МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 4 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6}, \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$\left|x^2-26x\right|^{\log_5 12}+26x\geqslant x^2+13^{\log_5\left(26x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=12$, $BD=13$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $4\leqslant x\leqslant 28$, $4\leqslant y\leqslant 28$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{8-6x}{3x-2}\geqslant ax+b\geqslant 18x^2-51x+28$$

выполнено для всех x на промежутке $\left(\frac{2}{3};2\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $TXYZ$, вершина Y которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра TY. Известно, что $XY=\sqrt{3}$, $TX=\sqrt{2}$, $TZ=2$. Найдите длину ребра XZ. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N3

$|x^2-26x|^{\log_5 12}+26x \geq x^2+13^{\log_5(26x-x^2)}$ $\Rightarrow 26x-x^2>0 \Rightarrow x=(0;13)$

Пусть $26x-x^2=a>0$ $x^2=b\geq 0$ $a=(0;169)$

$a^{\log_5 12}+a+b \geq b+13^{\log_5 a} \Leftrightarrow$

$f(a)=a^{\log_5 12}-13^{\log_5 a}+a\geq 0$ $\cancel{13^{\log_5 a}=13^{\frac{\ln a}{\ln 5}}}$

$\cancel{a^{\log_5 12}-13^{\log_5(12^{\log_{12} a})}+a\geq 0}$

$\cancel{a^{\log_5 12}-13^{\log_{12} a\cdot\log_5(12)}+a\geq 0}$

$\cancel{f'(a)=\log_5(12)\cdot a^{\log_5(12)-1}+1-\frac{\ln a}{\ln 5}\cdot 13^{\frac{\ln a-\ln 5}{\ln 5}}\cdot\frac{1}{a}}$

$13^{\log_{13} a\cdot\log_5 12}-13^{\log_5 a}+a\geq 0$ 13^x ~~возраст ф-ия от x =>~~

$\cancel{\log_{13} a\cdot\log_5 12-\log_5 a+\log_{13} a\geq 0}$

$\cancel{\frac{\ln a}{\ln 13}\cdot\log_5 12-\frac{\ln a}{\ln 5}+\frac{\ln a}{\ln 13}\geq 0}$

$\cancel{\ln a\left(\frac{\log_5 12}{\ln 13}-\frac{1}{\ln 5}+\frac{1}{\ln 13}\right)\geq 0}$

$\cancel{\ln a\left(\frac{\ln 12-\ln 13+\ln 5}{\ln 5\cdot\ln 13}\right)\geq 0}$ ≥ 0 $(\ln 5>1, 13<e\cdot 12)$ >0

$\cancel{\Leftrightarrow \ln a\geq 0 \Leftrightarrow a\geq 1 \Leftrightarrow 26x-x^2\geq 1 \Leftrightarrow}$

$\cancel{x^2-26x+1\leq 0 \Leftrightarrow x}$

~~Ответ: $x=[-5;5]$~~

$13^{\log_{13} a\cdot\log_5 12}-13^{\log_5 a}+13^{\log_{13} a}\geq 0$

$13^{\ln a\cdot\frac{\ln 12}{\ln 5\cdot\ln 13}}-13^{\frac{\ln a}{\ln 5}}+13^{\frac{\ln a}{\ln 13}}\geq 0$

$13^{\frac{\ln a}{\ln 5\ln 13}\cdot\ln 12}+13^{\frac{\ln a}{\ln 13}}-13^{\frac{\ln a}{\ln 5}}\geq 0$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N 1

$$\begin{cases}\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}}\\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{17}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sin 2\alpha\cos 2\beta+\cos 2\alpha\sin 2\beta=-\frac{1}{\sqrt{17}}\\ \sin 2\alpha\cos 4\beta+\cos 2\alpha\sin 4\beta+\sin 2\alpha=-\frac{2}{17}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\sin 2\alpha\cos 2\beta+\cos 2\alpha\sin 2\beta=-\frac{1}{\sqrt{17}}\\ 2\sin 2\alpha\cos^2 2\beta-\sin 2\alpha+2\cos 2\alpha\sin 2\beta\cos 2\beta+\sin 2\alpha=-\frac{2}{17}\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}\sin 2\alpha\cos 2\beta+\cos 2\alpha\sin 2\beta=-\frac{1}{\sqrt{17}}\\ 2\cos 2\beta\underbrace{(\sin 2\alpha\cos 2\beta+\cos 2\alpha\sin 2\beta)}_{=\,-\frac{1}{\sqrt{17}}\text{ (см 1 ур-ие)}}=-\frac{2}{17}\end{cases} \Rightarrow 2\cos 2\beta\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right)=-2/17$$

$$\Rightarrow \cos 2\beta=+\frac{1}{\sqrt{17}} \Rightarrow \sin 2\beta=\pm\sqrt{1-\frac{1}{17}}=\pm\frac{4}{\sqrt{17}}$$

1) $\cos 2\beta=\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\quad \sin 2\beta=\frac{4}{\sqrt{17}}$

$$\sin 2\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt{17}}+\cos 2\alpha\cdot\frac{4}{\sqrt{17}}=-\frac{1}{\sqrt{17}} \Rightarrow \sin 2\alpha+4\cos 2\alpha=-1$$

Если $\sin 2\alpha=\sqrt{1-\cos^2 2\alpha} \Rightarrow \sqrt{1-\cos^2 2\alpha}+4\cos 2\alpha=-1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sqrt{1-\cos^2 2\alpha}=-1-4\cos 2\alpha \Leftrightarrow \begin{cases}\cos 2\alpha\le-0{,}25\\ 1-\cos^2 2\alpha=1+16\cos^2 2\alpha+8\cos 2\alpha\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}\cos 2\alpha\le-0{,}25\\ 17\cos^2 2\alpha+8\cos 2\alpha=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\cos 2\alpha\le-0{,}25\\ \left[\begin{array}{l}\cos 2\alpha=0 \text{ - w}\\ \cos 2\alpha=-\frac{8}{17}\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow \cos 2\alpha=-\frac{8}{17}$$

$$\sin 2\alpha=\sqrt{1-\frac{64}{289}}=\frac{15}{17}$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg} 2\alpha=-\frac{15}{8}=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} \Rightarrow -\frac{15}{8}+\frac{15}{8}\operatorname{tg}^2\alpha=2\operatorname{tg}\alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{15}{8}\operatorname{tg}^2\alpha-2\operatorname{tg}\alpha-\frac{15}{8}=0 \quad \frac{D}{4}=1+\frac{225}{64}=\left(\frac{17}{8}\right)^2 \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha=\frac{1\pm\frac{17}{8}}{\frac{15}{8}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\operatorname{tg}\alpha=\frac{5}{3}} \text{ или } \boxed{\operatorname{tg}\alpha=-\frac{3}{5}}$$

Если $\sin 2\alpha=-\sqrt{1-\cos^2 2\alpha} \Rightarrow -\sqrt{1-\cos^2 2\alpha}+4\cos 2\alpha=-1 \Rightarrow \sqrt{1-\cos^2 2\alpha}=$

$=4\cos 2\alpha+1 \Rightarrow 1-\cos^2 2\alpha=16\cos^2 2\alpha+1+8\cos 2\alpha$ ~~.......~~ и $\cos 2\alpha\ge-0{,}25$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

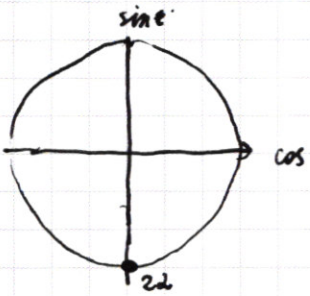
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

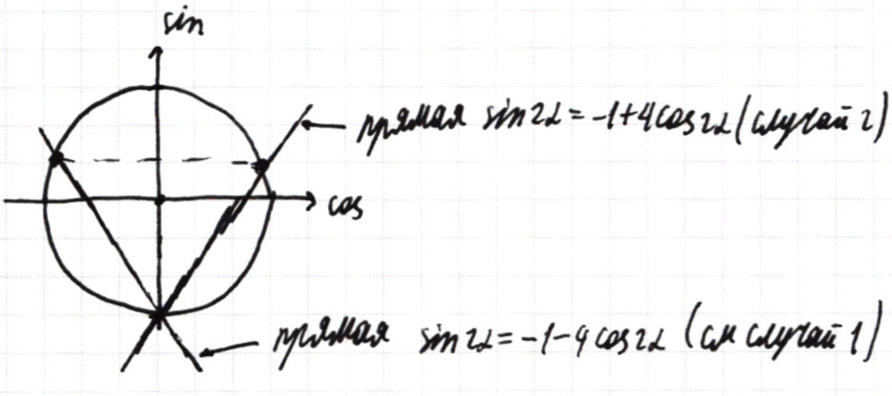
$$\Rightarrow \begin{cases} 17\cos^2 2\alpha + 8\cos 2\alpha = 0 \\ \cos 2\alpha \geq -0{,}25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \cos 2\alpha = 0 \\ \cos 2\alpha = -\frac{8}{17} \end{array}\right. \\ \cos 2\alpha \geq -0{,}25 \end{cases} \Leftrightarrow \cos 2\alpha = 0 \Rightarrow \sin 2\alpha = -1$$



$$\Rightarrow 2\alpha = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi,\ n\in\mathbb{Z} \Rightarrow \alpha = -\frac{\pi}{4} + n\pi,\ n\in\mathbb{Z} \Rightarrow \boxed{tg\,\alpha = -1}$$

2) $\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}$ $\sin 2\beta = -\frac{4}{\sqrt{17}}$

$$\sin 2\alpha \cdot \frac{1}{\sqrt{17}} + \cos 2\alpha \cdot \left(-\frac{4}{\sqrt{17}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \Rightarrow \sin 2\alpha - 4\cos 2\alpha = -1$$



Поскольку обе прямые симм. относ. оси sin, то перес. с окр-тью (которая тоже симм. относ. оси sin) будет в симм. точках

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \sin 2\alpha = \frac{15}{17} \text{ и } \cos 2\alpha = \frac{8}{17} \\ \sin 2\alpha = -1 \text{ и } \cos 2\alpha = 0 \end{array}\right\} \text{- решения } \sin 2\alpha = -1 + 4\cos 2\alpha \Rightarrow$$

$\frac{D}{4} = 64 + 225 = 17^2$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} tg\,2\alpha = \frac{15}{8} = \frac{2tg\,\alpha}{1-tg^2\alpha} \\ 2\alpha = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi\ n\in\mathbb{Z} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 15 - 15tg^2\alpha = 16tg\,\alpha \\ \alpha = -\frac{\pi}{4} + n\pi\ n\in\mathbb{Z} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 15tg^2\alpha + 16tg\,\alpha - 15 = 0 \\ tg\,\alpha = -1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} tg\,\alpha = \frac{-8\pm 17}{15} \\ tg\,\alpha = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} tg\,\alpha = -\frac{5}{3} \\ tg\,\alpha = \frac{3}{5} \\ tg\,\alpha = -1 \end{array}\right.$$

Ответ: 1) $tg\,\alpha = \frac{5}{3}$ 2) $tg\,\alpha = -\frac{3}{5}$ 3) $tg\,\alpha = -1$ 4) $tg\,\alpha = -\frac{5}{3}$ 5) $tg\,\alpha = \frac{3}{5}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

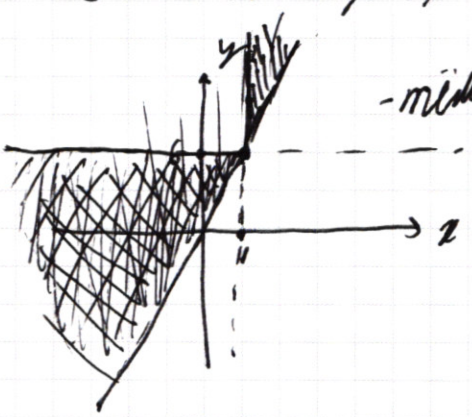
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6} \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6} \\ 9(x-1)^2+(y-6)^2=45+36+9 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6} \\ 9(x-1)^2+(y-6)^2=90 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y\geq 6x \\ xy-6x-y+6\geq 0 \\ y-6x=\sqrt{y(x-1)-6(x-1)} \\ 9(x-1)^2+(y-6)^2=90 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y\geq 6x \\ (y-6)(x-1)\geq 0 \\ y-6x=\sqrt{(y-6)(x-1)} \\ 9(x-1)^2+(y-6)^2=90 \end{cases}$$



- тёмным выделены области, в которых есть реш. (все ост. не имеют смысла из-за огранич.)

$$\begin{cases} y\geq 6x \\ (y-6)(x-1)\geq 0 \\ y^2+36x^2-12xy=(y-6)(x-1) \\ (y-6)^2=9\left(10-(x-1)^2\right) \end{cases}$$

Заменим $(y-6)$ на a, $3(x-1)$ на b:

$$\begin{cases} a+6\geq 2b+6 \\ \frac{ab}{3}\geq 0 \\ a-2b=\sqrt{\frac{ab}{3}} \\ a^2+b^2=90 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\geq 2b \\ ab\geq 0 \\ a^2+4b^2-4b=\frac{ab}{3} \\ a^2+b^2=90 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\geq 2b \\ ab\geq 0 \\ a^2-a\cdot\frac{b}{3}+4b(b-1)=0 \\ a^2+b^2=90 \Rightarrow a=\pm\sqrt{90-b^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a\geq 2b \\ ab\geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} 90-b^2-\frac{b}{3}\cdot\sqrt{90-b^2}+4b^2-4b=0 \text{ и } a=\sqrt{90-b^2} \\ 90-b^2+\frac{b}{3}\sqrt{90-b^2}+4b^2-4b=0 \text{ и } a=-\sqrt{90-b^2} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\geq 2b \\ ab\geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} 3b^2-4b+90=\frac{b}{3}\cdot\sqrt{90-b^2} \quad a=\sqrt{90-b^2} \\ 3b^2-4b+90=-\frac{b}{3}\sqrt{90-b^2} \quad a=-\sqrt{90-b^2} \end{array}\right. \end{cases}$$

$D<0$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

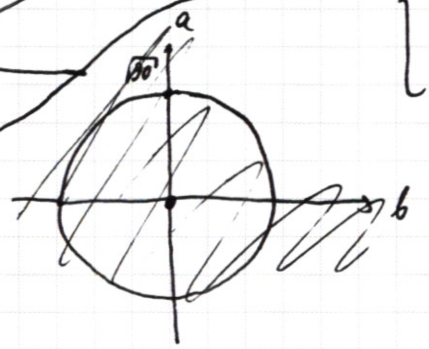
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\left[\begin{cases} a \geq 2b \\ ab \geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} (3b^2-4b+90)^2 = \frac{b^2}{9}\cdot 90 - \frac{b^4}{9} \\ b \geq 0 \\ a = \sqrt{90-b^2} \end{cases} \Big\} ab \geq 0 \\ \begin{cases} (3b^2-4b+90)^2 = \frac{b^2}{9}\cdot 90 - \frac{b^4}{9} \\ b \leq 0 \\ a = -\sqrt{90-b^2} \end{cases} \Big\} ab \geq 0 \end{array}\right. \end{cases}\right. \Leftrightarrow$$

$$a \geq 2b$$

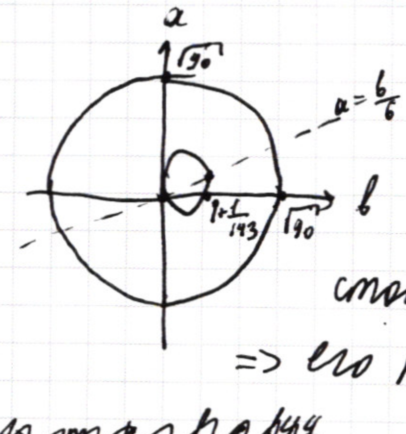
$$9b^4 + 16b^2 + 8100 - 24b^3$$

$$\begin{cases} \left(a - \frac{b}{6}\right)^2 - \frac{b^2}{36} + 4b^2 - 4b = 0 \\ a^2 + b^2 = 90 \\ ab \geq 0 \\ a \geq 2b \end{cases}$$



$$\begin{cases} \left(a - \frac{b}{6}\right)^2 = -\frac{144-1}{36} b^2 + 4b \\ a^2 + b^2 = 90 \\ ab \geq 0 \\ a \geq 2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(a - \frac{b}{6}\right)^2 = -\frac{143}{36} b^2 + 4b \\ a^2 + b^2 = 90 \\ ab \geq 0 \\ a \geq 2b \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \left(a - \frac{b}{6}\right)^2 = 4b\left(1 - \frac{143}{144} b\right) \Rightarrow b = \left[0; \frac{144}{143}\right] \\ a^2 + b^2 = 90 \\ ab \geq 0 \\ a \geq 2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{b}{6} \pm 2\sqrt{b\left(1 - \frac{143}{144} b\right)} \\ a^2 + b^2 = 90 \\ ab \geq 0 \\ a \geq 2b \end{cases}$$



$$\frac{b}{6} - 2\sqrt{b\left(1 - \frac{143}{144} b\right)} < 2b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = \frac{b}{6} + 2\sqrt{b\left(1 - \frac{143}{144} b\right)}$$ ~~≥2b~~

При этом $b = \left[0; \frac{144}{143}\right]$. Под корнем стоит кв. трёхчлен с ветвями (относ. b) вниз $\Rightarrow$ его max будет в верш. при $b = \frac{-1}{-\frac{143}{72}} = \frac{72}{143}$

~~а т.к. $b \leq \frac{144}{143}$~~ $\quad a < \frac{144}{6 \cdot 143} + 2 \cdot \sqrt{\frac{72}{143} \cdot \left(1 - \frac{72}{144}\right)} = \frac{24}{143} + \frac{12}{\sqrt{143}} < 2$

У окр-ти $a^2 + b^2 = 90$ даже при $b = 2$ $a^2 = 86 > 2 \Rightarrow$ перес. нет $\Rightarrow$ $\boxed{\text{Ответ: нет реш}}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5

Очевидно, что $f(1\cdot x)=f(x)=f(1)+f(x) \Rightarrow f(1)=0$

$f(p)=[\frac{p}{4}] \Rightarrow$ выпишем $f(p)$ для всех простых $p=[2;23]$:

$p(2)=0$ $p(3)=0$ $p(5)=1$ $p(7)=1$ $p(11)=2$ $p(13)=3$

$p(17)=4$ $p(19)=4$ $p(23)=5$

~~Поскольку мы ищем $f(x/y)$, то $x \geq y$ и $x \vdots y$ (иначе $x/y \notin \mathbb{Z}$). Если x-простое, то $x=y \Rightarrow$~~

~~$x=4 \Rightarrow y=4$ $f(\frac{x}{y})=f(1)=0$~~

$f(x/y)=f(x)-f(y)<0$ ~~при условии, что $x \geq y$~~

$f(1)=0$ $f(2)=0$ $f(3)=0$ $f(4)=f(2)+f(2)=0$ $f(5)=1$ $f(6)=f(2)+f(3)=0$

$f(7)=1$ $f(8)=f(2)+f(4)=0$ $f(9)=2\cdot f(3)=0$ $f(10)=f(2)+f(5)=1$

$f(11)=2$ $f(12)=f(2)+f(6)=0$ $f(13)=3$ $f(14)=f(2)+f(7)=1$

$f(15)=f(3)+f(5)=1$ $f(16)=f(2)+f(8)=0$ $f(17)=4$ $f(18)=f(2)+f(9)=0$

$f(19)=4$ $f(20)=f(4)+f(5)=1$ $f(21)=f(3)+f(7)=1$ $f(22)=f(2)+f(11)=2$

$f(23)=5$ $f(24)=f(12)+f(2)=0$ $f(25)=2f(5)=2$ $f(26)=3$

$f(27)=3f(3)=0$ $f(28)=f(2)+f(14)=1$

$f(x/y)=f(x)-f(y)<0 \Rightarrow f(x)<f(y)$

$f(y)=1 \Rightarrow f(x)=0 \Rightarrow$ таких y 8 x - 12 $\Rightarrow$ 96 пар

$f(y)=2 \Rightarrow f(x)=0$ или $f(x=1) \Rightarrow$ таких y 3, x - $8+12=20 \Rightarrow$ 60 пар

$f(y)=3 \Rightarrow f(x)=[0;2] \Rightarrow$ таких y 2, x - $20+3=23 \Rightarrow$ 46 пар

$f(y)=4 \Rightarrow f(x)=[0;3] \Rightarrow$ таких y 2, $x=23+2=25 \Rightarrow$ 50 пар

$f(y)=5 \Rightarrow f(x)=[0;4] \Rightarrow$ таких y 1, $x=25+2=27 \Rightarrow$ 27 пар

} неповтор., т.к. $f(y)$ разные

$\Sigma = 96+60+46+50+27=279$ Ответ: 279 пар

☐ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N6

$$\underbrace{\frac{8-6x}{3x-2}}_{f(x)} \geq \underbrace{ax+b}_{g(x)} \geq \underbrace{18x^2-51x+28}_{k(x)}$$

$f(x) = \frac{8-6x}{3x-2} = -2 + \frac{4}{3x-2} \Rightarrow f(x) = -2 + \frac{4}{3x-2}$; $f(x)=0 = -2+\frac{4}{3x-2} \Rightarrow$

$\Rightarrow 6x-4=4 \Rightarrow x=\frac{4}{3}$

$g(x) = ax+b$

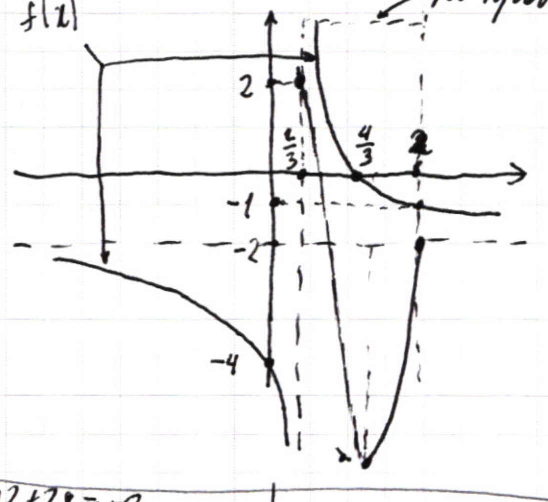
$k(x) = 18x^2-51x+28$: $D = 51^2-28\cdot18\cdot4 = 2601-28\cdot72 = 2601-2016 = 585$

$72 \cdot 28 = 576 + 144\cdot10 = 2016$

$\Rightarrow$ есть корни, верш в точке $x = \frac{51}{36} = \frac{17}{12}$

$y_B = \frac{51^2}{36\cdot2} - \frac{51^2}{36} + 28 = -\frac{51^2}{72}+28 = -\frac{17^2}{8}+28 = \frac{-65}{8}$

на промеж от $\left[\frac{2}{3};2\right]$ $f(x)$ принимает знач от $[-1;+\infty)$



~~$k(2) = 72-102+28 = -2$~~
~~$k\left(\frac{2}{3}\right) = 18\cdot\frac{4}{9}-34+28 = 2$~~ $\Rightarrow$ ~~отрицатель~~

~~$g\left(\frac{2}{3}\right) \geq 2$ $\quad g(2) = [-2;-1]$~~

~~$\Rightarrow \begin{cases} \frac{2}{3}a+b \geq 2 \\ \ldots \end{cases}$~~ ~~$\begin{cases} \ldots \cdot 2 + b \geq -2 \\ a+b \leq -1 \end{cases}$~~ ~~условие параболы~~

~~$g(x) \geq k(x) \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+b \geq -2 \\ a+b \leq -1 \end{cases}$~~

~~$g(2) = y_0 = 2a+b$ $\qquad g(x) \leq f(x) \Rightarrow g(x)$ не перес (может касаться) $f(x)$ (не может пересечь ровно в 1 точке, т.к. $f(x)$ принимает в выд. диап. все знач. ≥ -1)~~

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Для кас.: $g'(x_0)=f'(x_0) \Rightarrow a=-4\cdot\frac{3}{(3x_0-2)^2}=\frac{-12}{(3x_0-2)^2}$

$ax_0+b=-2+\frac{4}{3x_0-2}=-\frac{12x_0}{(3x_0-2)^2}+b+2=\frac{4}{3x_0-2}\Rightarrow$

$\Rightarrow -12x_0+(b+2)(3x_0-2)^2=4$

$ax+b\le -2+\frac{4}{3x-2}\Rightarrow ax+b+2\le\frac{4}{3x-2}\Rightarrow$ т.к. $x>\frac{2}{3}$:

$(ax+b+2)(3x-2)\le 4 \Leftrightarrow 3ax^2+3xb+6x-2ax-2b-4\le 4$

$\Leftrightarrow x^2\cdot 3a+x\cdot(3b+6-2a)-2b-8\le 0$

$D=(3b+6-2a)^2+12a(2b-8)=$

$-12x_0+(b+2)(9x_0^2+4-6x_0)=4$

$-12x_0+9x_0^2b+4b-6x_0b+18x_0^2+8-12x_0=4$

~~$9x_0^2(2+b)-6x_0(b+4)+4(b+2)=0$~~

$b(9x_0^2+4-6x_0)=-4+24x_0-18x_0^2$

$b=\frac{-2(+9x_0^2-12x_0+2)}{9x_0^2-6x_0+4}$

$2a+b=-2$
$\frac{2}{3}a+b=2$
$\Rightarrow\begin{cases}b=-2-2a\\ \frac{2}{3}a-2-2a=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=-2(1+a)\\ -4=\frac{4}{3}a\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=4\\ a=-3\end{cases}$

$-3x+4=-2+\frac{4}{3x-2}\Rightarrow -3x+6=\frac{4}{3x-2}\Rightarrow 4=(3x-2)(6-3x)$

$\Rightarrow 4=18x-9x^2-12+6x\Rightarrow 9x^2-24x+16=0\Rightarrow (3x-4)^2=0$ –

1 реш $\Rightarrow$ кас гиперболы $\Rightarrow$ есть ровно 1 такая прямая (если уменьш a или b, то перес. параболу, иначе – гиперболу) $\Rightarrow$ Ответ: 1 пара: $a=-3$; $b=4$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

$|x^2-26x|^{\log_5 12} \geq x^2-26x+13^{\log_5(26x-x^2)} \Rightarrow 26x-x^2 \geq 0$

$(26x-x^2)^{\log_5 12} \geq (x^2-26x)+(26x-x^2)^{\log_5 13}$

$\underbrace{26x-x^2}_{a} \geq (26x-x^2)^{\log_5 13}-(26x-x^2)^{\log_5 12}$

$a^1 \geq a^{\log_5 13}-a^{\log_5 12}$

$f(a)=a^{\log_5 5}+a^{\log_5 12}-a^{\log_5 13} \geq 0$

$\cancel{f'(a)=1+\log_5 12\cdot a^{\log_5 12-1}-\log_5 13\cdot a^{\log_5 13-1}}$

При $a \leq 1$ $a^{\log_5 12} \geq a^{\log_5 13} \Rightarrow f(a) \geq 0$

$a \geq 1$ $f(a)\downarrow$

$a+a^{\log_5 12}-a^{\log_5 13}=0$ $a=25$

$a=(0;25] \Rightarrow \cancel{x^2-26x \leq}$

$26x-x^2 \leq 25 \Rightarrow x^2-26x+25 \leq 0$ $(x-25)(x-1) \leq 0$

$\Rightarrow \boxed{x=[1;25]}$

Ответ: $x=[1;25]$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

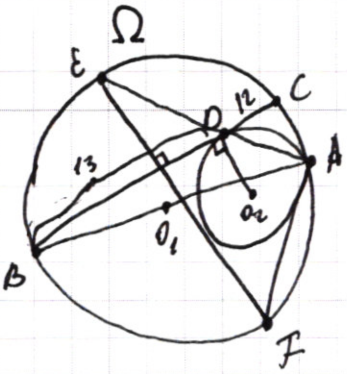
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

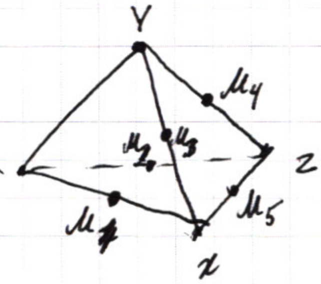
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

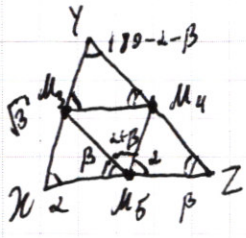
№4



№7



□ $YM_4M_5M_3$ – впис.



$\Rightarrow \angle M_3M_5M_4 = \alpha+\beta$

$\Rightarrow$ т.к. $\angle XM_5M_3 = \beta$, $\angle M_4M_5Z = \alpha$

(M_3M_5 и M_4M_5 – ср. линии), то $\angle XM_5Z = 180 = 2\alpha+2\beta \Rightarrow \alpha+\beta = 90°$

$\Rightarrow \angle XYZ = 90°$

$M_1M_2 \parallel \overline{XZ \parallel M_3M_4}^{\text{ср. линии}} \Rightarrow M_{1,2,3,4}$ – в 1 пл-ти $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ □$M_1M_3M_4M_2$ – впис $\Rightarrow \angle M_2M_1M_3 + \angle M_2M_4M_3 = 180°$

$M_2M_1 \parallel XZ$, $M_3M_1 \parallel TY \Rightarrow \angle M_2M_1M_3 = \angle(XZ, TY)$

~~$M_2M_4 \parallel TY$~~ При этом $M_1M_2 \parallel M_3M_4$ и $M_1M_2 = M_3M_4 \Rightarrow$ паралл. $\Rightarrow$ т.к. сумма противоп. углов 180°, то □$M_1M_3M_4M_2$ – прямоуг. $\Rightarrow \angle M_2M_1M_3 = 90° = \angle(XZ, TY) \Rightarrow$

$TY \perp XZ$, $XY \perp YZ$