2-y-1=0$

$D=1+3=4$

$y_{1,2}=\frac{1\pm2}{\frac{3}{4}}\Rightarrow\left[\begin{array}{ll}4 & x=3,5\\ -\frac{4}{3} & x=-2.\end{array}\right.$

Ответ: $(-2;-\frac{4}{3});(3,5;4);(1-\frac{\sqrt{10}}{2};\frac{4-\sqrt{10}}{6}).$

№3

$3^{\log_4(x(x+6))}+6x\geq|x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2$ ОДЗ: $x^2+6x>0$

$+\ (-6)\ -\ (0)\ +$

$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x+x^2\geq|x^2+6x|^{\log_4 5}$

на одз $|x^2+6x|=x^2+6x$ $x\in(-\infty;-6)\cup(0;+\infty)$

мы можем прологарифм по осн 4

$\log_4(x^2+6x)\cdot\log_4 3+\log_4(6x+x^2)\geq\log_4 5\cdot\log_4(x^2+6x)$

$\log_4(x^2+6x)(\log_4 3+1-\log_4 5)\geq0.$

$\log_4 3+1-\log_4 5=\log_4\frac{12}{5}$ $\frac{12}{5}>1\Rightarrow\log_4\frac{12}{5}\geq0$ и не вл на зн

$\log_4(x^2+6x)\geq0.$ $\frac{D}{4}=9+1=10.$

$(4-1)(x^2+6x-1)\geq0.$ $x_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{10}}{1}.$

$+\ [-3-\sqrt{10}]\ -\ [-3+\sqrt{10}]\ +$

одз $+\ (-6)\ -\ (0)\ +$

$x\in(-\infty;-3-\sqrt{10}]\cup[-3+\sqrt{10};+\infty)$

Ответ: $x\in(-\infty;-3-\sqrt{10}]\cup[-3+\sqrt{10};+\infty)$

№5

$f(\frac{x}{y})<0$ д.п. что $x\vdots y$ тогда $\frac{x}{y}=k$ и $f(k)=|\frac{k}{4}|>0$ т.к.

$x;y\in[3;27]\Rightarrow$ чтд. а) $x;y$ взаимно простые.

б) $f(\frac{x}{y})=f(x)-f(y)<0\Rightarrow f(y)>f(x)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

рассм. все прост. числа в диап. от 3 до 27, и т.же 2.
т.к. все числа можно представить ввиде произв прост.
$f(2)=0$ $f(3)=0$ $f(5)=1$ $f(7)=1$ $f(11)=2$ $f(13)=3$
$f(17)=4$ $f(19)=4$ $f(23)=5$, тогда чтобы $f(y)>f(x)$
y может принимать знач: 5; 7; 10; 11; 13; 14; 15; 17; 19; 20; 21; 22; 23; 25; 26. , а x всему пром $[3;27]$

$C_{15}^{2}=\frac{15!}{2!\cdot 13!}=7\cdot 15=105$, при том что любых $x_1=3;4;6;8;9;12;16;18;27$

$f(x_1)=0$.

тогда ещё $+15\cdot 9=135$

$105+135=240$

Ответ: 240

№6.

$\frac{4x-3}{2x-2}\geqslant ax+b\geqslant 8x^2-34x+30.$ $x\in(1;3]$

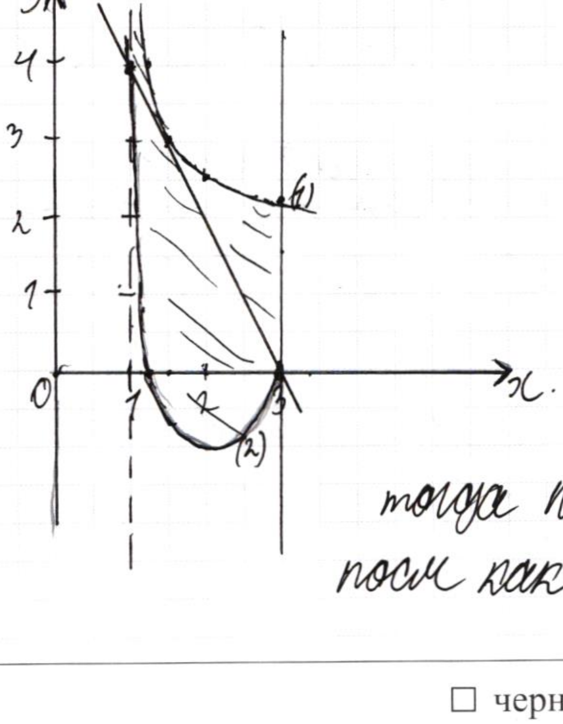
Постр. граф. функц.

(1) $y=\frac{4x-3}{2x-2}=2+\frac{1}{2(x-1)}$

(2) $y=8x^2-34x+30=2(x-3)(4x-5)$

(2) x 1 3 1,25
y 4 0 0.

(1) x 1,25 2 3 1,5
y 4 2,5 2,25 3



на. рис. видно, что.
в близи $x=1$ очень мало места.
тогда пров прям. через $(1;4)$; $(3;0)$ и посм как прям пересек с граф (1)

Возможны 3 случая а) – прям не им общ точ тогда сущ еще а и в
б) прям касается и тогда а и в единств
в) – № 2 общ точки – а и в не сущ.

$-\begin{cases} 4=a+b \\ 0=3a+b. \end{cases}$

$4=-2a.$

$a=-2 \quad b=6.$

$y=-2x+6=\frac{4x-3}{2x-2}.$

$(-2x+6)(2x-2)=4x-3$

$-4x^2+4x+12x-12-4x+3=0$

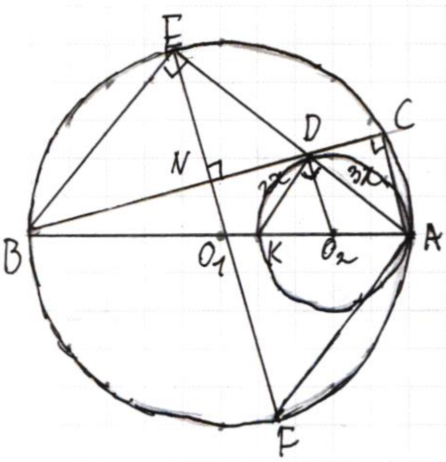
$-4x^2+12x-9=0$

$-(2x-3)^2=0. \Rightarrow x=1,5$ – соотв п (б)

тогда прям $y=-2x+6$ – единств

Ответ: $(-2;6)$

№4.



$CD=\frac{5}{2}$ $BD=\frac{13}{2}$ Ω – окр с ц O_1 и R

ω – окр. с ц O_2 и r

тогда рассм прямые BD и AB по т-ме о кас и сек то

$BD^2=AB\cdot BK$ $\quad AB=2R$ $\quad BK=(2R-2r)$

$BD^2=4(R-r)R$

рассм $\triangle BDO_2$ – он прямоуг т.к BD – кас к окр ω ~~опир на диаметр.~~

след по т-ме П. $BO_2^2=BD^2+DO_2^2$ $\quad BO_2=2R-r$ $\quad DO_2=r$

$(2R-r)^2=BD^2+r^2$

$\triangle BCA \sim \triangle BDO_2$ – по 2м углам. ($\angle BDO_2=\angle BCA=90°$; $\angle ABC$ общ)

$\frac{BD}{BC}=\frac{BO_2}{AB}=\frac{\frac{13}{2}}{9}=\frac{13}{18}=\frac{2R-r}{2R}$ $\quad 26R=36R-18r$ $\quad R=1,8r$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\left(\frac{13}{2}\right)^2=(3{,}6r-2r)\cdot 3{,}6r=1{,}6\cdot 3{,}6r^2$

$\frac{13}{2}=2{,}4r \qquad r=\frac{13}{4{,}8}=\frac{65}{24} \qquad R=\frac{65}{24}\cdot\frac{18}{10}=\frac{39}{8}$

2) рассм $\angle BDK=\frac{1}{2}\overset{\smile}{DK}=\angle DAK$; $\angle ABD$ - общ.

$\triangle BDK \sim \triangle BAD \Rightarrow \frac{DK}{DA}=\frac{BD}{AB}=\frac{\frac{13}{2}}{2\cdot\frac{39}{8}}=\frac{2}{3}$

$\triangle KDA$ - прямоуг. по т-ме П.

$4x^2+9x^2=4r^2 \qquad x=\sqrt{\frac{4}{13}\cdot\frac{65}{24}\cdot\frac{65}{24}}=\frac{5}{12}\sqrt{13}$

$13x^2=4\left(\frac{65}{24}\right)^2$

$\sin\angle DAK=\frac{2x}{2r}=\frac{\frac{5}{12}\sqrt{13}}{\frac{65}{24}}=\frac{2\sqrt{13}}{13}$

$\sin\angle EBA=\cos\angle DAK=\sqrt{1-\sin^2\angle DAK}=\sqrt{1-\frac{4}{13}}=\frac{3}{\sqrt{13}}=\frac{3\sqrt{13}}{13}$

$\angle EBA=\angle EFA$ (опир на одну дугу.

$\angle EFA=\arcsin\frac{3\sqrt{13}}{13}$

3) $EN\cdot NF=BN\cdot NC$ - (отн. хорд)

$ED\cdot DA=BD\cdot DC$

$\frac{5}{4}\cdot\frac{15}{12}\sqrt{13}\cdot ED=\frac{65}{4} \qquad \sqrt{13}\,ED=13 \qquad ED=\sqrt{13}$

$AE=\frac{9}{4}\sqrt{13}$

по т-ме П. $BE=\sqrt{4R^2-AE^2}=\sqrt{\left(\frac{39}{4}\right)^2-\frac{13\cdot 81}{16}}=$

$=\frac{\sqrt{(39\cdot 13-81)13}}{4}=\frac{6}{4}\sqrt{13}=\frac{3}{2}\sqrt{13}$ т. к. EF прох через O_1

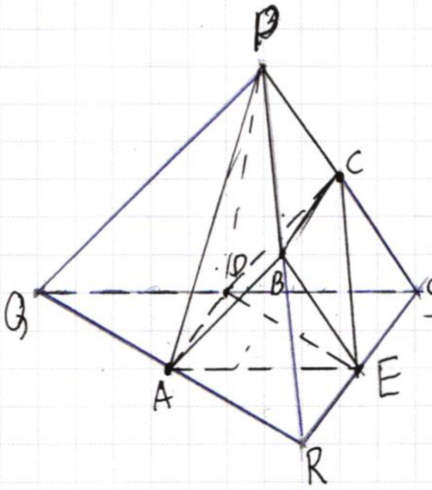
$BE=AF$

тогда $\angle EFA$ прямоуг, тогда.

$S_{EFA}=AE\cdot AF\cdot\frac{1}{2}=\frac{9}{4}\cdot\sqrt{13}\cdot\frac{3}{2}\cdot\sqrt{13}\cdot\frac{1}{2}=\frac{27\cdot 13}{16}=\frac{351}{16}$

Ответ: $\frac{65}{24}$; $\frac{39}{8}$; $\arcsin\frac{3\sqrt{13}}{13}$; $\frac{351}{16}$

№ 7



$PS=\sqrt{2}$; $QR=2$; $QS=?$

1) $PR \parallel CE$ т.к. CE – ср. линия.

$PS \parallel BE$ т.к. BE – ср. лин.

тогда $PBEC$ – параллелог.

но $PBEC$ – вписан в окр.

т.к. $PABCDE$ – вписан в сфер.

тогда ~~$\angle BPC$~~ $PBEC$

прямоуг. $\Rightarrow \angle BPC = 90^\circ$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

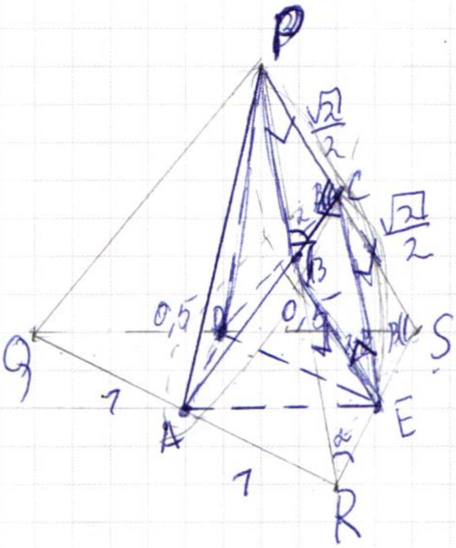
$y = 5; 7; 10; 11; 13; 14; 15; 17; 19; 20; 21; 22; 23; 25; 26. (15.)$

а x = всему: $3; 4; 5; \ldots; 25; 26; 27.$ $(25) + 3; 4; 6; 8; 9; 12; 16; 18; 24$

$C_{15}^2 = \frac{15!}{2! \cdot 13!} = \frac{14 \cdot 15}{2} = 105$ $\quad 15 \cdot 9 = 135$

$105 + 135 = 240$

№7.



~~ВABCDE – окта~~

т.к. BABCDE – ~~впис. в шар~~ сфер.

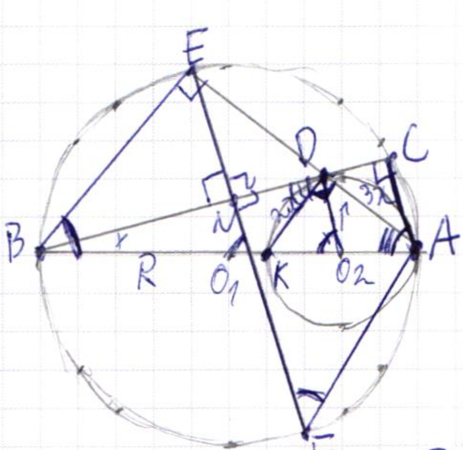
то. PCEB – впис 4хуг.

~~следов~~ $\angle BPC + \angle BEC = 180°$

PBEC – вписс парал.

тогда. PBEC – прям.

№4.



$CD = \frac{5}{2}$ $\quad BD = \frac{13}{2}$

расм. $\triangle BDO_2$ – он прямоуг.

т.к. BC кас. Ω тогда по т. Пи.

$r^2 + BD^2 = (2R - r)^2 =$

а также $BD^2 = BK \cdot AB$

$(2R - 2r) \cdot 2R = 4R^2 - 4Rr$

$\triangle BDO_2$ подоб $BCA \Rightarrow \frac{BD}{BC} = \frac{2R-r}{2R} = \frac{\frac{13}{2}}{9} = \frac{13}{18} = \frac{2R-r}{2R}$

$26R = 36R - 18r$

$18r = 10R \quad R = 1,8r$

$\left(\frac{13}{2}\right)^2 = (3,6r - 2r) \cdot 3,6r = 1,6 \cdot 3,6 r^2$

$\frac{13}{2} = 0,4 \cdot 6 r = 2,4r$

$r = \frac{13}{4,8} = \frac{130}{48} = \frac{65}{24}$ $\quad R = \frac{18}{10} \cdot \frac{65}{24} = \frac{39}{8}$

2) $\angle EFA = \angle EBA$

$\sin \angle DBA = \frac{DO_2}{BO_2} = \frac{r}{2R - r} = \frac{\frac{65}{24}}{\frac{39}{4} - \frac{65}{24}} = \frac{65}{234 - 65} = \frac{65}{169} = \frac{5}{13}$

$\sin \angle EAB = \frac{12}{13}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$3(9y^2-6y+1)+3y^2-18y+6-4y-4=0$

$30y^2-40y+5=0$

$6y^2-8y+1=0$

$\frac{D}{4}=16-6=10$

$y_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{10}}{6}$

$x_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{10}}{2}-1=\frac{2\pm\sqrt{10}}{2}$

2) $x=\frac{3}{4}y+\frac{1}{2}$

$3\left(\frac{9}{16}y+\frac{3\cdot 2}{4\cdot 2}y+\frac{1}{4}\right)+3y^2-$

$-6\left(\frac{3}{4}y+\frac{1}{2}\right)-4y-4=0$

$\frac{27}{16}y^2+\frac{9y}{4}+\frac{3}{4}+3y^2-$

$-\frac{9}{2}y-3-4y-4=0$

$\frac{75}{16}y^2-\left(\frac{25}{4}\right)y-\frac{25}{4}=0$

$\frac{3}{4}y^2-y-1=0$

$D=1+3=4$

$y_{1,2}=\frac{1\pm 2}{\frac{3}{4}}=\begin{cases}4\\-\frac{4}{3}\end{cases}$ $x=3+\frac{1}{2}=3{,}5$; $x=-1-1=-2$

$3y(3y-1)-2(3y-1)-3y+2>0$

$9y^2-3y-6y+2-3y+2>0$

$9y^2-12y+4>0$

$(3y-2)^2>0$

$y\neq\frac{2}{3}$ $x\neq 1$

$3y\left(\frac{3}{4}y+\frac{1}{2}\right)-2\left(\frac{3}{4}y+\frac{1}{2}\right)-3y+2>0$

$\frac{9}{4}y^2+\frac{3}{2}y-\frac{3}{2}y-1-3y+2>0$

$\frac{9}{4}y^2-3y+1>0$

$\left(\frac{3}{2}y-1\right)^2>0$

$\frac{3}{2}y\neq 1$ $y\neq\frac{2}{3}$ $x\neq\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\neq 1$

№3.

$3^{\log_4(x(x+6))}+6x\geqslant|(x^2+6)x|^{\log_4 5}-x^2$. ОДЗ: $x(x+6)>0$

$x\in(-\infty;-6)\cup(0;+\infty)$

? чтобольше $+6x\geqslant-x^2$ при $x>0$ т.о. пол > отр. $\Rightarrow 6x>-x^2$.

при $x<-6$. $6x\geqslant-x^2$ истина на ОДЗ

сравн. $3^{\log_4(x^2+6x)}$ и $||x^2+6x|^{\log_4 5}$ т.к. по ОДЗ.

раскр. | со зн + $\Rightarrow 3^{\log_4(x^2+6x)}$ и $(x^2+6x)^{\log_4 5}$

$\sin 2\alpha (\sin 2\beta + \cos 2\beta)^2 + \cos 2\alpha \cdot \cos 4\beta$

2) $\frac{BD}{AB} = \frac{KD}{DA} = \frac{\frac{13}{2}}{2\cdot\frac{39}{8}} = \frac{13}{39}\cdot\frac{8}{4} = \frac{2}{3}$.

$4x^2 + 9x^2 = 4r^2$

$13x^2 = 4\cdot\left(\frac{65}{24}\right)^2$

$x = \sqrt{\frac{4}{13}}\cdot\frac{65}{24}\cdot\frac{65}{24} = \frac{5}{12}\sqrt{13}$ $\quad \sin\angle DAK = \frac{2x}{2r} = \frac{\frac{5}{12}\sqrt{13}}{\frac{65}{24}} = \frac{10\sqrt{13}}{65} = \frac{10}{5\sqrt{13}}$

$\sin\angle EBA = \sqrt{1 - \frac{100\cdot 4}{25\cdot 13}} = \sqrt{\frac{9}{13}} = \frac{3}{\sqrt{13}} = \frac{3\sqrt{13}}{13}$

$\sin\angle EFA = \frac{3\sqrt{13}}{13}$

3) $EN\cdot NF = BN\cdot NC$. $\quad ED = \sqrt{13}$

$ED\cdot DA = BD\cdot DC$ $\quad AE = \frac{5}{4}\sqrt{13} + \sqrt{13} = \frac{9}{4}\sqrt{13}$

$\cancel{ED} = ED\cdot DA = \frac{13}{2}\cdot\frac{5}{2} = \frac{65}{4}$

$\frac{5}{4}\sqrt{13}\cdot ED = \frac{65}{4}$ $\quad \sqrt{13}\,ED = 13$.

$BE = \sqrt{\left(\frac{39}{4}\right)^2 - \frac{81}{16}\cdot 13} =$

$= \sqrt{\left(\frac{39}{4} - \frac{9}{4}\sqrt{13}\right)\left(\frac{39}{4} + \frac{9}{4}\sqrt{13}\right)}$

$\sin(2\alpha + 2\beta)\cdot\frac{8}{\sqrt{17}} = \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha$

$39\cdot 13 - 81 = 507 - 81 = 426$

$117 - 81 = 36$

$39 \times 13 = 117 + 390 = 507$ $\quad 39 \times 3 = 117$ $\quad 27 \times 13 = 81 + 270 = 351$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6

$\frac{4x-3}{2x-2} \geq ax+b \geq 8x^2-34x+30$

$\frac{4x-3}{2x-2} = 2+\frac{1}{2(x-1)}$

$2(4x^2-17x+15)$

$D = 17^2 - 240 = 49$

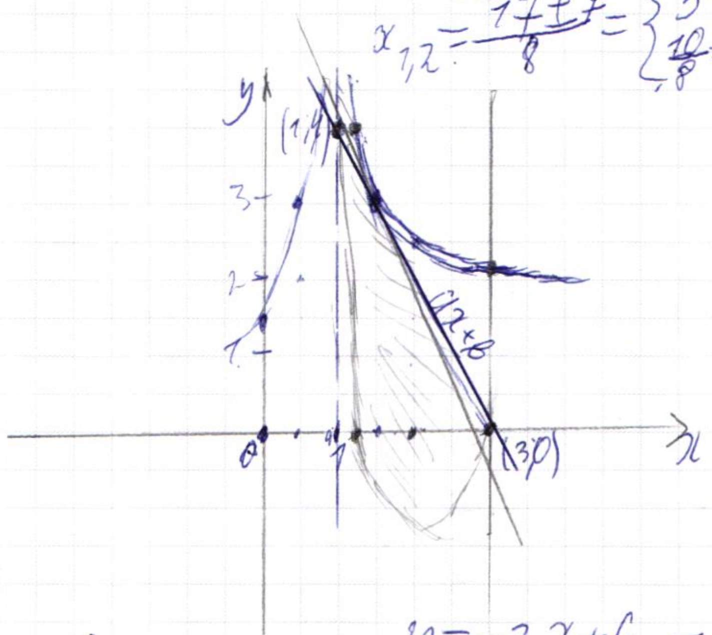
$x_{1,2} = \frac{17\pm7}{8} = \begin{cases} 3 \\ \frac{10}{8} = \frac{5}{4} = 1{,}25 \end{cases}$

$y = 2+\frac{1}{2(x-1)}$

x	2	3	0
y	2,5	2,25	1,5

$x_0 = \frac{+34}{16} = \frac{17}{8} = 2{,}125$

$x=1 \quad 8-34+30$



$y = a+b$
$-0 = 3a+b$
$4 = -2a \quad a=-2 \quad b=6$

$y = -2x+6 = \frac{4x-3}{2(x-1)}$

$(2x-2)(-2x+6) = 4x-3$

$-4x^2+4x+12x-12-4x+3=0$

$-4x^2+12x-9=0$

$-(2x-3)^2=0 \quad x=\frac{3}{2}=1{,}5$

такая прям $y=ax+b$ единств. $(-2;6)$

№1.

$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin2\alpha\cdot\sin2\beta + \cos2\alpha\cdot\cos2\beta = 4\sin^x\alpha\cdot\sin\beta\cdot$
$\cdot\cos\alpha\cdot\cos\beta + (\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)(\cos^2\beta-\sin^2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha+4\beta) = \sin2\alpha\cdot\sin4\beta + \cos2\alpha\cdot\cos4\beta + \sin2\alpha\cdot$
~~...~~ $\sin2\beta\cdot\cos2\beta$, $\quad (\cos^2 2\beta - \cos^2 2\beta)$
$\sin2\alpha(1+$

прологарифм. оба выр. ~~по~~ ~~по~~ с-мов осн 4

$\log_4(x^2+6x)\cdot\log_4 3$ и $\log_4 5\cdot\log_4(x^2+6x)$

$\log_4 3 < \log_4 5$. т.к. $4>1$ то $\log_4 x \uparrow$

$3<5$, следов. $3^{\log_4(x^2+6x)} < (x^2+6x)^{\log_4 5}$

$3^{\log_4(x^2+6x)}+(6x+x^2)\geq(x^2+6x)^{\log_4 5}$

$\log_4(x^2+6x)\cdot\log_4 3+\log_4(6x+x^2)-\log_4(x^2+6x)\cdot\log_4 5\geq 0.$

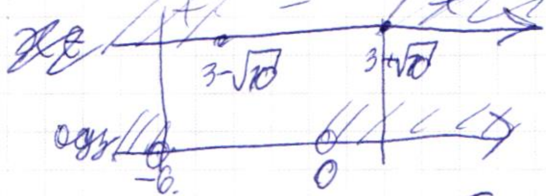
$\log_4(x^2+6x)(\log_4 3+1-\log_4 5)\geq 0.$ на одз монот.

$(4-1)(x^2+6x-1)\geq 0.$ $\quad 1+\log_4\frac{3}{5}$

$x^2+6x-1\geq 0.$ $\quad 1>-\log_4\frac{3}{5}\Rightarrow 1+\log_4\frac{3}{5}>0.$

$\frac{D}{4}=9+1=10.$

$x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{10}}{1}=\begin{cases}3+\sqrt{10}\\3-\sqrt{10}\end{cases}$ ~~не уд одз~~



$x\in(-\infty;-6)\cup[3+\sqrt{10};+\infty)$

№5.

д.п. что а и в – простые.

$f(ab)=[\frac{a}{4}]+[\frac{b}{4}]$ $\quad f(\frac{x}{y})=f(x)-f(y)<0\Rightarrow f(x)<f(y)$

для простых чисел. $f(2)=[\frac{2}{4}]=0$

$f(3)=0$ ~~$f(4)=f(2)+f(3)$~~ $f(5)=1$ $f(7)=1$

$f(11)=2$ $f(13)=3$ $f(17)=4$ $f(19)=4$. $f(23)=5$

$f(27)=\underset{f(3)+f(3)}{f(9)}+f(3)=0.$

каждое число от. $3\leq x\leq 27$ можно предст. в виде ~~про~~ произв простых

$f(\frac{x}{y})=0$ при. ~~НОД~~ НОК $(x;y)=$ ~~2~~; 3

тогда $(x;y$ – должны быть взаимно простыми прим.

$f(y)>f(x)$ но пара $(2;3)$ – дает 0 тогда пари. $(2,5)$ – $(2;$

и не сост только от двойки. и 3ки

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$\sin(2\alpha+2\beta)=\sin2\alpha\cdot\sin2\beta+\cos2\alpha\cdot\cos2\beta=-\frac{1}{\sqrt{17}}$

~~$\sin2\alpha\cdot\sin4\beta+\cos2\alpha\cdot\cos4\beta$~~ $+\sin2\alpha=-\frac{8}{17}$

$\sin2\alpha\cdot2\sin2\beta\cdot\cos2\beta+\cos2\alpha\cdot\cos4\beta+\sin2\alpha=-\frac{8}{17}$

№2.

$\begin{cases}3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2} & (1)\\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4. & (2)\end{cases}$

(2) $3x^2-6x+3y^2-4y-4=0.$

~~$\frac{\mathcal{D}}{4}=9-3\cdot(3y^2-4y-4)=-9y^2+12y+21.$~~

$3(x^2-2x+1)-3+3(y^2-\frac{4}{3}y+\frac{4}{9})-\frac{4}{3}=4.$ $\frac{1}{2}\pm\sqrt{10}$ $\frac{4+\sqrt{10}}{2}-2+\sqrt{10}<0$

$3(x-1)^2+3(y-\frac{2}{3})^2=4+3+\frac{4}{3}=\frac{25}{3}$ $2-\frac{\sqrt{10}}{3}-2+\sqrt{10}\geq0$

$(x-1)^2+(y-\frac{2}{3})^2=\frac{25}{9}$ — окр с ц. в $(1;\frac{2}{3})$ и $r=\frac{5}{3}$

(1) Одз. $3xy-2x-3y+2\geq0.$ $3y-2x\geq0$

$9y^2-12xy+4x^2=3xy-2x-3y+2.$ $12-7\geq0.$

$4x^2-15xy+2x+9y^2+3y-2=0.$ $-\frac{4}{3}+3+4=0$

$4x^2-(15y-2)x+9y^2+3y-2=0.$

$\mathcal{D}=(15y-2)^2-4\cdot4\cdot(9y^2+3y-2)=225y^2-60y+4-144y^2-$

$-48y+32=81y^2-108y+36=(9y-6)^2$

$x_{1,2}=\frac{(15y-2)\pm(9y-6)}{8}=\begin{cases}\frac{24y-8}{8}=3y-1\\ \frac{6y+4}{8}=0{,}75y+0{,}5\end{cases}$

1) $x=3y-1.$

$3\cdot(3y-1)^2+3y^2-6(3y-1)-4y-4=0.$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)