МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 4

ШИФР ______________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6}, \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$\left|x^2-26x\right|^{\log_5 12}+26x \geqslant x^2+13^{\log_5\left(26x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=12$, $BD=13$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $4\leqslant x\leqslant 28$, $4\leqslant y\leqslant 28$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{8-6x}{3x-2}\geqslant ax+b\geqslant 18x^2-51x+28$$

выполнено для всех x на промежутке $\left(\frac{2}{3};2\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $TXYZ$, вершина Y которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра TY. Известно, что $XY=\sqrt{3}$, $TX=\sqrt{2}$, $TZ=2$. Найдите длину ребра XZ. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{\sqrt{17}}{17} & (1) \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{17} & (2) \end{cases}$$

из (2) $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$

$2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = -\frac{2}{17}$ (с учётом (1))

$-\frac{2\sqrt{17}}{17} \cancel{\cos} \cos(2\beta) = -\frac{2}{17}$

$\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}$

Из основного тригонометрического тождества

$\sin^2 2\beta + \cos^2 2\beta = 1$

$\sin^2 2\beta + \frac{1}{17} = 1 \Rightarrow \sin^2 2\beta = \frac{16}{17} \Rightarrow \sin 2\beta = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}$

(1) $\sin(2\alpha)\cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta = -\frac{\sqrt{17}}{17}$

Пусть $\sin 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha)\cdot\frac{1}{\sqrt{17}} + \cos 2\alpha\cdot\frac{4}{\sqrt{17}} = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$2\sin\alpha\cos\alpha + 4\cos^2\alpha - 4\sin^2\alpha = -\cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

$5\cos^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha - 3\sin^2\alpha = 0$

$3\sin^2\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha - 5\cos^2\alpha = 0 \quad |:\cos^2\alpha$

$3tg^2\alpha - 2tg\alpha - 5 = 0$

$$\left[\begin{array}{l} tg\alpha = -1 \\ tg\alpha = \frac{5}{3} \end{array}\right. \quad (3)$$

Пусть $\sin 2\beta = \frac{-4}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt{17}} - \cos 2\alpha\cdot\frac{4}{\sqrt{17}} = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha - 4\cos 2\alpha = -1$

$2\sin\alpha\cos\alpha - 4(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = -\sin^2\alpha - \cos^2\alpha$

$5\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha - 3\cos^2\alpha = 0 \quad |:\cos^2\alpha$

$5tg^2\alpha + 2tg\alpha - 3 = 0$

$\left[\begin{array}{l} tg\alpha = -1 \\ tg\alpha = \frac{3}{5} \end{array}\right.$ (4)

Таким образом из (3) и (4) получаем, что $tg\alpha$ может быть равен $-1;\ \frac{3}{5};\ \frac{5}{3}$.

Ответ: $-1;\ \frac{3}{5};\ \frac{5}{3}$.

№2

$\begin{cases} y-6+6-6x = \sqrt{x(y-6)-(y-6)} \\ (3x-3)^2 + (y-6)^2 = 90 \end{cases}$ (*)

Заметим, что система (*) эквивалентна системе из условия

Пусть $a = x-1$ и $b = y-6$

$\begin{cases} b-6a = \sqrt{ab} \\ 9a^2+b^2=90 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2-12ab+36a^2=ab \\ b-6a \geq 0 \\ 9a^2+b^2=90 \end{cases}$

Решим сначала систему $\begin{cases} 36a^2-13ab+b^2=0 \\ 9a^2+b^2=90 \end{cases}$

$36a^2-13ab+b^2=0$

$D = 169b^2 - 144b^2 = (5b)^2 \geq 0$

$\left[\begin{array}{l} a = \frac{13b+5|b|}{72} \\ a = \frac{13b-5|b|}{72} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = \frac{18b}{72} \\ a = \frac{8b}{72} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} a = \frac{b}{4} \\ a = \frac{b}{9} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} b = 4a \\ b = 9a \end{array}\right.$

Пусть $b = 4a$

$9a^2 + 16a^2 = 90$

$25a^2 = 90 \Leftrightarrow 5a^2 = 18 \Leftrightarrow a = \pm\sqrt{\frac{18}{5}}$, тогда подходят пары $\left(\sqrt{\frac{18}{5}};\ 4\sqrt{\frac{18}{5}}\right)$ $\left(-\sqrt{\frac{18}{5}};\ -4\sqrt{\frac{18}{5}}\right)$

Пусть $b = 9a$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$9a^2+81a^2=90$

$a^2=1 \Leftrightarrow a=\pm 1$.

Тогда подходят пары $(1;9)$ $(-1;-9)$.

Теперь проверим ограничение

$b-6a\geq 0 \Leftrightarrow b\geq 6a$

$\left(\sqrt{\frac{18}{5}};4\sqrt{\frac{18}{5}}\right)$ $4\sqrt{\frac{18}{5}}\geq 6\sqrt{\frac{18}{5}}$ - неверно.

$\left(-\sqrt{\frac{18}{5}};-4\sqrt{\frac{18}{5}}\right)$ $-4\sqrt{\frac{18}{5}}\geq -6\sqrt{\frac{18}{5}}$ - верно

$(1;9)$ $9\geq 6$ - верно

$(-1;-9)$ $-9\geq -6$ - неверно.

Таким образом, подходят пары $\left(-\sqrt{\frac{18}{5}};-4\sqrt{\frac{18}{5}}\right)$ и $(1;9)$

Сделаем обратную замену

$x=a+1$ $y=b+6$

$\left(1-\sqrt{\frac{18}{5}};6-4\sqrt{\frac{18}{5}}\right)$; $(2;15)$

Ответ: $\left(1-\sqrt{\frac{18}{5}};6-4\sqrt{\frac{18}{5}}\right)$; ~~(2;√…)~~ $(2;15)$.

№3

$|x^2-26x|^{\log_5 12}\geq x^2-26x+13^{\log_5(26x-x^2)}$

ОДЗ: $26x-x^2>0 \Rightarrow |x^2-26x|=26x-x^2$

$26x-x^2=t>0$

$t^{\log_5 12}\geq 13^{\log_5(t)}-t$

$t^{\log_5 12}=\left(5^{\log_5 t}\right)^{\log_5 12}=\left(5^{\log_5 12}\right)^{\log_5 t}=12^{\log_5 t}$

$t=5^{\log_5 t}$

Пусть $\log_5 t=a$, тогда

$12^a\geq 13a-5^a$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

$12^a+5^a \ge 13^a \quad |:(12^a>0)$

$1+\left(\frac{5}{12}\right)^a \ge \left(\frac{13}{12}\right)^a \quad (*)$

заметим, что ф-ция $1+\left(\frac{5}{12}\right)^a$ – убывающая на $\mathbb{R}$, т.к. $\frac{5}{12}<1$.

Заметим, что ф-ция $\left(\frac{13}{12}\right)^a$ – возрастающая на $\mathbb{R}$, т.к. $\frac{13}{12}>1$.

Тогда отсюда нер-во (*) выполняется для $\forall a\in(-\infty;2]$

т.к. $1+\left(\frac{5}{12}\right)^2=\left(\frac{13}{12}\right)^2$ (очевидно, верно)

т.е. $a\le 2$

$\log_5 t \le \log_5 25 \quad (5>1)$

$t\le 25$

$26x-x^2\le 25$ и, с учётом ОДЗ,

$$\begin{cases} 26x-x^2\le 25 \\ 26x-x^2>0 \end{cases}$$

$26x-x^2-25\le 0$

$x^2-26x+25 \ge 0$

$(x-1)(x-25)\ge 0$

$x(26-x)>0$

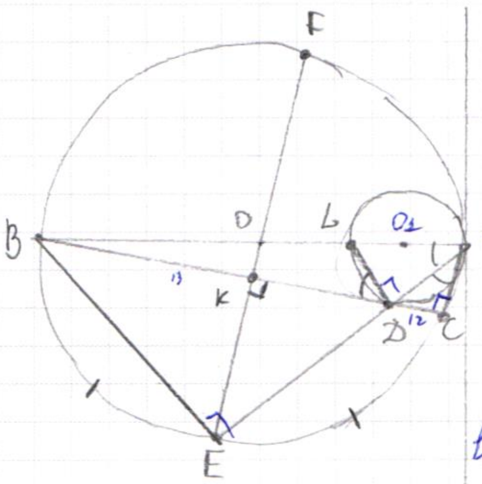
$x(x-26)<0$

$x\in(0;1]\cup[25;26)$

Ответ: $(0;1]\cup[25;26)$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 4



1) по лемме Архимеда E – середина ∪BC, значит △BEC равнобедренный, значит BK = ~~B~~KC и KE – сер. перпендикуляр к BC, значит O (центр Ω) ∈ EK, значит EF – диаметр. Таким образом, ∠FAE = 90°

2) ∠BAD = ∠DAC (опираются на равные дуги) => AD – бисс. △BAC => $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$. Угол ∠BCA = 90°, т.к. AB – диаметр. AB ⊥ ℓ (т.к. ℓ – касат.), значит $O_1 \in BA$ (O_1 – центр ω)

из т. Пифагора △ABC: $AC = \sqrt{AB^2 - BC^2}$

$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{\sqrt{AB^2 - BC^2}}$ R – радиус Ω

$\frac{13}{12} = \frac{AB}{\sqrt{AB^2 - BC^2}}$

$169AB^2 - 169BC^2 = 144AB^2$

$25AB^2 = 169BC^2 \Rightarrow AB = \frac{13BC}{5} = \frac{13 \cdot 25}{5} = 5 \cdot 13 = 65$

$R_\Omega = \frac{65}{2}$ $r = R_\omega$

$BL \cdot BA = BD^2$, т.к. по св-ву секущих и касательных

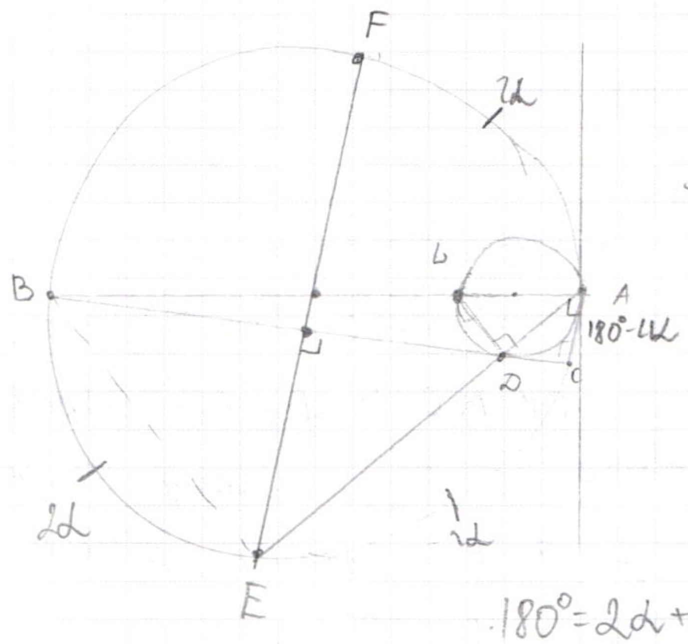
$(AB - 2r) \cdot AB = 169$

$(5 \cdot 13 - 2r) \cdot 5 \cdot 13 = 169$

$(5 \cdot 13 - 2r) \cdot 5 = 13 \Rightarrow r = \frac{156}{5}$

3) ∠AFE = ∠EBA; BA и EF – ~~радиусы~~ диаметры => △EFA = △BAE

∠BEA = 90° и ∠LDA = 90° – опираются на диаметры



$R\omega$

$R\ \Omega$

S_{AFF}

$CD=12$

$BD=13$

$180^\circ = 2\alpha + 2\alpha + \cup AC$

$180^\circ - 4\alpha = \cup AC$

$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{AB}{\sqrt{AB^2-BC^2}} = \frac{13}{12}$

$\frac{AB}{\sqrt{AB^2-25^2}} = \frac{13}{12}$

$\frac{AB^2}{AB^2-25^2} = \frac{169}{144}$

$144AB^2 = 169AB^2 - 169\cdot 25^2$

$169\cdot 25^2 = 25AB^2$

$169\cdot 25 = AB \Rightarrow AB = 13\cdot$

$\frac{AD}{DL} = \frac{AB}{BD}$

$(2R-2r)\cdot 2R = 169$

$4R^2 - 4Rr = 169$

$4\cdot 13^2\cdot 5^2 - 4\cdot 13\cdot 5r = 169$

$4\cdot 13\cdot 5^2 - 4\cdot 5r = 13$

$AB = 13\cdot 5 = 65$

$1300 - 13 = 20r$

$-3b-6+2a \le 12a$

$-3b-6 \le 10a$

$-3b-6+2a \ge \frac{2}{3}\cdot 6a$

$-3b-6+2a \ge 4a$

$-3b-6-4a \ge 0$

$\left[\begin{array}{l} 3b+6+4a \le 0 \\ 3b+6+10a \ge 0 \end{array}\right.$

$f(1)=0$

$f(\frac{1}{a}\cdot a) = f(\frac{1}{a}) + f(a)$

$f(\frac{1}{a}) = -f(a)$

$f(p^\alpha\cdot q^\alpha)$

$f\left(\frac{p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot p_n^{\alpha_n}}{q_1^{\beta_1}\cdot\ldots\cdot q_k^{\beta_k}}\right) = f(p_1^{\alpha_1}) + f(p_2^{\alpha_2}) + \ldots$

$\alpha_1 f(p_1) + \alpha_2 f(p_2)$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$f(4) = 2f(2) = 2 \cdot \lfloor \frac{2}{4} \rfloor = 0$ ✓
$f(5) = 1$ ✓
$f(6) = f(3) + f(2) = 0$ ✓
$f(7) = 1$ ✓
$f(8) = 3 \cdot f(2) = 0$ ✓
$f(9) = 2 \cdot f(3) = 0$
$f(10) = f(2) + f(5) = 1$ ✓
$f(11) = 2$ ✓
$f(12) = 2 \cdot f(2) + f(3) = 0$ ✓
$f(13) = 3$ ✓
$f(14) = f(2) + f(7) = 1$ ✓
$f(15) = f(3) + f(5) = 1$ ✓
$f(16) = 0$ ✓
$f(17) = 4$ ✓
$f(18) = f(2) + 2 \cdot f(3) = 0$ ✓
$f(19) = 4$ ✓
$f(20) = f(2) \cdot 2 + f(5) = 1$ ✓
$f(21) = f(3) + f(7) = 1$ ✓
$f(22) = f(2) + f(11) = 2$ ✓
$f(23) = 5$ ✓
$f(24) = 3 \cdot f(2) + f(3) = 0$ 0
$f(25) = 2 \cdot f(5) = 2$ 2
$f(26) = f(2) + f(13) = 3$ 3
$f(27) = 3f(3) = 0$ 0
$f(28) = 2 \cdot f(2) + f(7) = 1$ 1

0	1	2	3	4	5
9	8	3	2	2	1

$9 \cdot 16 + 8 \cdot 8 + 3 \cdot 5 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 1$

$$\frac{8-6x}{3x-2} - (ax+b) \geq 0$$

$$\frac{8-6x-(3x-2)(ax+b)}{3x-2} \geq 0$$

$8 - 6x - (3ax^2 + 3bx - 2ax - 2b) \geq 0$

$8 - \cancel{6x} - \cancel{3a}x^2 - \cancel{3bx} + \cancel{2ax} + 2b \geq 0$

$x^2(-3a) + x(-3b - 6 + 2a) + 2b + 8 \geq 0 \quad | \cdot (-1)$

$3ax^2 + x(3b + 6 - 2a) - 2b - 8 \leq 0$

Если $3a > 0$, то днетпо, чтобы

$f(\frac{2}{3}) \leq 0$ и $f(2) \leq 0$

$3a = 0 \quad 3b + 6 - 2a \neq 0 \quad f(\frac{2}{3}) \leq 0$ и $f(2) \leq 0$

$3b + 6 - 2a = 0$ и $3a = 0 \quad -2b - 8 \leq 0$

$3a -$

$$\begin{array}{r} 16 \\ \times\ 9 \\ \hline 144 \\ +\ 64 \\ \hline 208 \\ +\ 15 \\ \hline 223 \\ +\ 6 \\ \hline 229 \\ +\ 2 \\ \hline 231 \end{array}$$

$51 : 3 = 17$

$a = 0$

$3b = -6$

$b = -2$; $a = 0$

$18x^2 - (51 + a)x + 28 - b \leq 0$

~~$18x^2 - 55x$~~

$18x^2 - 51x + 30 \leq 0$

$f(\frac{2}{3})$

$18 \cdot \frac{2^2}{9} - \frac{51 \cdot 2}{3} + 30 \leq 0$

$2^3 - 17 \cdot 2 + 30 \leq 0$

$38 - 34 \leq 0$?

$51 : 3 = 17$

$$\begin{array}{r} 18 \\ \times\ 4 \\ \hline 72 \end{array}$$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Значит $BE \parallel LD \Rightarrow \triangle ABE \sim \triangle ALD$ по двум углам

$\triangle BLD$ и $\triangle BAD$ подобны по 2-м углам

$\frac{LD}{AD} = \frac{BD}{BA} = \frac{13}{65} = \frac{1}{5} = tg\angle LAD = tg\angle BAE = ctg\angle AFE = ctg\angle EBA$

$\angle AFE = arcctg\frac{1}{5}$

$tg\angle LAD = \frac{1}{5}$ $\quad \angle LAD = arctg\frac{1}{5}$

$AD = AL\cdot\cos\angle LAD = \frac{312}{5}\cdot\cos(arctg\frac{1}{5})$

$LD = AL\cdot\sin\angle LAD = \frac{312}{5}\cdot\sin(arctg\frac{1}{5})$

$AL = 2r = \frac{312}{5}$

$S_{LDA} = \frac{1}{2}LD\cdot DA = \left(\frac{312}{5}\right)^2\cdot\cos(arctg\frac{1}{5})\sin(arctg\frac{1}{5})\cdot\frac{1}{2}$

$\frac{S_{LDA}}{S_{BAE}} = \frac{S_{LDA}}{S_{AEF}} = \frac{AL^2}{AB^2}$

$S_{AEF} = \frac{AB^2\cdot S_{LDA}}{AL^2} = AB^2\cdot\frac{1}{2}\cos(arctg\frac{1}{5})\sin(arctg\frac{1}{5}) =$

$= \frac{65^2}{2}\cos(arctg\frac{1}{5})\sin(arctg\frac{1}{5})$

Ответ: $R_\Omega = \frac{65}{2}$; $R_\omega = \frac{156}{5}$; $\angle AFE = arcctg\frac{1}{5}$; $\frac{65^2}{2}\cdot\cos(arctg\frac{1}{5})\cdot\sin(arctg\frac{1}{5})$.

№5

Пусть $a=a$ $\quad b=\frac{1}{a}$, тогда $f(1)=f(a)+f(\frac{1}{a})$

Пусть $a=1$ $\quad b=1$, тогда $f(1)=2f(1) \Rightarrow f(1)=0$

$f(a) = -f(\frac{1}{a})$ (**) значит из $f(ab)=f(a)+f(b)$ и (**), получим

$f\left(\frac{p_1^{\alpha_1}\ldots p_n^{\alpha_n}}{q_1^{\beta_1}\ldots q_k^{\beta_k}}\right) = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\cdot f(p_i) - \sum_{i=1}^{k}\beta_i f(q_i)$ т.к. $f\left(\frac{p_1^{\alpha_1}\ldots p_n^{\alpha_n}}{q_1^{\beta_1}\ldots q_k^{\beta_k}}\right) = f(p_1^{\alpha_1}\ldots p_n^{\alpha_n}) - f(q_1^{\beta_1}\ldots q_k^{\beta_k})$

$f(\frac{x}{y}) = f(x)-f(y)$ (1) Вычислим $f(x)$ для $4\le x\le 28$

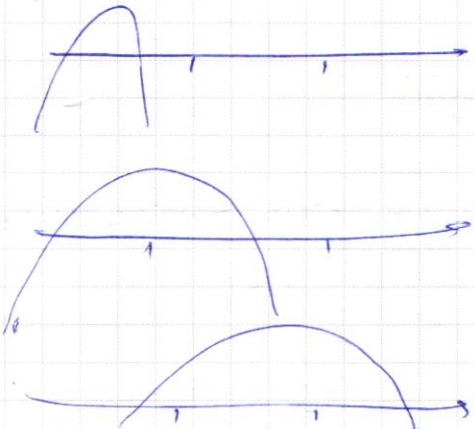
$f(4)=0$	$f(9)=0$	$f(14)=1$	$f(19)=4$	$f(24)=0$
$f(5)=1$	$f(10)=1$	$f(15)=1$	$f(20)=1$	$f(25)=2$
$f(6)=0$	$f(11)=2$	$f(16)=0$	$f(21)=1$	$f(26)=3$
$f(7)=1$	$f(12)=0$	$f(17)=4$	$f(22)=2$	$f(27)=0$
$f(8)=0$	$f(13)=3$	$f(18)=0$	$f(23)=5$	$f(28)=1$

$3a<0$

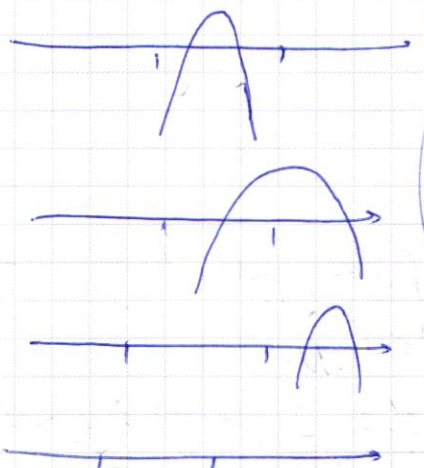
$8-6x-(ax+b)(3x-2)\geq 0$

$8-6x-3ax^2+2ax-3bx+2b\geq 0$

$-3ax^2+x(-6-3b+2a)+2b+8\geq 0$



Или $D\leq 0$



$\left[\begin{array}{l} 3a<0 \\ \left[\begin{array}{l} D\leq 0 \\ \begin{cases} f\left(\frac{2}{3}\right)\leq 0 \\ f(2)\leq 0 \\ \left[\begin{array}{l} x_{верш}\geq 2 \\ x_{верш}\leq \frac{2}{3} \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right. \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 3a\geq 0 \\ f\left(\frac{2}{3}\right)\leq 0 \\ f(2)\leq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 3a<0 \\ \left[\begin{array}{l} D\leq 0 \\ \begin{cases} f\left(\frac{2}{3}\right)\leq 0 \\ f(2)\leq 0 \\ \left[\begin{array}{l} \frac{-3b+6+2a}{6a}\geq 2 \\ \frac{-3b-6+2a}{6a}\leq \frac{2}{3} \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right.$

$a\geq 0$

$3a\cdot\frac{4}{9}+\frac{2}{3}(3b+6-2a)-2b-8<0$

$\frac{4a}{3}+\frac{2(3b+6-2a)}{3}-2b-8\leq 0 \quad |\cdot 3$

$\cancel{4a}+\cancel{6b}+12-\cancel{4a}-\cancel{6b}-24\leq 0$

$3a\cdot 4+2\cdot(3b+6-2a)-2b-8$

$12a+6b+12-4a-2b-8\leq 0$

$\cancel{10}8a+4b+4\leq 0$ $\quad \begin{array}{r} 96 \\ -24 \\ \hline 72 \end{array}$

$\cancel{6a+2b+2\leq 0}$

$2a+b+1\leq 0$

$(3b+6-2a)^2+4\cdot 3a\cdot(2b+8)\leq 0$

$\cancel{9b^2+36+4a^2}+\cancel{4\cdot 36b}-\cancel{12ab}-24a+96a+\cancel{24b}\leq 0$

$9b^2-12b+36+4a^2-12ab+72a\leq 0 \quad -3b+2a+6$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Из соотношения $f(\frac{x}{y}) = f(x) - f(y)$ и того, что мы хотим найти число пар $(x;y)$ | $f(\frac{x}{y}) < 0$, т.е. $f(x) < f(y)$

Всего $4 \le x \le 28$ | $f(x) = 0$ ровно 9

Всего $4 \le x \le 28$ | $f(x) = 1$ ровно 8

Всего $4 \le x \le 28$ | $f(x) = 2$ ровно 3

Всего $4 \le x \le 28$ | $f(x) = 3$ ровно 2

Всего $4 \le x \le 28$ | $f(x) = 4$ ровно 2

Всего $4 \le x \le 28$ | $f(x) = 5$ ровно 1.

Таким образом, ради того, чтобы выбрать пару $(x;y)$ | $f(\frac{x}{y}) < 0$ нужно выбрать такое x и y, что $f(x) < f(y)$.

Число способов выбрать x | $f(x) = 0$, ровно 9, а y | $f(y) > f(x)$ ровно $(8+3+2+2+1)$, значит, число способов выбрать $(x;y)$ | $f(\frac{x}{y}) < 0$ и $f(x) = 0$ ровно $9 \cdot (8+3+2+2+1) = 9 \cdot 16$

Аналогичными рассуждениями получаем число способов выбрать $(x;y)$ | $f(\frac{x}{y}) < 0$ $f(x) = a$ для $a = 1..5$.

По правилу суммы, число способов выбрать ~~A~~ $(x;y)$ | $f(\frac{x}{y}) < 0$ ровно $9 \cdot 16 + 8 \cdot 8 + 3 \cdot 5 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 1 = 231$

Ответ: 231

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} 3a \geq 0 \\ 2a + b + 1 \leq 0 \end{cases}$$

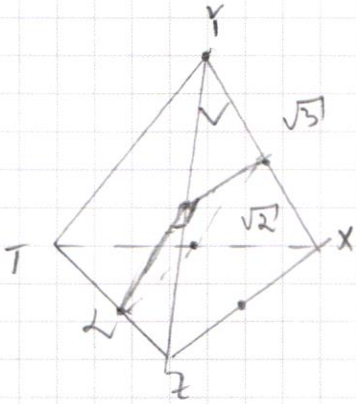
$a < 0$

$34 - 8 = 26$

$51 - 36 = 15$

$51 : 3 = 17$

$14 \times 3 = 52$



~~$2^2 \cdot 18 - 51$~~

$18 \cdot 2^2 - 2 \cdot (51 + a) + 28b \leq 0$

$18 \cdot 2 - 51 - a + 14b \leq 0$

$-15 - a + 14b \leq 0$

$$\begin{cases} a + 15 - 14b \geq 0 \\ a + 39 - 52b \geq 0 \end{cases}$$

$9 - 12 + 36 + 4 - 12 - 72$

$18x^2 - x(51 + a) + 28 - b \leq 0$

$18 \cdot \frac{2^2}{3^2} - \frac{2}{3}(51 + a) + 28 \cdot b \leq 0$

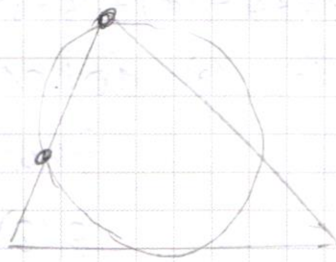
$8 - 34 - \frac{2}{3}a + 28b \leq 0$

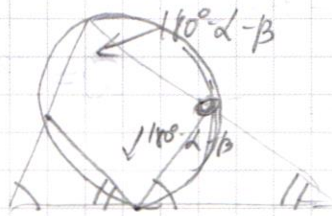
$-26 - \frac{2}{3}a + 28b \leq 0$

$-78 - 2a + 3 \cdot 28b \leq 0$

$-39 - a + 52b \leq 0$

$52b - 39 - a \leq 0$





~~$180°$~~$-\alpha-\beta$ + ~~$180°$~~$-\alpha-\beta =$ ~~$180°$~~

$2\alpha + 2\beta = 180°$

$\alpha + \beta = 90°$

$5 \cdot 65 = 325$

$325 - 13 = 312$

312

№6

Рассмотрим такое нер-во

$ax+b \geq 18x^2-51x+28$

$f(x)=18x^2-x(51+a)+28-b\leq 0$ (*)

Т.к. ~~коэф.~~ $18>1$, то ветви параболы $f(x)$ направлены вверх, выполнение нер-ва (*) для $\forall x\in(\frac{2}{3};2] \Leftrightarrow \begin{cases} f(\frac{2}{3})\leq 0 \\ f(2)\leq 0\end{cases}$ (1)

$8-\frac{2}{3}(51+a)+28-b\leq 0$

$8-34-\frac{2}{3}a+28-b\leq 0$

$2-\frac{2}{3}a-b\leq 0$

$6-2a-3b\leq 0$ (**)

$72-102-2a+28-b\leq 0$

$-2-2a-b\leq 0$ (***)

Значит (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} 6-2a-3b\leq 0 \\ -2-2a-b\leq 0\end{cases}$

Заметим, что $3x-2>0$ $\forall x\in(\frac{2}{3};2]$ (2)

$\frac{8-6x}{3x-2}\geq ax+b$ $\overset{(\text{у. }(2))}{\Leftrightarrow}$

$8-6x-(3x-2)(ax+b)\geq 0$

$g(x)=3ax^2+x(3b+6-2a)-2b-8\leq 0$ (3)

То, что нер-во (3) выполняется при $\forall x\in(\frac{2}{3};2] \Leftrightarrow$

Заметим, что $g(\frac{2}{3})=-12\leq 0$

$g(2)=2a+b+1\leq 0$

$D=(3b+6-2a)^2+4\cdot(2b+8)\cdot 3a$

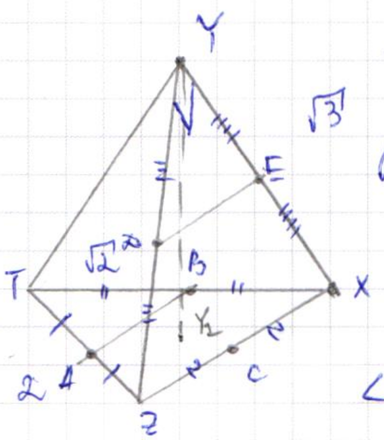
$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a\geq 0 \\ g(\frac{2}{3})\leq 0 \\ g(2)\leq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a<0 \\ \left[\begin{array}{l} D\leq 0 \\ \begin{cases} g(\frac{2}{3})\leq 0 \\ g(2)\leq 0 \\ \left[\begin{array}{l} \frac{-3b-6+2a}{6a}\geq 2 \\ \frac{-3b-6+2a}{6a}\leq \frac{2}{3} \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a\geq 0 \\ 2a+b+1\leq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a<0 \\ \left[\begin{array}{l} D\leq 0 \\ \begin{cases} 2a+b+1\leq 0 \\ \left[\begin{array}{l} 3b+6+4a\leq 0 \\ 3b+6+10a\geq 0 \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right.$$

, соответственно данное неравенство из условия равносильно

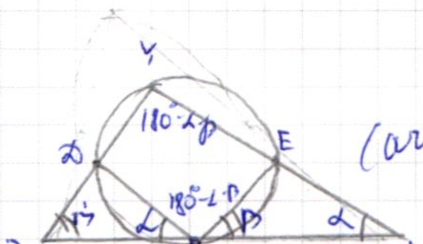
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 6-2a-3b\le 0 \\ -2-2a-b\le 0 \end{cases} \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a\ge 0 \\ 2a+b+1\le 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a<0 \\ \left[\begin{array}{l} (3b+6-2a)^2+4\cdot(2b+8)\cdot 3a\le 0 \\ \begin{cases} 2a+b+1\le 0 \\ \left[\begin{array}{l} 3b+6+4a\le 0 \\ 3b+6+10a\ge 0 \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right. \end{array}\right.$$

№7



Точки $Y; A; B; C; D; E \in$ одной сфере.
рассмотрим сечение этой сферы $(D;E;C)$
$DC; EC$ − ср. линии $\Delta XYZ \Rightarrow$
$DC \parallel XY$ и $EC \parallel YZ \Rightarrow \angle DCZ = \angle YXZ = \alpha$
$\angle ECX = \angle YZX = \beta$
$\angle Y = 180° - \alpha - \beta$



$\angle DCE = 180° - \alpha - \beta$; Точки $Y, D, E, C \in$ одной окр. (сечение сферы)

$180° - \alpha - \beta + 180° - \alpha - \beta = 180° \Rightarrow \alpha + \beta = 90° \Rightarrow \angle Y = 90°$

Рассмотрим сечение сферы плоскостью (DEB). Очевидно $DE = AB$, $DE \parallel AB$, т.к. они ср. лин ΔXYZ и ΔTXZ. $DEBA$ − параллелограмм, причем $D, E, A, B \in$ одной окр $\Rightarrow DEBA$ − прямоугольник $\Rightarrow DE \perp EB \Rightarrow TY \perp ZX$. Также $DB = AE$
перпендикуляр из Y на (TXZ) пересекает (TXZ) в Y_1.
т.к. $Y, A, B, C \in$ одной сфере, то Y_1 − центр окружности через точки A, B, C. (Y_1 − цен

$2\sin\alpha\cos\alpha - 4(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = -\sin^2\alpha - \cos^2\alpha$

$2\sin\alpha\cos\alpha - 4\cos^2\alpha + 4\sin^2\alpha = -\sin^2\alpha - \cos^2\alpha$

$5\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha - 3\cos^2\alpha = 0$

$5tg^2\alpha + 2tg\alpha - 3 = 0$

$\left[\begin{array}{l} tg\alpha = -1 \\ tg\alpha = \frac{3}{5} \end{array}\right.$

$9x^2 - 18x + 9 - 9 + y^2 - 12y + 36 - 36$

$9(x^2 - 2x + 1)$

$(3x-3)^2 + (y-6)^2 = 90$ $\qquad (x-1) = a$

$y - 6 + 6 - 6x = \sqrt{x(y-6) - (y+6)}$ $\qquad (y-6) = b$

$y - 6 \cancel{+x} - 6(x-1) = \sqrt{(x-1)(y-6)}$

$\begin{array}{r} 36 \\ \times\ 4 \\ \hline 144 \end{array}$

$\begin{cases} (3a)^2 + b^2 = 90 \\ b - 6a = \sqrt{ab} \end{cases}$

$b^2 - 12ab + 36a^2 = ab$

$36a^2 - 13ab + b^2 = 0$

$D = (13b)^2 - 4 \cdot 36 \cdot b^2 = 169b^2 - 144b^2 = 25b^2$

$a = \frac{13b \pm 5|b|}{72}$

$90 : 5 = 18$

$\left[\begin{array}{l} a = \frac{18b}{72} = \frac{b}{4} \\ a = \frac{8b}{72} = \frac{b}{9} \end{array}\right.$

$\left(\frac{3b}{4}\right)^2 + b^2 = 90$

$\frac{9}{16}b^2 + b^2 = 90$

$\frac{25}{16}b^2 = 90$

$\frac{5}{16}b^2 = 18$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{\sqrt{17}}{17}$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{17}$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=2\sin\left(\frac{2\alpha+2\alpha+4\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{2\alpha+4\beta-2\alpha}{2}\right)=-\frac{2}{17}$

$2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta=-\frac{2}{17}$

$2\cdot\left(-\frac{\sqrt{17}}{17}\right)\cos 2\beta=-\frac{2}{17}$

$-\frac{2\sqrt{17}}{17}\cos 2\beta=-\frac{2}{17}$

$\sqrt{17}\cos 2\beta=1 \quad \cos 2\beta=\frac{\sqrt{17}}{17} \Rightarrow \quad \cos 2\beta=\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha\cos 2\beta+\cos 2\alpha\sin 2\beta=-\frac{\sqrt{17}}{17}$

$\sin^2 2\beta=1-\cos^2 2\beta=1-\frac{1}{17}=\frac{16}{17} \Rightarrow \sin 2\beta=\pm\frac{4}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha\cos 2\beta+\cos 2\alpha\sin 2\beta=-\frac{\sqrt{17}}{17}=-\frac{1}{\sqrt{17}}$

1) $\sin 2\beta=\frac{4}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt{17}}+\cos 2\alpha\cdot\frac{4}{\sqrt{17}}=-\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha+4\cos 2\alpha=-1$

$2\sin\alpha\cos\alpha+4(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)=-(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)$

$2\sin\alpha\cos\alpha+4\cos^2\alpha-4\sin^2\alpha=-\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$

$5\cos^2\alpha-3\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha=0$

$3\sin^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha-5\cos^2\alpha=0 \quad |:\cos^2\alpha$

$3\operatorname{tg}^2\alpha-2\operatorname{tg}\alpha-5=0$

$\left[\begin{array}{l}\operatorname{tg}\alpha=-1\\ \operatorname{tg}\alpha=\frac{5}{3}\end{array}\right.$

2) $\sin 2\beta=-\frac{4}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt{17}}-\frac{4}{\sqrt{17}}\cos 2\alpha=-\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha-4\cos 2\alpha=-1$

$$\begin{cases} ab \geq 0 \\ b \geq 6a \end{cases}$$

$a=1 \quad b=9 \quad (-1;-9)$

$9 \geq 6 \qquad -9 \geq -6$ неверно

$4\cdot\sqrt{\frac{18}{5}} \geq 6\cdot\sqrt{\frac{18}{5}}$ - неверно $\qquad (1;9)$

$-4\sqrt{\frac{18}{5}} \geq -6\sqrt{\frac{18}{5}}$ - верно $\qquad (-\sqrt{\frac{18}{5}}; -4\sqrt{\frac{18}{5}})$

$$\begin{cases} x = a+1 \\ y = 6+b \end{cases}$$

$\cancel{x \in}\ (2;15)$

$(1-\sqrt{\frac{18}{5}}; 6-4\sqrt{\frac{18}{5}})$

$13 = 5^{\log_5 13} \qquad 26x - x^2 > 0$

$13^{\log_5(26x-x^2)} = 5^{\log_5 13\cdot\log_5(26x-x^2)} = (26x-x^2)^{\log_5 13}$

$t^{\log_5 12} \geq t^{\log_5 13} - t$

$t^{\log_5 12} = (5^{\log_5 t})^{\log_5 12} = 12^{\log_5 t}$

$12^a \geq 13^a$

$\log_5 t \qquad \log_5 \qquad t^{\log_5 5}$

$26x - x^2 > 0 \qquad t = 26x - x^2$

$t^{\log_5 12} \geq 13^{\log_5 t} - t$

$t^{\log_5 12} = (5^{\log_5 t})^{\log_5 12} = 12^{\log_5 t} = 12^a$

$t^{\log_5 5} = 5^{\log_5 t} \qquad \log_5 t = a$

$12^a \geq 13^a - 5^a$

$12^a + 5^a \geq 13^a \quad |:12^a$

$\left(\frac{5}{12}\right)^a + 1 \geq \left(\frac{13}{12}\right)^a$

$a = 2 \qquad \frac{25}{144}$

$a \leq 2$ все работает

$\log_5 t \leq 2 \qquad \log_5 t \leq \log_5 25$

$t \leq 25$

$26x - x^2 \geq 25$

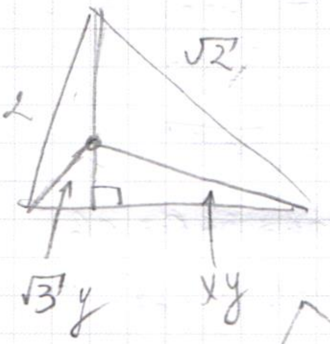
$25\cdot 13 - 10\cdot 2 = 13$

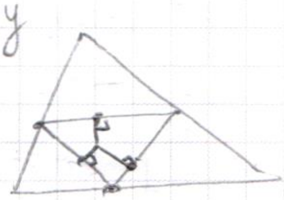
$25\cdot 13 - 13 = 10\cdot 2$

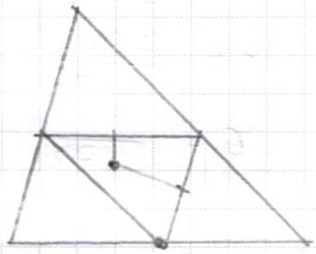
$24\cdot 13 = 10\cdot 2$

$12\cdot 13 = 5\cdot 2$

$\frac{156}{5} = 2$







$\times\ 13$
12
26
13
156

$\vec{AE} = \cancel{\vec{TY} + \vec{XZ}}$

$\vec{AE} = \frac{\vec{TY} + \vec{XZ}}{2}$

$4AE^2 = TY^2 + XZ^2$

$4AD^2 + DE^2$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$(y-6)+6-6x = \sqrt{x(y-6)-(y-6)}$

$(y-6)+6(1-x) = \sqrt{(x-1)(y-6)}$ $\quad a=x-1$

$\quad b=y-6$

$(y-6)-6(x-1) = \sqrt{(x-1)(y-6)}$

$b-6a=\sqrt{ab}$

$9x^2-18x+9-9+y^2-12y+36-36=45$

$(3x-3)^2+(y-6)^2=90$

$9a^2+b^2=90$

$b-6a=\sqrt{ab}$

$b^2-12ab+36a^2=ab$

$b^2-13ab+36a^2=0$

$36a^2-13ab+b^2=0$

$D=13^2b^2-4\cdot 36b^2=(5b)^2$

$\left[\begin{array}{l} a=\frac{13b+5b}{72} \\ a=\frac{13b-5b}{72}\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} a=\frac{18b}{72} \\ a=\frac{8b}{72}\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} a=\frac{b}{4} \\ a=\frac{b}{9}\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} 4a=b \\ 9a=b\end{array}\right.$

$(3a)^2+(9a)^2=90$

$9a^2+81a^2=90$

$a^2+9a^2=10$

$10a^2=10$ $\boxed{a=\pm 1 \qquad b=\pm 9}$

$9a^2+16a^2=90$

$25a^2=90$ $\quad a=\pm\sqrt{\frac{18}{5}} \qquad b=\pm\sqrt{\frac{18}{5}}\cdot 4$

$5a^2=18$ $\quad a=\frac{\pm 3\sqrt{10}}{5} \qquad b=\frac{\pm 12\sqrt{10}}{5}$