МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 4

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6}, \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$\left|x^2-26x\right|^{\log_5 12}+26x\geqslant x^2+13^{\log_5\left(26x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=12$, $BD=13$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $4\leqslant x\leqslant 28$, $4\leqslant y\leqslant 28$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{8-6x}{3x-2}\geqslant ax+b\geqslant 18x^2-51x+28$$

выполнено для всех x на промежутке $\left(\frac{2}{3};2\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $TXYZ$, вершина Y которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра TY. Известно, что $XY=\sqrt{3}$, $TX=\sqrt{2}$, $TZ=2$. Найдите длину ребра XZ. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin(2\alpha)=2\sin\left(\frac{2\alpha+4\beta+2\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{2\alpha+4\beta-2\alpha}{2}\right)$$

$$=2\sin(2\alpha+2\beta)\cos(2\beta)=2\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right)\cos(2\beta)=-\frac{2}{\sqrt{17}}$$

$$\cos(2\beta)=\frac{1}{\sqrt{17}}\ ;\ 2\beta=\pm\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$$

$$\sin\left(2\alpha\pm\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)+2\pi k\right)=-\frac{1}{\sqrt{17}}$$

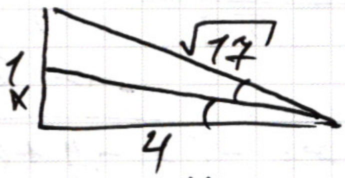
$$\sin\left(2\alpha\pm\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)\right)=-\frac{1}{\sqrt{17}}$$

I) $2\alpha\pm\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)=\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right)$

$$\alpha=\frac{1}{2}\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right)\pm\frac{1}{2}\cdot\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)$$

$$tg(\alpha)=\frac{tg\left(\frac{1}{2}\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right)\right)\pm tg\left(\frac{1}{2}\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)\right)}{1\mp tg\left(\frac{1}{2}\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right)\right)\cdot tg\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{\sqrt{17}}\right)}$$

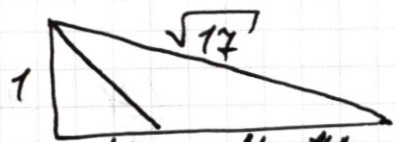
$tg\left(\frac{1}{2}\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right)\right)$:



$$= -\frac{x}{4}\ ;\ \frac{4}{x}=\frac{\sqrt{17}}{1-x}\ ;\ x=\frac{4}{4+\sqrt{17}}$$

$$= -\frac{1}{4+\sqrt{17}}$$; аналогично $tg\left(\frac{1}{2}\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)\right)=$

$$= y = \frac{4}{1+\sqrt{17}}$$



$$\frac{1}{y}=\frac{\sqrt{17}}{4-y}$$

$$y=\frac{4}{1+\sqrt{17}}$$

$$tg(\alpha)=\frac{-\frac{\sqrt{17}-4}{1}\pm\frac{\sqrt{17}-1}{1}}{1\mp\left(-\frac{\sqrt{17}-4}{1}\cdot\frac{\sqrt{17}-1}{1}\right)}$$

1) $tg(\alpha)=\frac{-\sqrt{17}+4+\sqrt{17}-1}{1+21-5\sqrt{17}}=$

$$=\frac{3}{22-5\sqrt{17}}=\frac{3(22+5\sqrt{17})}{59}$$

2) $tg(\alpha) = \dfrac{-\sqrt{17} + 4 - \sqrt{17} + 1}{1 - 21 + 5\sqrt{17}} = \dfrac{-2\sqrt{17} + 5}{5\sqrt{17} - 20} = \dfrac{-70 - 15\sqrt{17}}{25} =$

$= \dfrac{-14 - 3\sqrt{17}}{5}$

II) $2\alpha \pm \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right) = \pi - \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right) =$
$= \pi + \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)$

$\alpha = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right) \pm \frac{1}{2}\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)$

$tg(\alpha) = -ctg\left(\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right) \pm \frac{1}{2}\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)\right)$

1) $tg(\alpha) = \dfrac{1 - tg\left(\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)\right) tg\left(\frac{1}{2}\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)\right)}{tg\left(\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)\right) tg\left(\frac{1}{2}\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)\right)}$

$= \dfrac{1 - (\sqrt{17} - 4)(\sqrt{17} - 1)}{\sqrt{17} - 4 + \sqrt{17} - 1} = \dfrac{5\sqrt{17} - 20}{2\sqrt{17} - 5} = \dfrac{70 - 15\sqrt{17}}{43}$

2) $tg(\alpha) = \dfrac{1 + (\sqrt{17} - 4)(\sqrt{17} - 1)}{\sqrt{17} - 4 - \sqrt{17} + 1} = \dfrac{22 - 5\sqrt{17}}{-3} = \dfrac{5\sqrt{17} - 22}{3}$.

Ответ: $\dfrac{66 + 15\sqrt{17}}{59}$; $\dfrac{-14 - 3\sqrt{17}}{5}$; $\dfrac{70 - 15\sqrt{17}}{43}$; $\dfrac{5\sqrt{17} - 22}{3}$.

№ 2

$$\begin{cases} y - 6x = \sqrt{xy - 6x - y + 6} & (1) \\ 9x^2 + y^2 - 18x - 12y = 45 & (2) \end{cases}$$

(1) $\Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 6x \\ \text{возведением в кв. } y^2 - y(13x - 1) + 36x^2 + 6x - 6 = 0 \end{cases}$

$(y - 9x + 3)(y - 4x - 2) = 0$

$\left[\begin{array}{l} y = 9x - 3 \\ y = 4x + 2 \end{array}\right.$

(2) $\Leftrightarrow 9(x - 1)^2 + (y - 6)^2 = 90$

I) $9(x - 1)^2 + (9x - 9)^2 = 90$; $90(x - 1)^2 = 90$
$x - 1 = \pm 1$;

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\left.\begin{array}{l} x=0 \text{ или } x=2 \\ y=-3 \text{ или } y=15 \end{array}\right\}$ – в ответ.

$y \geq 6x$ (неверно) $\quad y \geq 6x$ (верно)

II) $9(x-1)^2+(4x+2-6)^2=90$

$25(x-1)^2=90$; $(x-1)^2=\frac{90}{25}$

$\left.\begin{array}{l} x=1+\frac{3\sqrt{10}}{5} \text{ или } x=1-\frac{3\sqrt{10}}{5} \\ y=6+\frac{12\sqrt{10}}{5} \text{ или } y=6-\frac{12\sqrt{10}}{5} \end{array}\right\}$ в ответ.

$y \geq 6x \qquad\qquad y \geq 6x$

$6+\frac{12\sqrt{10}}{5} \geq 6+\frac{18\sqrt{10}}{5} \qquad 6-\frac{12\sqrt{10}}{5} \geq 6-\frac{18\sqrt{10}}{5}$

неверно $\qquad$ верно

Ответ: $(2;15)$; $\left(1-\frac{3\sqrt{10}}{5}; 6-\frac{12\sqrt{10}}{5}\right)$.

№5

$f(4)=f(2)+f(2)=0+0=0$

$f(5)=\left[\frac{5}{4}\right]=1$

$f(6)=f(2)+f(3)=0$

$f(7)=\left[\frac{7}{4}\right]=1$

$f(8)=f(2)+f(2)+f(2)=0$

далее разложение опущено

$f(9)=0+0=0$

$f(10)=1$

$f(11)=2$

$f(12)=0$

$f(13)=3$

$f(14)=1$

$f(15)=1$

$f(16)=0$

$f(17)=4$

$f(18)=0$

$f(19)=4$

$f(20)=1$

$f(21)=1$

$f(22)=2$

$f(23)=5$

$f(24)=0$

$f(25)=2$

$f(26)=3$

$f(27)=0$

$f(28)=1$

Сколько чисел с f, равной $f(n)$?

$f(n)$:	0	1	2	3	4	5
	9	8	3	2	2	1

$$f\left(\frac{x}{y}\right)<0 \Leftrightarrow f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right)<0$$

$$f(2)=f(2)+f(1) \Rightarrow f(1)=0$$

$$f\left(a\cdot\frac{1}{a}\right)=0=f(a)+f\left(\frac{1}{a}\right) \Rightarrow f\left(\frac{1}{a}\right)=-f(a)$$

$$f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right)<0 \Leftrightarrow f(x)-f(y)<0$$

$$f(x)<f(y)$$

Условие верно ~~[illegible]~~ в случаях:

$f(x)=0$ и $f(y)=1,\ldots,5$ и т.д.

Их кол-во: $9\cdot(8+3+2+2+1)+$

$+8\cdot(3+2+2+1)+$

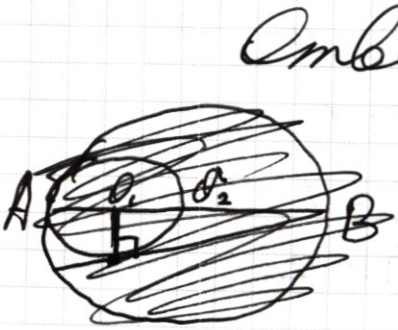
$+3\cdot(2+2+1)+$

$+2\cdot(2+1)+$

$+2\cdot1=331.$

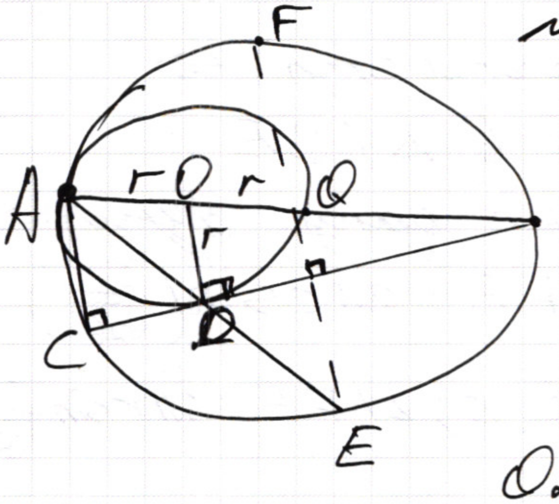
Ответ: 331.

~~№4~~



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4



Радиус ω: r

Радиус Ω: R

$AB \cap \omega = Q$

$QB = 2R - 2r$

$OB = QB + r = 2R - r$

$OD \perp CB$ (радиус к (·) кас.)

$AC \perp CB$, т.к. AB - диам.

$\triangle ACB \sim \triangle ODB$ (по 2-м углам) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{BD}{BC} = \frac{OB}{AB} = \frac{13}{13+12} = \frac{2R-r}{2R}$

$26R = 50R - 25r$

$25r = 24R$; $R = \frac{25r}{24}$

AB - секущая, BD - касательная,

$BD^2 = BQ \cdot AB$

$13^2 = (2R-2r) \cdot 2R = 4 \cdot (R-r) \cdot R = 4 \cdot \frac{r}{24} \cdot \frac{25r}{24}$

$169 = \frac{25r^2}{144}$; $r = \sqrt{\frac{169 \cdot 144}{25}} = \frac{13 \cdot 12}{5} = 31{,}2$

$R = \frac{25}{24} \cdot \frac{13 \cdot 12}{5} = \frac{5 \cdot 13}{2} = 32{,}5$

$\cos \angle BOD = \cancel{\frac{BO}{OD}} = \cancel{\frac{2R-r}{r}} = \frac{OD}{OB} = \frac{r}{2R-r} =$

$= \frac{r}{\frac{25r}{12} - r} = \frac{r}{\frac{13r}{12}} = \frac{12}{13}$; $\cos\angle AOD = -\cos\angle BOD =$

$= -\frac{12}{13}$

$AD = \sqrt{r^2 + r^2 + \frac{12}{13} \cdot 2 \cdot r^2} = r\sqrt{2 + \frac{24}{13}} = \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{13}} r$

$$\cos\angle OAD = \frac{AO^2 + AD^2 - OD^2}{2AO\cdot AD} =$$

$$= \frac{\frac{50r^2}{13}}{2\cdot r\cdot \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{13}}r} = \frac{5}{\sqrt{26}}$$

$\angle AED = 90°$ (опир. на диаметр) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \sin\angle ABE = \cos\angle OAD$ в $\triangle ABE$;

$\angle AFE = \angle ABE$ (опир. на одну дугу) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \sin\angle AFE = \frac{5}{\sqrt{26}}$; $\angle AFE = \arcsin\left(\frac{5}{\sqrt{26}}\right)$.

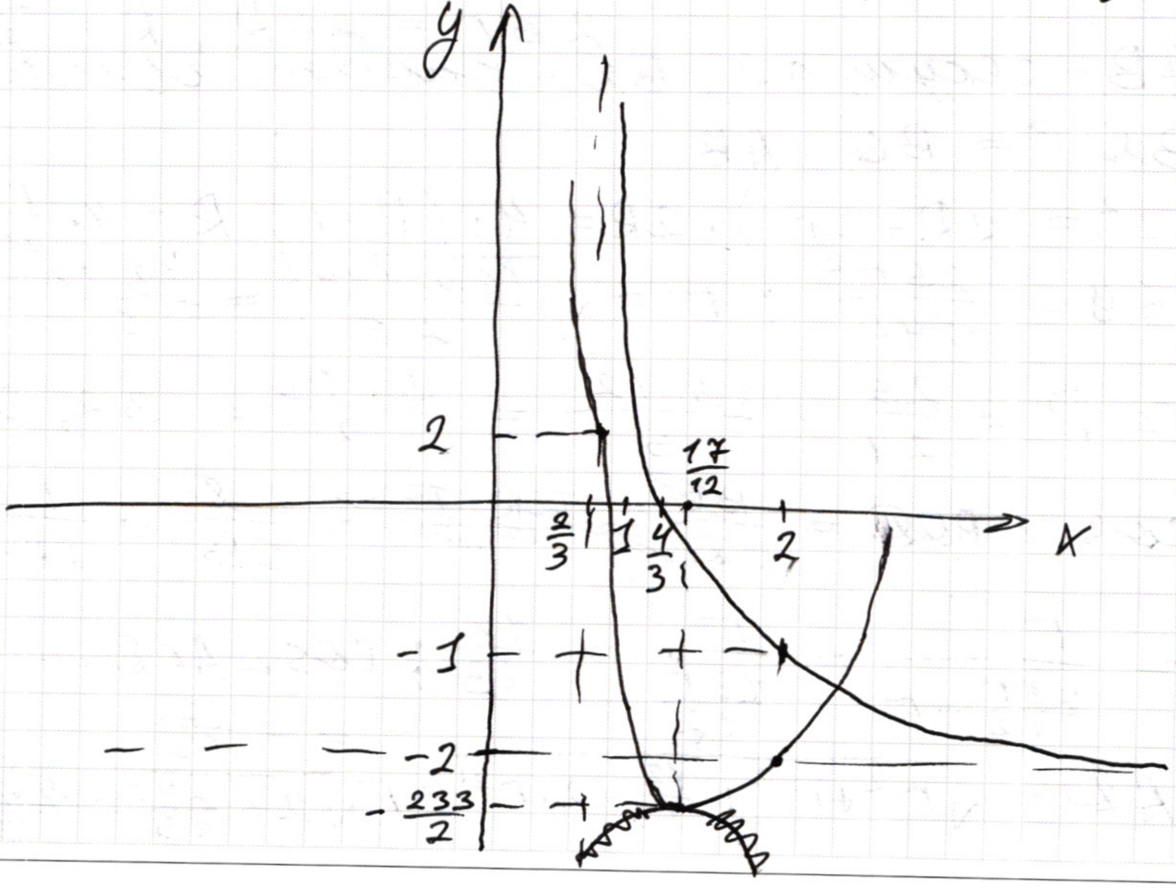
Ответ: $r = 31{,}2$; $R = 32{,}5$; $\angle AFE = \arcsin\frac{5}{\sqrt{26}}$

№ 6

$$y_1 = \frac{8-6x}{3x-2} = -\frac{6x-8}{3x-2} = -\frac{6x-4-4}{3x-2} =$$

$$= -2 + \frac{4}{3x-2}$$

$$y_2 = 18x^2 - 51x + 28 = 18\left(x - \frac{17}{12}\right)^2 - \frac{233}{2}$$



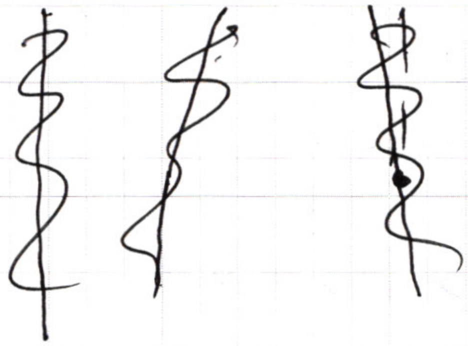
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$\cancel{ax+b}$ $\cancel{\frac{2}{3}a+b\geq 2}$

$\cancel{-2\leq 2a+b\leq -1}$

$\cancel{ax_0+b\leq \frac{8-6x_0}{3x_0-2}}$ $\cancel{\forall x_0 \in \left(\frac{2}{3};2\right]}$

$\cancel{(ax_0+b)(3x_0-2)\geq 8-6x_0}$

$\cancel{3ax_0^2}$

$$a_{min}: \begin{cases} 2a_{min}+b_{1,2min}=-2 \\ \frac{2}{3}a_{min}+b_1=2 \\ \begin{cases} x_0 a_{min}+b_2=-2+\frac{4}{3x_0-2} \\ a_{min}=-\frac{4}{(3x_0-2)^2} \end{cases} \end{cases}$$

$$a_{max}: \begin{cases} 2a_{max}+b_{1,2max}=-1 \\ \frac{2}{3}a_{max}+b_{1max}=2 \\ \begin{cases} x_0 a_{max}+b_{2max}=-2+\frac{4}{3x_0-2} \\ a_{max}=-\frac{4}{(3x_0-2)^2} \end{cases} \end{cases}$$

№ 3

$26x-x^2=t>0$ $y=\log_5 t;\ t=5^y$

$t^{\log_5 12}+t\geq t^{\log_5 13}$; $12^y+5^y\geq 13^y \mid :13^y$

$\left(\frac{12}{13}\right)^y + \left(\frac{5}{13}\right)^y \geq 1$

Левая часть убывает, равенство при $y = 2 \Rightarrow$ верно при $y \leq 2$

$\log_5 t \leq 2$

$t \leq 5^2 = 25$

$26x - x^2 \leq 25$

$x^2 - 26x + 25 \geq 0$

$(x-1)(x-25) \geq 0$

$x \in (-\infty; 1] \cup [25; +\infty)$.

Но $t > 0$, $26x - x^2 > 0$

$x^2 - 26x < 0$

$x \in (0; 26)$.

Ответ: $x \in (0; 1] \cup [25; 26)$.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

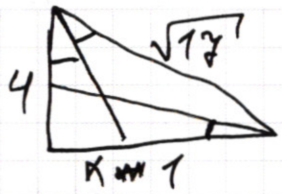
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$170 - 100 + 25\sqrt{17} - 40\sqrt{17}$



$= 70 - 15\sqrt{17}$

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$+\ \sin(\alpha-\beta) = \sin(\alpha)\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

$= 2\sin(\alpha)\cos(\beta)$ $\quad tg\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{}{1 - tg\left(\frac{\pi}{4}\right)tg\left(\frac{\pi}{4}\right)}$

$2\alpha + 2\beta \pm 2\beta \Rightarrow 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos(2\beta) = -\frac{2}{17}$

$2\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right)\cos(2\beta) = -\frac{2}{17}$

$\frac{4}{x} = \frac{\sqrt{17}}{1-x}$ $\quad -\frac{2}{\sqrt{17}}\cdot\cos(2\beta) = -\frac{2}{17}$

$4 - 4x = x\sqrt{17}$ $\quad \cos(2\beta) = \frac{1}{\sqrt{17}}$

$x(4+\sqrt{17}) = 4$

$x = \frac{4}{4+\sqrt{17}}$ $\quad \sin(2\beta) = \sqrt{\frac{16}{17}} = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}$

~~$\sin(2\alpha)\cos(2\beta) + \cos(2\alpha)\sin(2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$~~

~~$\sin(2\alpha)\cdot\frac{1}{\sqrt{17}} + \cos(2\alpha)\pm\frac{4}{\sqrt{17}} = -\frac{1}{\sqrt{17}}$~~

~~$\sin(2\alpha) \pm 4\cos(2\alpha) = -1$~~ $\quad 4 - x = x\sqrt{17}$

$2\alpha + 2\beta = \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right)$ или $\quad x = \frac{4}{1+\sqrt{17}}$

$\alpha = \frac{1}{2}\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right) \pm \frac{1}{\sqrt{17}} + 2\pi k, k \in Z$

$tg(\alpha) = tg\left(\frac{1}{2}\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right) \pm \frac{1}{\sqrt{17}}\right)$

$$\begin{array}{r} 25 \\ \times\ 17 \\ \hline 175 \\ 25 \\ \hline 425 \end{array}$$

$tg(\alpha) = tg\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right) \pm \frac{1}{\sqrt{17}}\right) =$

$= ctg\left(\pm\frac{1}{\sqrt{17}} + \frac{1}{2}\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right)\right)$ $\quad 484 - 425 = 59$

$68 - 25 = 43$ $\quad 17 + 4 - 5\sqrt{17}$ $\quad -170 + 25\sqrt{17} - 40\sqrt{17} + 100 = -70 - 15\sqrt{17}$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №___ (Нумеровать только чистовики)

$(3x-3)^2+(y-6)^2=45+9+36=90$

$y^2-12yx+36x^2=xy-6x-y+6$

$y^2-y(13x\cancel{+}-1)+36x^2+6x-6=0$

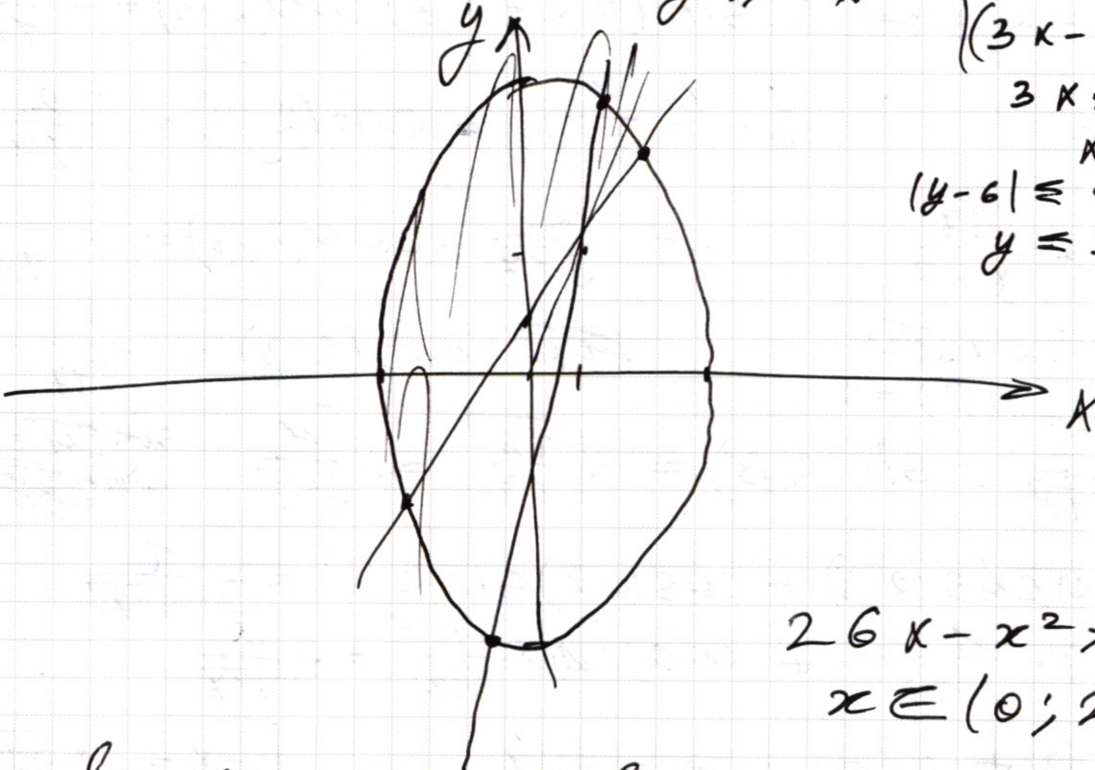
$D=169x^2-26x+1-144x^2-24x+24=$

$=25x^2-50x+25=$

$=25(x-1)^2$

$y=\dfrac{13x-1\pm(5x-5)}{2}=9x-3;\ 4x+2$

$y\geqslant 6x$



$|(3x-3)|\leq\sqrt{90}$

$3x\leq 3+\sqrt{90}$

$x\leq 1+\sqrt{10}$

$|y-6|\leq\sqrt{90}$

$y\leq 3\sqrt{10}+6$

$26x-x^2>0$

$x\in(0;26)$

$\cancel{t}^{\log_5 12}\geqslant t+t^{\log_5 13}$

$26x-x^2=t$

$18x^2-51x+28$

$72-102+28=$

$=100-102=-2$

$t^{\log_5 12}+t\geqslant t^{\log_5 13}$

$y'(\cancel{t})=\log_5 12\cdot t^{\log_5\frac{12}{5}}-\log_5 13\cdot t^{\log_5\frac{13}{5}}+1=0$

$t^{\frac{a-1}{b-1}}=\dfrac{b}{a};\ t=\dfrac{b^{\frac{b-1}{a-1}}}{a^{\frac{b-1}{a-1}}}$

$4\cdot 2-34+28=36-34=2$

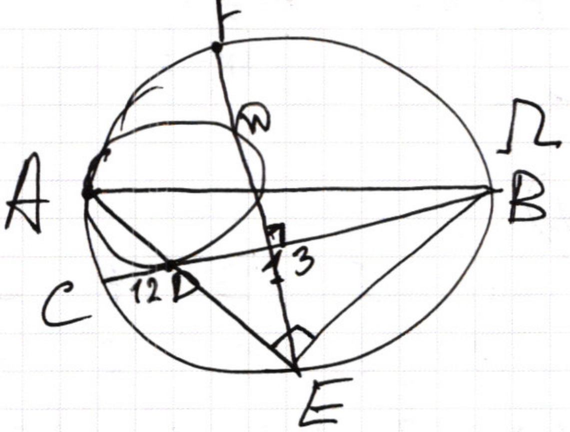
☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

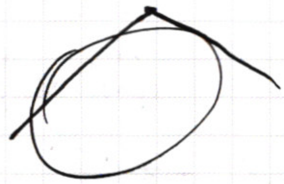
Страница №__

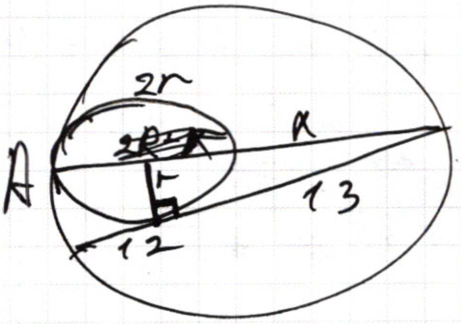
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$t^{\log_5 12} + t \geq t^{\log_5 13}$$





$$\cancel{\begin{cases}(r+x)^2 = r^2 + 169 \\ x\cdot(2r+x) = 169\end{cases}}$$

$$\cancel{13x}\cdot 13^2 = \cancel{x\cdot(x+a)}\ x\cdot 2R$$

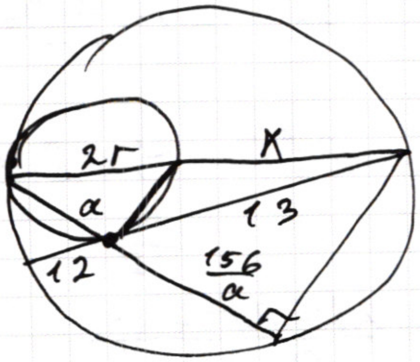
$$\begin{array}{r} 24 \\ \times\ 13 \\ \hline 72 \\ 24 \\ \hline 31{,}2 \end{array}$$

$$\frac{65}{2} = \cancel{30{,}2}\ \cancel{2R-x}$$

$$x = \frac{13^2}{2R}$$

$$32{,}5\ \ 2R - \frac{13^2}{2R} = \frac{4R^2 - 13^2}{2R}$$

$$\cancel{\left(\frac{2R-x}{2} + x\right)^2 = \left(\frac{2R-x}{2}\right)^2 + 169}$$



$$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) < 0$$

$$130 + 26 = 156$$

$$f(a) = f(a) + f(1)$$

$$f(1) = 0;\ f(2) = f(2) + f(1)$$

$$f(ab) = f(a) + f(b)$$

$$f(a\cdot 1) = f(a) + f\left(\frac{1}{a}\right) = 0$$

$$f(p) = [p/4]$$

$f(4) = f(2) + f(2) = 0 + 0$

$f(1) = f(a) + f\left(\frac{1}{a}\right);$

$f\left(\frac{1}{a}\right) = -f(a)$

$\frac{8-6x}{3x-2}$

$f(x/y) = f(x) - f(y) < 0$

$f(x) < f(y)$

$4 = 2\cdot 2 \to 0.$

$5 \to 1.$

$6 \to 2\cdot 3 \to 0.$

$7 \to 1.$

$8 \to 0.$

$9 \to 0.$

$10 \to 1.$

$11 \to 2.$

$12 \to 0.$

$13 \to 3.$

$14 \to 1.$

$15 \to 1.$

$16 \to 0.$

$17 \to 4.$

$18 \to 0.$

$19 \to 4.$

$20 \to 1.$

$21 \to 1.$

$22 \to 2.$

$23 \to 5.$

$26 \to 3.$

$27 \to 0.$

$28 \to 1.$

0	1	2	3	4	5
8	8	2	2	2	1

$x < y: 8\cdot 8 + 8\cdot 2 + 2\cdot 2 + 2\cdot 2 + 2$

$= 64 + 16 + 4 + 4 + 2 =$

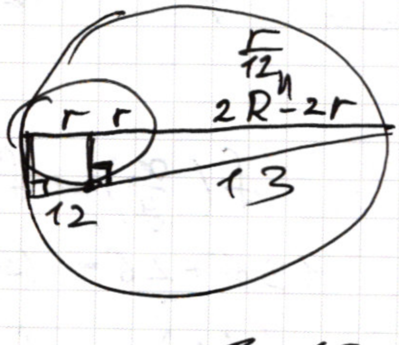
$= 80 + 10 = 90$

$\frac{5}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{26}}$

$9\cdot 16 + 8\cdot 8 + 3\cdot 5 + 2\cdot 3 + 2 =$

$= 144 + 64 + 15 + 8 =$

$= 208 + 23 = 331$



$\frac{r}{12}\cdot\left(2r + \frac{r}{12}\right) = 169$

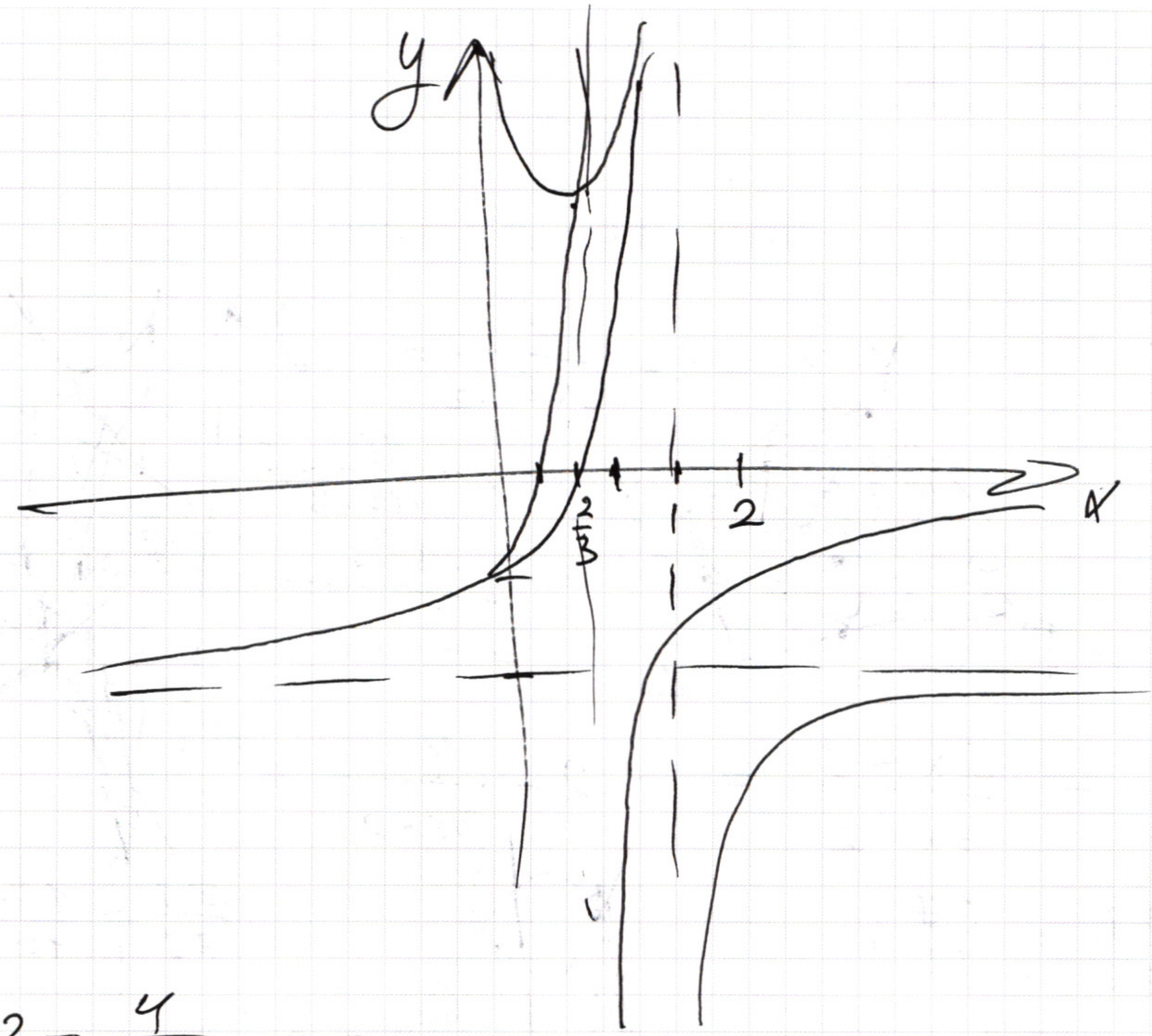
$2(R-r) = 2\cdot\frac{r}{24}$

$= \frac{r}{12}$

$\frac{13}{25} = \frac{2R-2r+r}{2R}$

$26R = 50R - 25r$

$25r = 24R$



$$-2 - \frac{4}{3x-2} = 2$$

$$3x - 2 = -1$$

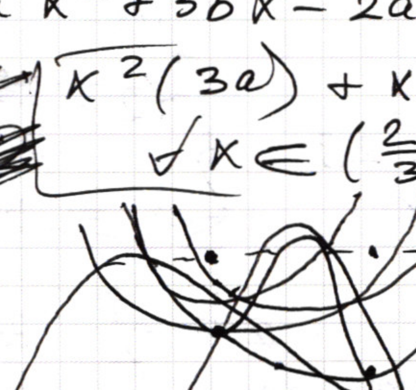
$$3x = 1 \quad ; \quad x = \frac{1}{3}$$

$$8 - 6x \geqslant (ax+b)(3x-2)$$

$$3ax^2 + 3bx - 2ax - 2b + 6x - 8 \leq 0$$

$$\boxed{x^2(3a) + x(3b - 2a + 6) - 2b - 8 \leq 0 \quad \forall x \in \left(\frac{2}{3}; 2\right]}$$

$x_{мак} \in \ldots$



$$-\frac{2a-3b-6}{2}$$

МФТИ

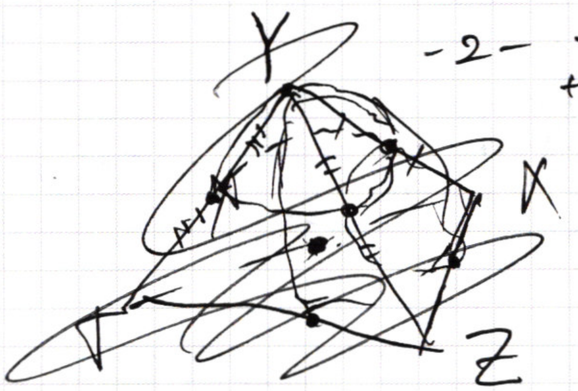
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

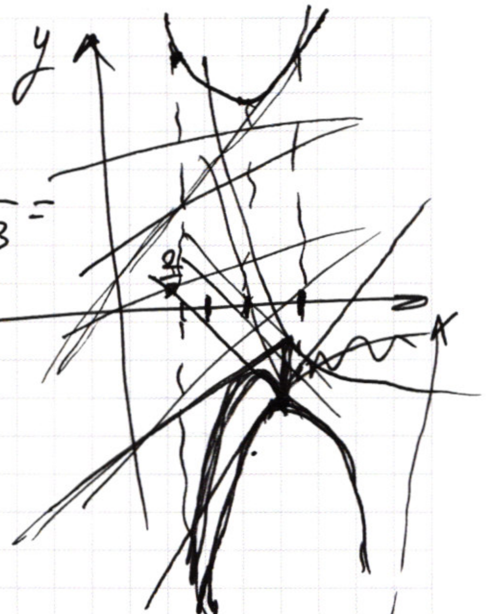


$$-2-\frac{4}{+\frac{17}{4}-2}=$$

$$=-2-\frac{16}{+17-8}=$$

$$=-2-\frac{16}{9}=$$

$$=-\ldots$$

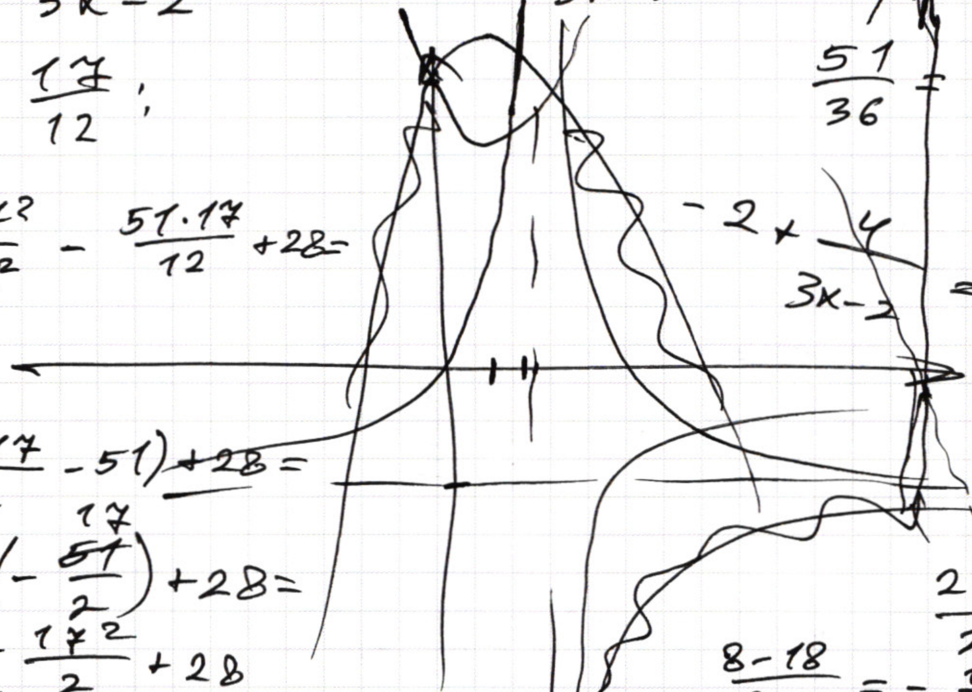


$$-\frac{6x-8}{3x-2}=-2-\frac{4}{3x-2}$$

$$\frac{51}{36}=\frac{17}{12};$$

$$\frac{51}{36}=\frac{17}{12}$$

$$18\cdot\frac{17^2}{12^2}-\frac{51\cdot17}{12}+28=$$



$$-2+\frac{4}{3x-2}=0;$$

$$\frac{2}{3x-2}=1$$

$$3x-2=2$$

$$3x=4$$

$$=\frac{17}{12}\left(\frac{3\cdot17}{2}-51\right)+28=$$

$$=\frac{17}{4}\cdot\left(-\frac{17}{2}\right)+28=$$

$$=-\frac{17^2}{2}+28$$

$$\frac{233}{2}=116{,}5$$

$$-2-\frac{4}{4}=-3$$

$$\frac{8-18}{9-2}=-\frac{10}{+7}=\frac{10}{7}=1\frac{3}{7}$$

$$18\cdot4-102+28$$

$$72+28=100$$

$$\begin{cases}-2-\frac{4}{3x-2}=ax+b\\ a=+4\cdot\frac{1}{(3x-2)^2}\end{cases}$$

$$-\frac{17^2}{2}+28=$$

$$-2-\frac{4}{t}=4a\cdot\frac{1}{t^2}+b$$

$$\times\frac{17}{17}\qquad\frac{17}{119}\qquad+170=289\qquad-\frac{289+56}{2}=-\quad-\frac{289}{\frac{56}{233}}$$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)