

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 8

ШИФР _____

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 13x + \sqrt[3]{169x^2 - y^2} = 92, \\ y + \sqrt[3]{169x^2 - y^2} = -124. \end{cases}$$

2. [4 балла] Решите неравенство

$$\sqrt{\log_{3x^2} x^9} \leq \log_{9x^3} \frac{1}{x^3}.$$

3. [5 баллов] Найдите количество семизначных чисел, обладающих следующим свойством: сумма остатков от деления числа на некоторые три последовательные степени числа десять равна 12828.

4. [5 баллов] Даны равнобокая трапеция $ABCD$ (AD и BC – основания, $AD > BC$) и окружность ω с центром C , касающаяся стороны AD . Касательные к ω , проведённые из точки B , пересекают прямую AD в точках P и Q (точка P лежит между Q и D). На продолжении стороны CB за точку B выбрана точка N так, что $\angle CPN$ – прямой. Найдите углы ADC , NQC и площадь четырёхугольника $NCDQ$, если известно, что $\angle NCP = \arctg \frac{15}{8}$, $AP = 17$, $NC = 34$.

5. [5 баллов] Дана система уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{3} \cos(x - y) = 7 \cos\left(\frac{2\pi}{3} + y\right), \\ \cos(2x - y) + \sqrt{3} \sin(2x - y) = 12 \sin\left(y + \frac{\pi}{6}\right). \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y$, если известно, что оно определено и что этих значений не меньше двух.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x + 26}{2x + 3} \leq ax + b \leq 1 + \sqrt{-\frac{33}{4} - 13x - x^2}$$

выполнено для всех x на промежутке $[-\frac{19}{2}; -\frac{3}{2}]$.

7. [6 баллов] Дан параллелепипед $KLMNK_1L_1M_1N_1$, грани KLL_1K_1 и $K_1L_1M_1N_1$ которого являются прямоугольниками. Сфера S касается прямых MM_1 и M_1N_1 , плоскости $K_1L_1M_1$, а также плоскости KLL_1 в точке K . Эта сфера повторно пересекает отрезок KM_1 в точке A . Найдите $\angle KK_1N_1$ и объём параллелепипеда $KLMNK_1L_1M_1N_1$, если известно, что $AK = 3$, $AM_1 = 1$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4

Проведем высоту CX и CH

$$\angle PNC = 2 \Rightarrow$$

$$\angle NCP = 90 - 2 \Rightarrow$$

$$\angle PCN = 2$$

CX - высота к основанию \Rightarrow

N - точка касания CX с окружностью, CP - диаметр \Rightarrow

$$\triangle CNP = \triangle CXP \Rightarrow \angle CNP = \angle CXP = 2 \Rightarrow \angle XPC = 90 - 2 \Rightarrow$$

$$\angle NPB = 2 \Rightarrow \triangle NBD - \text{равнобедренный} \Rightarrow NB = BD = 17$$

$$NB = BC \Rightarrow \text{если } NB = 17 \Rightarrow BC = 17$$

$$\sin \angle C = \frac{15}{8} \Rightarrow \frac{NP}{PC} = \frac{15}{8} \Rightarrow \frac{NC}{PC} = \frac{\sqrt{15^2 + 8^2}}{8} = \frac{17}{8}$$

$$NC = 34 \Rightarrow CP = 16$$

$$AB = 17, BC = 17, BC \parallel AP \Rightarrow \triangle BCP - \text{равнобедренный} \Rightarrow AB = CP = 16$$

$$\triangle PCD - \text{равнобедренный} \Rightarrow \angle ADC = \angle NCD = \arctg \frac{15}{8}$$

$$\frac{PC}{CH} = \frac{NC}{NP} = \frac{17}{15} \Rightarrow CH = \frac{16 \cdot 15}{17} = CX$$

$$BP = BX + PX = \sqrt{17^2 - \left(\frac{16 \cdot 15}{17}\right)^2} + \sqrt{16^2 - \left(\frac{16 \cdot 15}{17}\right)^2} = \frac{7 \cdot 23}{17} + \frac{16 \cdot 8}{17} = \frac{288}{17} = 17$$

$$AP = 2 \cdot \sqrt{\frac{288 \cdot 17}{288} - \frac{16 \cdot 15}{17}} = \frac{2 \cdot 16 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 23}{17} \Rightarrow \alpha = \frac{2 \cdot 7 \cdot 23 - 288}{17}$$

$$S_{\triangle NCD} = \frac{\alpha \cdot D + NC}{2} \cdot CH = \frac{16 \cdot 17 \cdot \alpha + 17 \cdot 16}{17 \cdot 2} = 240$$

$$\frac{(8 \cdot 16 \cdot 2)}{17} + \frac{2 \cdot 7 \cdot 23}{17} + 17 \cdot 2 = \frac{15 \cdot 16}{17} = 130$$

$\angle NQP = 2$
 $NQ = 30 \cdot 8$
 $QY = \left| \frac{2 \cdot 7 \cdot 23}{17} - \frac{20 \cdot 15}{17} \right| = \frac{128}{17}$
 $\angle NQA = \left| \arctg \frac{30 \cdot 8}{128} - 180 \right| = 180 - \arctg \frac{15}{4}$

$$N1 \begin{cases} 13x + \sqrt[3]{163x^2 - y^2} = 92 | + \\ y + \sqrt[3]{163x^2 - y^2} = -124 | - \end{cases} \Rightarrow 13x - y = 216 \Rightarrow 13x + y = t$$

$$\begin{cases} 13x + \sqrt[3]{216t} = 92 \\ y + \sqrt[3]{216t} = -124 \end{cases} \Rightarrow t + 12\sqrt[3]{t} = -32$$

$$f(x) = x + 12\sqrt[3]{x} \text{ — монотонно } \uparrow$$

если есть решение — оно одно —

$$t = -8 \text{ — корень}$$

$$\begin{cases} 13x + y = -8 \\ 13x - y = 216 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 13x + y = -8 \\ 26x = 208 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 13x + y = -8 \\ x = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 8 \\ y = -112 \end{cases} \quad \square$$

N3

натуральное число $\overline{abcdefg}$, $a \neq 0$

Записаны натуральные числа 10 или более раз, если среди них есть 10^7 , но

будет использовано в сумме $9 \cdot 100000 > 12828 \rightarrow$

Тогда же мы не можем иметь 10^2 и более раз, так как

сумма будет $100000 \cdot 9999 + 9999 + 999 < 12828 \rightarrow$

и нас есть 2 числа

и нас есть 2 числа

$$10^6 \quad 10^5 \quad 10^4$$

Заметим, что

$$b \leq 0, c \leq 0, \text{ и т.д.}$$

$$\text{число } \overline{abcdefg} + \frac{\overline{bcdefg}}{10} + \frac{\overline{cdefg}}{100} > 12828 \Rightarrow$$

$$3 \cdot \overline{defg} = 12828 \Rightarrow$$

$$\overline{defg} = 4276 \text{ — не число}$$

два

числа \Rightarrow

натуральное

$$\Rightarrow \overline{defg} \text{ число } 90190 + 9 = 12828 \quad \square$$

$$10^9 \quad 10^4 \quad 10^3$$

тогда заметим ≤ 1 число

$$\overline{cdefg} + \frac{\overline{defg}}{10} + \frac{\overline{efg}}{100} > 12828$$

$$c = 1$$

$$d \leq 1$$

$$\text{число } \Sigma > 12828$$

$$d = 1 \Rightarrow$$

$$3 \cdot \overline{efg} = 828$$

$$\overline{efg} = 276$$

а, б — любые

$$d = 0$$

$$3 \cdot \overline{efg} = 2829$$

$$\overline{efg} = 943$$

невозможно

$$c = 0$$

$$\Rightarrow d = 6, 5$$

число

$$\Sigma \text{ не больше}$$

$$d = 6 \Rightarrow \overline{efg} = 276$$

$$90190 + 9 = 12828$$

число

02

$$\sqrt{\log_{3x^2} x^3} \leq \log_{3x^3} \frac{1}{x^3}$$

$$\sqrt[5]{\log_{3x^2} x} \leq \log_{3x^3} x^{-3}$$

$$3\sqrt{\log_{3x^2} x} \leq 3 \log_{3x^3} x$$

$$\begin{cases} \sqrt{\log_{3x^2} x} \leq -\log_{3x^3} x \\ \log_{3x^2} x \geq 0 \\ \log_{3x^3} x \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x &> 1 \\ \Rightarrow \\ \log_{3x^3} x &> 0 \\ \Rightarrow \\ \text{нравится} \end{aligned}$$

||
 $x=1$ - все верно $0 \leq 0$

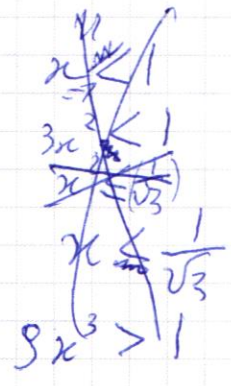
$$\begin{aligned} || \\ x < 1 \Rightarrow \begin{cases} 3x^2 < 1 \\ 9x^3 > 1 \end{cases} & \begin{cases} x < \frac{1}{\sqrt{3}} \\ x > \frac{1}{\sqrt[3]{9}} \\ \log_{3x^2} x \leq \log_{3x^3} x \end{cases} \end{aligned}$$

023

~~$$x \neq 1$$~~
~~$$x \neq \frac{1}{\sqrt{3}}$$~~

$$x > 0$$

~~$$x \neq \sqrt[5]{\frac{1}{9}}$$~~



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\sqrt{\log_{3x^2} x^9} \leq \log_{9x^3} \frac{1}{x^3}$$

$$\log_{3x^2} x^9 \leq \log_{9x^3}^2 \frac{1}{x^3}$$

$$\log_{3x^2} x \leq \log_{9x^3}^2 x^{-3}$$

$$2 \log_{3x^2} x \leq -\log_{9x^3}^2 x$$

$$\log_{3x^2} x + \log_{9x^3} x \leq 0$$

$$\sqrt{\log_{3x} x^9} \leq \log_{9x^3} \frac{1}{x^3} \quad x > 0$$

$$3 \sqrt{\log_{3x^2} x} \leq -2 \log_{9x^3} x$$

$$\sqrt{\log_{3x^2} x} \leq -\log_{9x^3} x$$

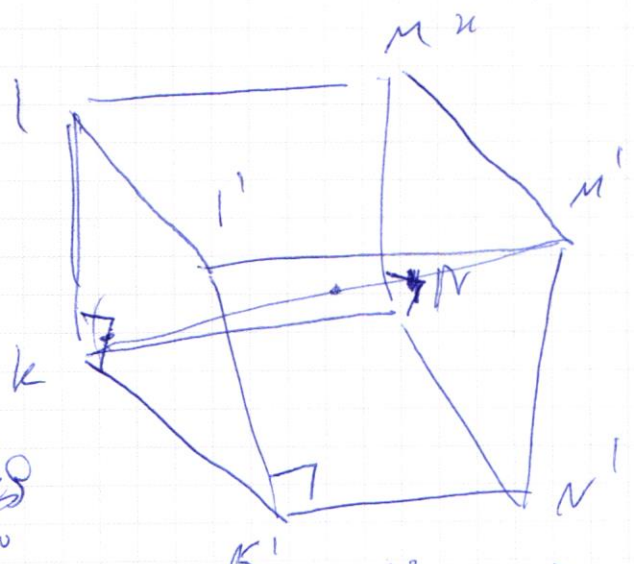
$$x < \frac{1}{3}$$

$$x \geq 1 \quad x \leq 1$$

$$x = 1$$

$x_1 > 1$

$$9x^3 = 1$$



$$\frac{16}{15} = 240$$

$$279^2 - 240$$

$$48^2 \cdot 229$$

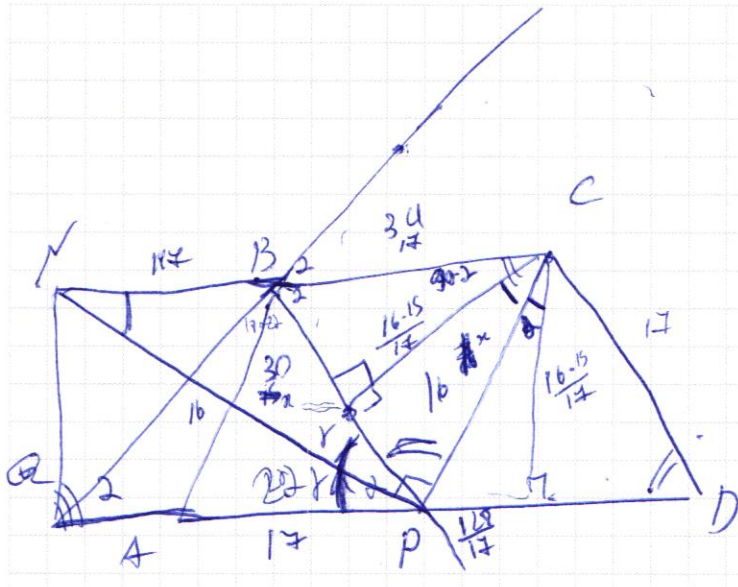
$$\frac{16}{8} \times \frac{128}{289}$$

$$\frac{23}{7} = 161$$

$$450 - 23 = 322$$

$$\frac{450}{322} = \frac{128}{33}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



225
 $\frac{64}{289}$

$289 \mid 17$
 $\frac{17}{118}$

$17 \times 7 = 119$

$289 - \frac{240^2}{289}$
 $\frac{289^2 - 240^2}{289}$
 $49^2 (529)$
 $\frac{7 \cdot \sqrt{529}}{17}$

$13 \cdot 7$

$17:15:8$

$8 \cdot 16$
 $\frac{128}{17}$

$128 \mid 17$

$17 \times 7 = 119$

$8 \cdot 16 = 128$

$16 \mid 17$

$529 \mid 17$
 $\frac{51}{48}$

$23 \times 23 = 529$

$13 \cdot 7$

$17:15:8$

$8 \cdot 16$
 $\frac{128}{17}$

$128 \mid 17$

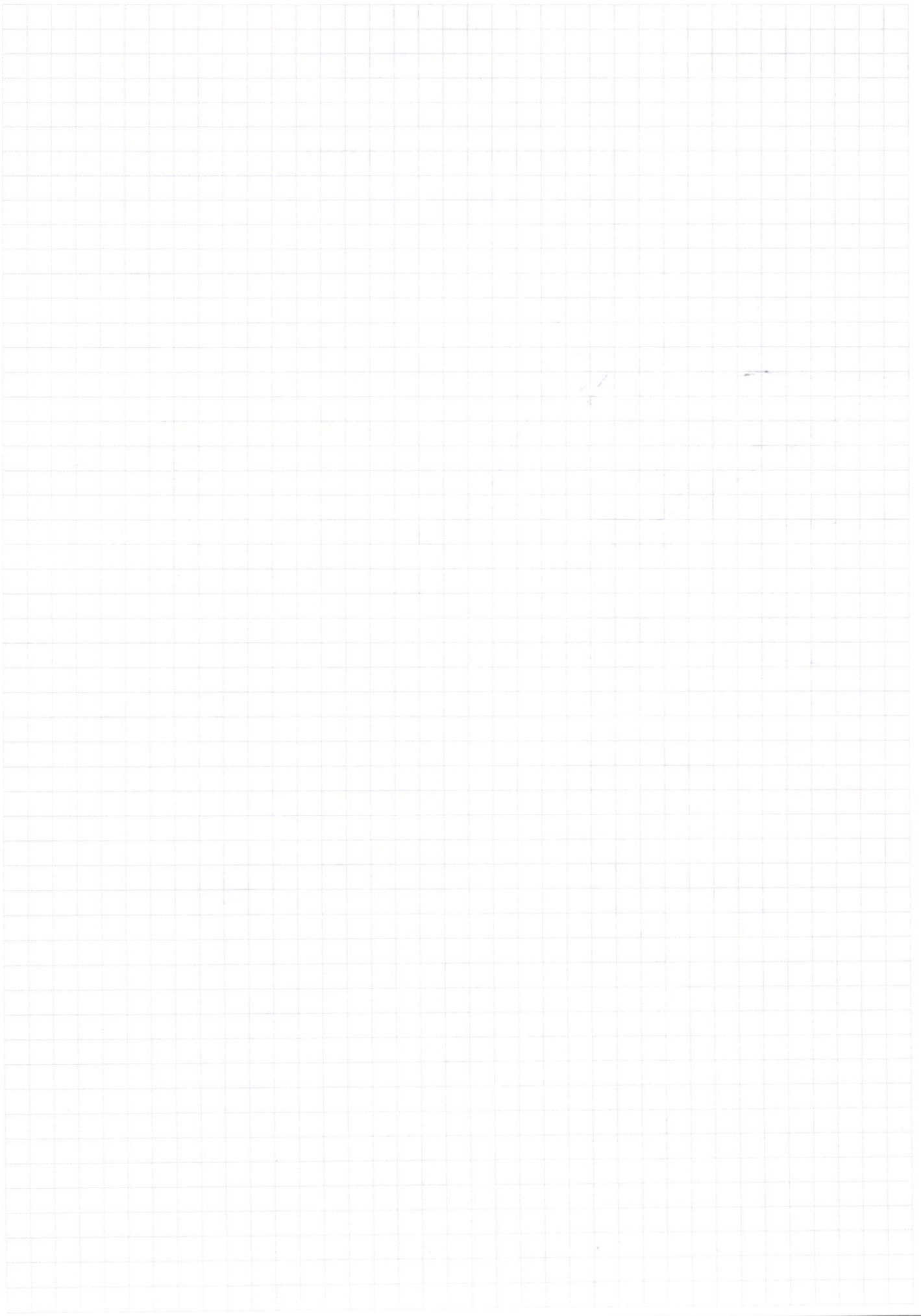
$17 \times 7 = 119$

$8 \cdot 16 = 128$

$16 \mid 17$

$529 \mid 17$
 $\frac{51}{48}$

$23 \times 23 = 529$



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{12x+26}{2x+3}$$

$$1 + \sqrt{-\frac{33}{4} - 13x - x^2}$$

$$\begin{array}{r} 23 \\ \times 23 \\ \hline 69 \end{array}$$

$$\frac{10x+23}{2x+3}$$

$$\sqrt{-\frac{33}{4} - 13x - x^2}$$

$$\frac{46}{529}$$

$$\frac{100x^2 + 460x + 529}{4x^2 + 12x + 9}$$

$$-\frac{33}{4} - 13x - x^2$$

$$\begin{array}{r} 225 \\ - 529 \\ \hline -225 \\ 304 \end{array}$$

$$25 + \frac{160x + 304}{(2x+3)^2}$$

$$\frac{133}{4} - 2\sqrt{34}$$

$$\frac{4}{15} + \frac{34}{6}$$



$$\sqrt{-136 + 26\sqrt{34} + \frac{33}{4}}$$

$$\frac{16}{12}$$

$$136$$

$$26\sqrt{34} - 136 - \frac{33}{4}$$

$$\sqrt{-(x+6,5-\sqrt{34})(x+6,5+\sqrt{34})}$$

$$\frac{13}{2}$$

$$\frac{1649}{4}$$

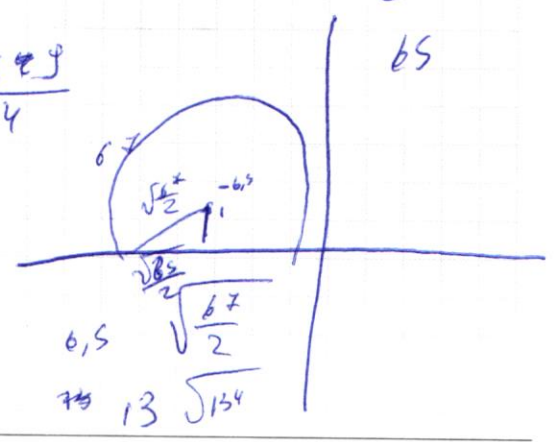
$$\frac{67}{2}$$

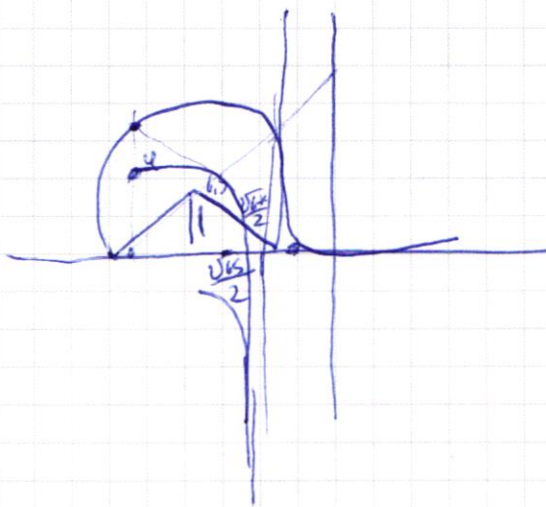
$$\frac{67}{2} - 1$$

$$y^2 + x^2 + 13x = -\frac{33}{4}$$

$$y^2 + (x+6,5)^2 = \frac{134}{4}$$

$$(y-1)^2 + (x+6,5)^2 = \frac{134}{4} = \frac{67}{2}$$





$$6 + \frac{8}{2x+3}$$

$$\frac{8}{2x+3} = -6$$

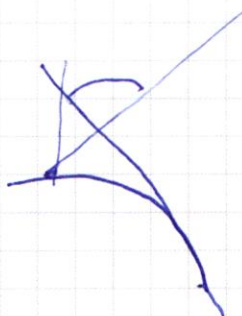
$$8 = -12x - 78$$

$$12x + 78 =$$

$$12x + 86$$

$$6x + 43$$

$$\begin{array}{r} +1 \\ 13 \\ 2 \overline{) 6} \\ 78 \end{array}$$



~~78~~
$$6 + \frac{8}{3-13} = 4$$

$$ax + b = 6 + \frac{8}{2x+3}$$

$$ax + b = \frac{12x+26}{2x+3}$$

$$2ax^2 + 3ax + 2bx + 3b + 12x + 26 = 0$$

$$(3a+2b+12)^2 - 4 \cdot 2a \cdot (3b+26) = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 13x + \sqrt[3]{(13x+y)(13x-y)} = 82 \\ 13x+y = 216 \end{array} \right.$$

$$13x+y = 216$$

$$13x+y = \sqrt[3]{216}$$

$$13x+y + 12\sqrt{13x+y} = -32$$

$$t + 12\sqrt[3]{t} = -32$$

$$t = -8$$

$$-8 - 104 =$$

$$-112$$

$$26x = 208$$

$$x = 8$$

$$x = 8$$

$$\frac{260}{52}$$

$$8; -112$$

$$\begin{array}{r} 208 \overline{) 12} \\ 104 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 13 \quad 26 \\ \times 8 \quad \times 16 \\ \hline \end{array}$$

$$\frac{26}{13}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\sqrt[3]{(13x-y)(13x+y)}$$

$$32 - \frac{1}{3} 13x = -y - 124$$

$$13x - y = 216$$

$$\begin{array}{r} 124 \\ + 92 \\ \hline 216 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 124 \\ - 92 \\ \hline 32 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 216 \overline{) 2} \\ 108 \overline{) 2} \\ 54 \overline{) 2} \\ 27 \overline{) 3} \\ 3 \overline{) 3} \end{array}$$

$$13x + y + 2\sqrt[3]{169x^2 - y^2} = 32$$

$$13x + y = t \quad t + 2\sqrt[3]{216t} = 32$$

$$2\sqrt[3]{216t} = 32 - t$$

$$8 \cdot 216t = \frac{15}{t}$$

$$(32 - t)^3 = 2^{15} - 3 \cdot 2^{10}t + 3 \cdot 2^5t^2 - t^3$$

$$t^3 - 96t^2 + 4800t - 32768$$

$$6\sqrt[3]{6t}$$

$$\begin{array}{r} 216 \overline{) 4} \\ -20 \\ \hline 16 \overline{) 54} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 54 \overline{) 9} \\ 60 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 1024 \\ 32 \\ \hline 2048 \\ 3072 \\ \hline 32768 \end{array}$$

$$32 \cdot 2^5$$

$$96t$$

$$3072$$

$$\begin{array}{r} 216 \\ \times 8 \\ \hline 1728 \\ + 3072 \\ \hline 4800 \end{array}$$

$$2^5 \cdot 2^3 \cdot 3$$

$$2^8 \cdot 3$$

$$t + 12\sqrt[3]{6t} = 32$$

$$1728 \overline{) 8}$$

$$1728t = (32-t)^3$$

$$12^3t = (32-t)^3$$

$$\sqrt[3]{t} = \frac{32-t}{12}$$

$$10^6 - 10^4$$

$$10^5 - 10^3$$

88888

$$10^6$$

9000000

b + c dej

b - 1000

c dej - 2

1414

$$6 + \frac{8}{2x+3}$$

$$x^2 + 13x + \frac{33}{4}$$

$$\frac{33}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{33}{4}$$

$$\frac{34}{2}$$

$$\frac{11}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{33}{4}$$

$$26$$

$$\frac{13^2 - 4 \cdot 34}{4}$$

$$x_1 = \frac{-13 - 2\sqrt{34}}{2}$$

$$x_2 = \frac{-13 + 2\sqrt{34}}{2}$$

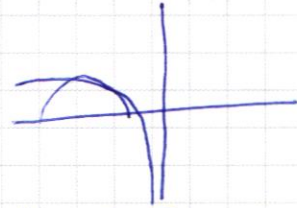
$$2\sqrt{34} > 10$$

$$\sqrt{34} > 5$$

$$\frac{-4\sqrt{34}}{2}$$

$$-2\sqrt{34}$$

$$\frac{13}{2} = 6 \frac{1}{2}$$



$$12828 \overline{) 3}$$

$$\underline{4216}$$

$$\frac{828}{22} = 37 \frac{14}{11}$$

$$11276$$

$$1276$$

$$276$$

$$12828$$

$$168 - 33 = 136$$

$$136 \overline{) 4}$$

$$134$$

$$\frac{-13 \pm 2\sqrt{34}}{2}$$

2.17

$$\sqrt{-\left(x + \frac{13 - 2\sqrt{34}}{2}\right) \left(x + \frac{13 + 2\sqrt{34}}{2}\right)}$$

$$\frac{2\sqrt{34} - 13}{2} > -\frac{3}{2}$$