## МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

# ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

## 11 класс

ВАРИАНТ 4 ШИФР ______________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы $\alpha$ и $\beta$ удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin2\alpha=-\frac{2}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6},\\ 9x^2+y^2-18x-12y=45.\end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$\left|x^2-26x\right|^{\log_5 12}+26x\geqslant x^2+13^{\log_5\left(26x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности $\Omega$ и $\omega$ касаются в точке $A$ внутренним образом. Отрезок $AB$ – диаметр большей окружности $\Omega$, а хорда $BC$ окружности $\Omega$ касается $\omega$ в точке $D$. Луч $AD$ повторно пересекает $\Omega$ в точке $E$. Прямая, проходящая через точку $E$ перпендикулярно $BC$, повторно пересекает $\Omega$ в точке $F$. Найдите радиусы окружностей, угол $AFE$ и площадь треугольника $AEF$, если известно, что $CD=12$, $BD=13$.

5. [5 баллов] Функция $f$ определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел $a$ и $b$ из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа $p$ ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее $x$). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $4\leqslant x\leqslant 28$, $4\leqslant y\leqslant 28$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{8-6x}{3x-2}\geqslant ax+b\geqslant 18x^2-51x+28$$

выполнено для всех $x$ на промежутке $\left(\frac{2}{3};2\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $TXYZ$, вершина $Y$ которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра $TY$. Известно, что $XY=\sqrt{3}$, $TX=\sqrt{2}$, $TZ=2$. Найдите длину ребра $XZ$. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\quad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta \Rightarrow \cos 2\beta = \frac{-\frac{2}{17}}{-\frac{2}{\sqrt{17}}} = \frac{1}{\sqrt{17}}$

$tg 2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha} \Rightarrow tg 2\alpha - tg 2\alpha \cdot tg^2\alpha = 2tg\alpha$

$tg\alpha = b \neq \pm 1 \quad tg 2\alpha \cdot b^2 + 2b - tg 2\alpha = 0$

$b = \frac{-1 \pm \sqrt{1+tg^2 2\alpha}}{tg 2\alpha} = \frac{-1 \pm \frac{1}{|\cos 2\alpha|}}{tg 2\alpha} = \frac{-1 \pm \frac{1}{\cos 2\alpha}}{tg 2\alpha}$, т.к. $\pm|x| = \pm x$

$\sin(2\alpha+4\beta) = \sin((2\alpha+2\beta)+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}\cdot\frac{1}{\sqrt{17}} + \cos(2\alpha+2\beta)\sin 2\beta \;\textcircled{=}$

$\cos(2\alpha+2\beta) = \pm\sqrt{1-\sin^2(2\alpha+2\beta)} = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\beta = \pm\sqrt{1-\cos^2 2\beta} = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}$

$\textcircled{=} -\frac{1}{17} \pm \frac{16}{17} \Rightarrow \sin 2\alpha = -\frac{2}{17} + \frac{1}{17} \pm \frac{16}{17} = -\frac{1}{17} \pm \frac{16}{17}$

$\Rightarrow \sin 2\alpha = -1 \vee \sin 2\alpha = \frac{15}{17}$

$tg\alpha$ – опр. $\Rightarrow \cos\alpha \neq 0 \Rightarrow \alpha \neq \frac{\pi}{2}+\pi k, k\in\mathbb{Z} \Rightarrow 2\alpha \neq \pi + 2\pi k \Rightarrow$

$\Rightarrow \sin 2\alpha \neq -1 \Rightarrow \sin 2\alpha = \frac{15}{17}$.

$\cos 2\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2 2\alpha} = \pm\sqrt{1-\frac{225}{289}} = \pm\frac{8}{17} \Rightarrow tg 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \pm\frac{15}{8}$

$\Rightarrow tg\alpha = \frac{-1\pm\frac{1}{\cos 2\alpha}}{tg 2\alpha} = \frac{-1\pm\frac{17}{8}}{\pm\frac{15}{8}} \Rightarrow tg\alpha \in \left\{\frac{9}{15}, \frac{-9}{15}, \frac{5}{3}, \frac{-5}{3}\right\}$

~~Ответ:~~ [illegible]

☐ черновик ☑ чистовик

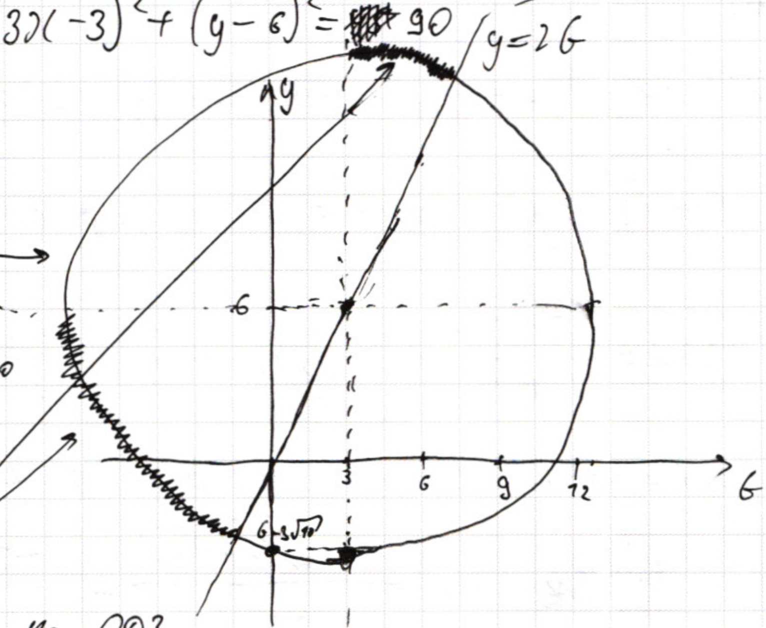
(Поставьте галочку в нужном поле)

Ответ: $\frac{3}{5}, -\frac{3}{5}, \frac{5}{3}, -\frac{5}{3}$.

№2.

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6} \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y-6x=\sqrt{(x-1)(y-6)} \\ (3x-3)^2+(y-6)^2=90 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b=3x \\ y-2b=\sqrt{\frac{1}{3}(b-3)(y-6)} \\ (b-3)^2+(y-6)^2=90 \end{cases}$$




ОДЗ: $(b-3)(y-6)\geq 0$, $y-2b\geq 0$

$(b\geq 3 \,\&\, y\geq 6) \vee (b\leq 3 \,\&\, y\leq 6)$

$\&\; y\geq 2b$

Заштрихованное на окр. — точки на ней, попадающие под ОДЗ

решим первое ур-ие:

$$(y-2b)^2=\frac{by}{3}-2b-y+6$$

$$y^2-4yb+4b^2=\frac{by}{3}-2b-y+6 \Rightarrow y^2-\left(\frac{13}{3}b-1\right)y+2(2b^2+b-3)=0$$

$$D=\left(\frac{13}{3}b-1\right)^2-8(2b^2+b-3)=\frac{169}{9}b^2-\frac{26}{3}b+1-16b^2-8b+24=$$

$$=\frac{25}{9}b^2-\frac{50}{3}b+25=\left(\frac{5}{3}b-5\right)^2$$

$$y=\frac{\frac{13}{3}b-1\pm\left|\frac{5}{3}b-5\right|}{2}=\frac{\frac{13}{3}b-1\pm\left(\frac{5}{3}b-5\right)}{2}\Rightarrow y=3b-3 \vee y=\frac{4}{3}b+2$$

1) $y=3b-3$ угловой коэфф. больше, чем у $y=2b$

$3\cdot 3-3=6 \Rightarrow$ прох. через центр. окр $\Rightarrow$ решение будет при $b\geq 3$ и $y\geq 6$

$$(b-3)^2+(3b-9)^2=90 \Rightarrow b^2-6b+\cancel{9}+9b^2-54b+\cancel{81}=\cancel{90} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10b^2-60b=0 \Rightarrow \cancel{b=0} \vee b=6 \Rightarrow y=3b-3=3\cdot 6-3=15$$

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$b=6, y=15 \Rightarrow x=2, y=15 \Rightarrow (2,15)$ — решение.

2) $y=\frac{4}{3}b+2$ $\quad \frac{4}{3}<2 \Rightarrow$ решение при $b\le 3$ и $y\le 6$

$(b-3)^2+\left(\frac{4}{3}b-4\right)^2=90 \Rightarrow b^2-6b+9+\frac{16}{9}b^2-\frac{32}{3}b+16=90$

$\Rightarrow \frac{25}{9}b^2-\frac{50}{3}b+25=90 \Rightarrow \left(\frac{5}{3}b-5\right)^2=90$

$\Rightarrow \frac{5}{3}b-5=\pm 3\sqrt{10} \Rightarrow \frac{5}{3}b=5\pm 3\sqrt{10} \Rightarrow b=3\pm\frac{9}{5}\sqrt{10}$, $b\le 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow b=3-\frac{9}{5}\sqrt{10} \Rightarrow y=\frac{4}{3}b+2=\frac{4}{3}\left(3-\frac{9}{5}\sqrt{10}\right)+2=4-\frac{12}{5}\sqrt{10}+2=$

$=6-\frac{12}{5}\sqrt{10}$

$x=\frac{b}{3}=1-\frac{3}{5}\sqrt{10} \Rightarrow \left(1-\frac{3}{5}\sqrt{10},\ 6-\frac{12}{5}\sqrt{10}\right)$ — решение.

Ответ: $(2,15)$, $\left(1-\frac{3}{5}\sqrt{10},\ 6-\frac{12}{5}\sqrt{10}\right)$.

№5.

$f(ab)=f(a)+f(b)$ $\qquad f(y)=f(1\cdot y)=f(1)+f(y) \Rightarrow f(1)=0$

$f(1)=f(y)+f\left(\frac{1}{y}\right) \Rightarrow f\left(\frac{1}{y}\right)=-f(y)$ $\qquad x,y\in[4,28]$

$f(p)=\left[\frac{p}{4}\right]$

$x=p_1^{\alpha_1}\dots p_n^{\alpha_n}$ $\qquad y=q_1^{\beta_1}\dots q_m^{\beta_m}$

$\Rightarrow f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)-f(y)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\left[\frac{p_i}{4}\right]-\sum_{j=1}^{m}\beta_j\left[\frac{q_j}{4}\right]$

Если число $=2^a\cdot 3^b \Rightarrow f(\text{число})=0$, очевидно.

Числа от 4 до 28:

число: $2^2$, 5, $2\cdot3$, 7, $2^3$, $3^2$, $2\cdot5$, 11, $3\cdot2^2$, 13, $2\cdot7$, $3\cdot5$, $2^4$, 17, $2\cdot3^2$,

f(число): 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 2, 0, 3, ~~1~~, ~~1~~, 0, 4, 0,

---

число: 19, $2^2\cdot5$, $3\cdot7$, $2\cdot11$, 23, $2^3\cdot3$, $5^2$, $2\cdot13$, $3^3$, $2^2\cdot7$

f(число): 4 1 1 2 5 0 2 3 0 1

подх. пары: 9 нулей, 8 единиц, ..., 1 пятерка

$(f(x)=0,\ f(y)=\overline{1,5})$ — $9\cdot16=144$

$(f(x)=1,\ f(y)=\overline{2,5})$ — $8\cdot(25-9-8)=64$

⋮ — $3(25-9-8-3)=15$

⋮ — $2(25-9-8-3-2)=6$

$(f(x)=4,\ f(y)=5)$ — $2(25-9-8-3-2-2)=2$

$144+64+15+6+2=231$

Ответ: 231.

№6.

$\frac{8-6x}{3x-2}\to-2,\ x\to+\infty$ $\qquad f(x)=18x^2-51x+28$

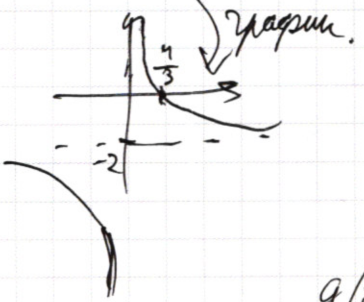



график.

$f\left(\frac{2}{3}\right)=18\cdot\frac{4}{9}-51\cdot\frac{2}{3}+28=2$

$f(2)=18\cdot4-51\cdot2+28=-2$

$g(x)=\frac{8-6x}{3x-2}$ $\qquad g'(x)=\frac{-6(3x-2)+(6x-8)\cdot3}{(3x-2)^2}=-\frac{12}{(3x-2)^2}$

$x_0=\frac{4}{3}$ $\qquad g'(x_0)=\frac{-12}{\left(3\cdot\frac{4}{3}-2\right)^2}=-3$ $\qquad g(x_0)=0$

$\Rightarrow$ $y=g'(x_0)(x-x_0)+g(x_0)=-3x+4=h(x)$

$h(2/3)=2$ $\quad h(2)=-2$ $\Rightarrow y=-3x+4$ — ед. прямая, для которой вып. неравенство из условия.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Иначе прямая (другая) пересекла бы $f(x)$ на ~~отрезке~~ $\left[\frac{7}{3}, 2\right]$, следовательно, имела бы точки из $\left[\frac{7}{3}, 2\right]$, значение в которых меньше, чем значение $f$ в этих точках

Ответ: $(-7, 4)$.

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

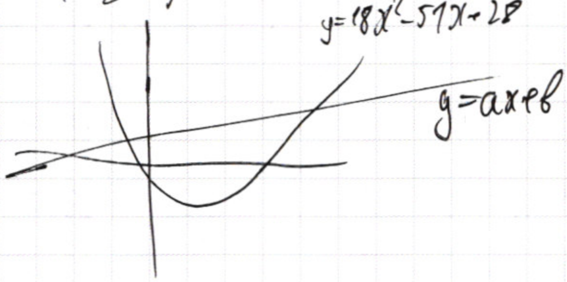
# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№8.

$\cancel{18x^2-(a+57)x+(28-b)\leq 0}$

$\cancel{D=(a+57)^2}$

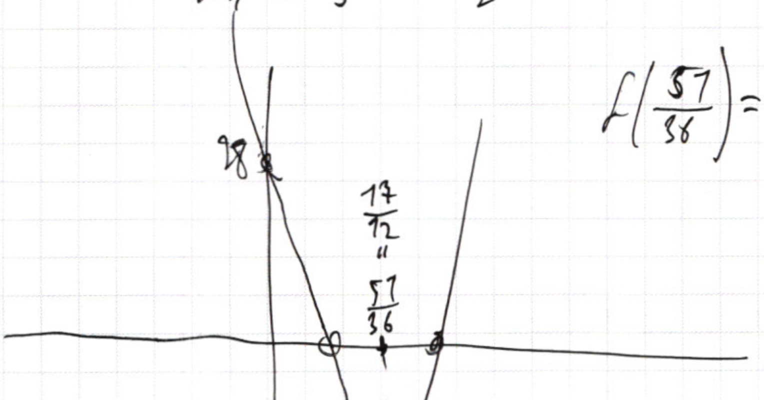
$$\frac{8-6x}{3x-2}\geq ax+b\geq 18x^2-57x+28$$




$18x^2-(a+57)x+(28-b)\leq 0$

$D=(a+57)^2-72(28-b)$

$x_1\leq\frac{2}{3}\qquad x_2\geq 2$




$$f\left(\frac{57}{36}\right)=18\cdot\frac{57^2}{4\cdot 18^2}-\frac{57^2}{2\cdot 18}+28=$$

$$=\frac{57^2}{4\cdot 18}-\frac{2\cdot 57^2}{4\cdot 18}+28=$$

$$=28-\frac{57^2}{4\cdot 18}=28-\frac{2601}{72}=$$

$$57^2=(50+7)^2=2500+700+49=3249$$

$28\cdot 72=(50-22)(50+22)=$

$=2500-22^2=$

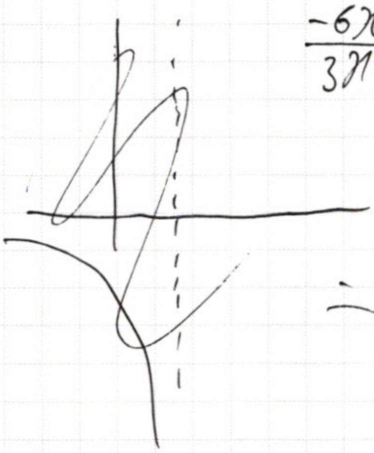
$=2500-(20+2)^2=2500-400-80-4$ 2016

$$=\frac{2016-2601}{72}=-\frac{585}{72}$$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

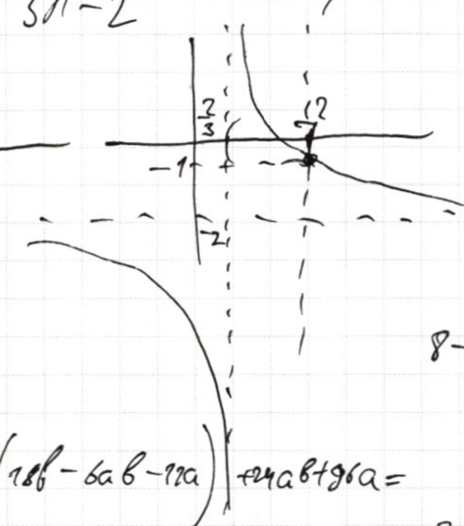
$\frac{8-6x}{3x-2} \geq ax+b$



$f(x)$

$\frac{-6x+8}{3x-2} \to -2,\ x\to+\infty$

$f(2)=\frac{-6\cdot 2+8}{3\cdot 2-2}=\frac{-4}{4}=-1$




$8-6x \geq (ax+b)(3x-2) =$

$=3ax^2+(3b-2a)x-2b$

$3ax^2+(3b-2a)x-2b \leq -6x+8$

$3ax^2+(3b-2a+6)x-2(b+4) \leq 0$

$D=(3b-2a+6)^2+24a(b+4) =$

$=9b^2+4a^2+36+2(18b-6ab-12a)+24ab+96a=$

$=9b^2+4a^2+36+36b-12ab-24a+24ab+96a=$

$=9b^2+4a^2+36+72ab+72a+36b=$

$=(3b)^2+(2a)^2+6^2+2(6ab+36a+18b)=$

$=(3b+2a+6)^2+48a$

№1

$\alpha, \beta:$

$\sin(2(\alpha+\beta))=-\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\quad \sin(2(\alpha+\beta)+2\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{17}$

$\cancel{2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)}$ $\quad \sin(2(\alpha+\beta)+2\beta)=$

$=\sin 2(\alpha+\beta)\cos 2\beta+\cos 2(\alpha+\beta)\sin 2\beta=$

$=-\frac{1}{\sqrt{17}}\cos 2\beta \pm \frac{4}{\sqrt{17}}\sin 2\beta \ \vee -\frac{1}{\sqrt{17}}\cos 2\beta-\frac{4}{\sqrt{17}}\sin 2\beta$

$\sin(2\alpha+2\beta)=\sin 2\alpha\cos 2\beta+\cos 2\alpha\cdot\sin 2\beta=-\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin x+\sin y \overset{?}{=} 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}=2\left(\sin\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2}+\sin\frac{y}{2}\cos\frac{x}{2}\right)\left(\cos\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2}+\sin\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2}\right)=$

$=2\cos^2\frac{y}{2}\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}-2\sin\frac{y}{2}\cos\frac{y}{2}\cdot\cos^2\frac{x}{2}-2\sin^2\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2}\cos\frac{y}{2}-2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\sin^2\frac{y}{2}=$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2.

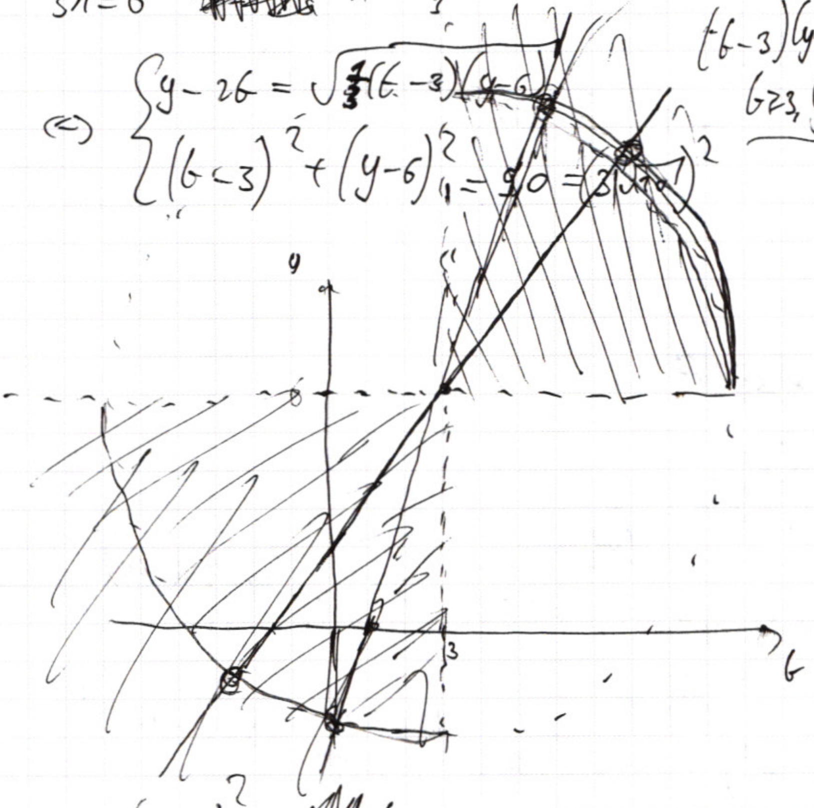
$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6} \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y-6x=\sqrt{(x-1)(y-6)} \\ (3x-3)^2+(y-6)^2=90 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$3x=t$ $x=\frac{t}{3}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y-2t=\sqrt{\frac{1}{3}(t-3)(y-6)} \\ (t-3)^2+(y-6)^2=90=(3x-1)^2 \end{cases}$$

$(t-3)(y-6)\geq 0$ ~~$yt-3y-6t+18\geq 0$~~

$t\geq 3, y\geq 6 \vee t\leq 3, y\leq 6$



$D=\left(\frac{5}{3}t-5\right)^2$

$y=\frac{\frac{13}{3}t-1\pm\left|\frac{5}{3}t-5\right|}{2}=$

$=\frac{\frac{13}{3}t-1\pm\left(\frac{5}{3}t-5\right)}{2}=$

$=1)\ 3t-3 \quad 2)\ \frac{4}{3}t+2$

$(y-2t)^2=\frac{ty}{3}-2t-y+6$

$y^2-4yt+4t^2=\frac{ty}{3}-2t-y+6$

~~$y^2-\left(4t+\frac{t}{3}-1\right)y+(4t^2+2t-6)=0$~~

$y^2-\frac{13}{3}yt+4t^2+2t+y-6=0$

$\left(y^2+2\cdot\frac{1}{2}\cdot y+\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{4}+\left(4t^2+2\cdot\frac{1}{2}\cdot 2t+\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{4}-\frac{13}{3}yt-6=0$

$\left(y+\frac{1}{2}\right)^2+\left(2t+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{13}{3}yt-\frac{13}{2}=0$

$y^2-\left(4t+\frac{t}{3}-1\right)y+2(2t^2+t-3)=0$

$D=\left(4t+\frac{t}{3}-1\right)^2-8(2t^2+t-3)=$

$=\left(\frac{13}{3}t-1\right)^2-8(2t^2+t-3)=$

~~$t=-2t \quad t=-\frac{t}{2}$~~

$=\frac{169}{9}t^2-\frac{26}{3}t+1-16t^2-8t+24=$

$=\frac{25}{9}t^2-\frac{50}{3}t+25=$

$=\left(\frac{5}{3}t-5\right)^2$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

№3

$$|x^2-26|x||^{\log_5 12}+26x \geq x^2+13^{\log_5(26x-x^2)}$$

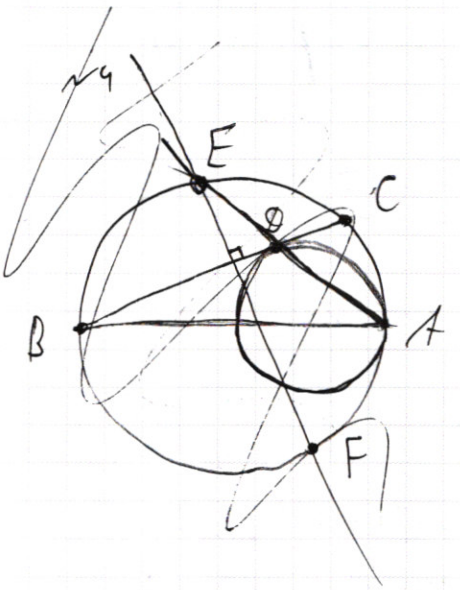
ОДЗ: $26x-x^2>0$ ~~$x(26-x)>0$~~ ОДЗ: $0<x<26$

$$(26x-x^2)^{\log_5 12}-13^{\log_5(26x-x^2)} \geq x^2-26x$$

$$(26x-x^2)^{\log_5 12}+(26x-x^2) \geq 13^{\log_5(26x-x^2)}$$

$$(26x-x^2)\left((26x-x)^{\log_5 \frac{12}{5}}+1\right) \geq 13^{\log_5(26x-x^2)}$$

№4




$$(26x-x^2)^{\log_5 12}+26x \geq x^2+13^{\log_5(26x-x^2)}$$

$$(26x-x^2)^{\log_5 12}+(26x-x^2) \geq 13^{\log_5(26x-x^2)}$$

№1

$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{17}$ $\cos 2\beta=\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\cos 4\beta=-\frac{15}{17}$

$tg\, 2\alpha=\frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$ $a-a\,tg^2\alpha=2tg\alpha$

$a\,tg^2\alpha+2tg\alpha-a=0$ $tg\alpha=\frac{-1\pm\sqrt{1+a^2}}{a}=\frac{-1\pm\frac{1}{|\cos 2\alpha|}}{tg 2\alpha}=$

$=\frac{-|\cos 2\alpha|\pm 1}{tg 2\alpha|\cos 2\alpha|}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3.

$(26x-x^2)^{\log_5 12}+26x \geq x^2+13^{\log_5(26x-x^2)}$

$(26x-x^2)^{\log_5 12}-13^{\log_5(26x-x^2)} \geq x^2-26x$

$26x-x^2=t>0$

$t^{\log_5 12}-13^{\log_5 t} \geq t$

$t^{\log_5 12} \geq t+13^{\log_5 t}$

$t^{\log_5 12}-t-13^{\log_5 t} \geq 0$

$(a^x)'=(e^{x\ln a})'=$

$=e^{x\ln a}\cdot\ln a=a^x\cdot\ln a$

$\left(t^{\log_5 12}-13^{\log_5 t}\right) \geq t$

$f(t)=t^{\log_5 12}-13^{\log_5 t}=0$

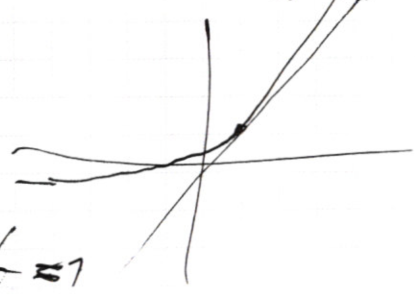
$\cancel{f'(t)=\log_5 12\cdot t^{\log_5\frac{12}{5}}-\ln 13\cdot 13^{\log_5 t}\cdot\frac{1}{t\ln 5}}$

$t^{\log_5 12}=13^{\log_5 t}$

$\cancel{\log_5 12\cdot t^{\log_5\frac{12}{5}}-\log_5 13\cdot\frac{13^{\log_5 t}}{t}>0}$

$\log_5 12\cdot\ln t=\log_5 t\cdot\ln 13$

$\frac{\ln 12}{\ln 5}\ln t=\frac{\ln t}{\ln 5}\ln 13$



$(\ln 13-\ln 12)\ln t=0$ $\qquad t=1$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

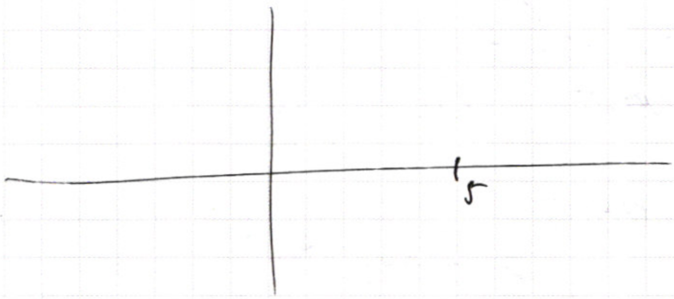
$$t^{\log_5 12} - 13^{\log_5 t} + t \geq 0$$

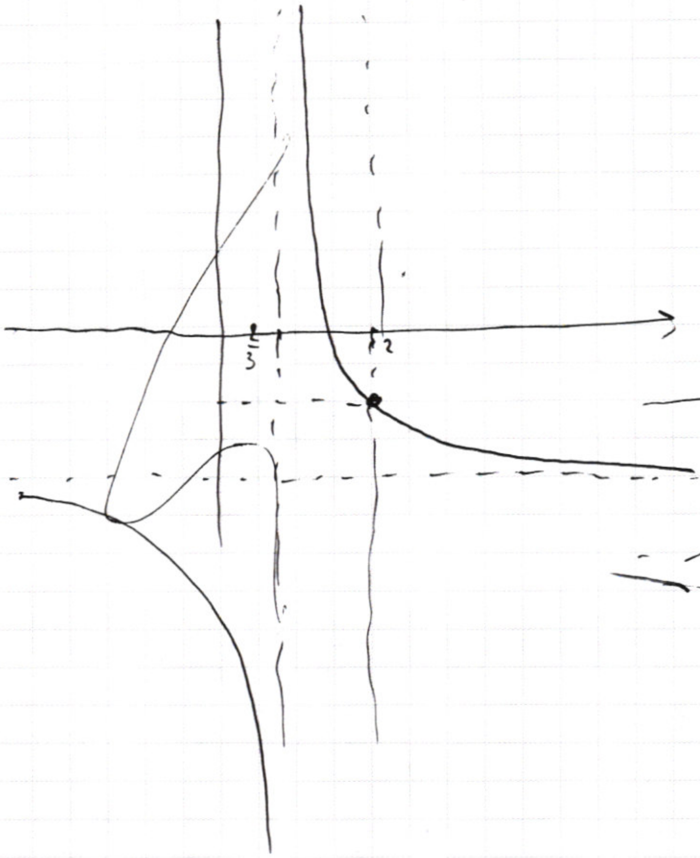
$$f'(t) = \log_5 12\, t^{\log_5 12 - 1} - \ln 13 \cdot 13^{\log_5 t} \cdot \frac{1}{t \ln 5} + 1 \leq 0$$

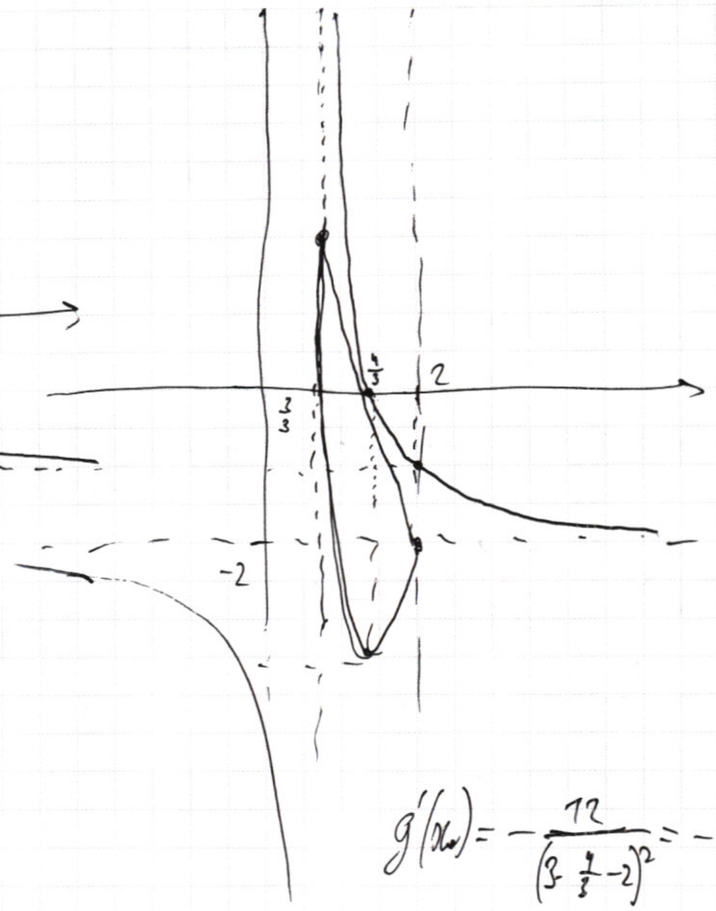
$$\log_5 12\, t^{\log_5 12 - 1} - \log_5 13 \cdot 13^{\log_5 t} \cdot \frac{1}{t} + 1 \leq 0 \quad t > 0$$

$$\log_5 12\, t^{\log_5 12} + t - \log_5 13 \cdot 13^{\log_5 t} \leq 0$$

$$t^{\log_5 12} - 13^{\log_5 t} \geq -t$$






$g'(x_0) = -\frac{72}{\left(3\cdot\frac{4}{3}-2\right)^2} = -3$

$18x^2 - 51x + 28$

$g(x_0) = \frac{8 - 6\cdot\frac{4}{3}}{3\cdot\frac{4}{3} - 2} = 0$

$6x^2 - 17x + \frac{82}{9} = 0$

$y = g'(x_0)(x - x_0) + g(x_0) =$
$= -3x + 4$

$D = 289 - 24\cdot\frac{82}{9} = 289 - 8\cdot\frac{82}{3} = 289 - \frac{656}{3} =$

$= \frac{867}{3} - \frac{656}{3} = \frac{211}{3}$

$x = \frac{17 \pm \sqrt{\frac{211}{3}}}{12}$

$f\left(\frac{2}{3}\right) = 18\cdot\frac{4}{9} - 51\cdot\frac{2}{3} + 28 = 8 - 34 + 28 = 2$

$f(2) = 18\cdot 4 - 51\cdot 2 + 28 = 72 - 102 + 28 = -2$

$g(x) = \frac{8 - 6x}{3x - 2}$ $\quad x_0 = \frac{4}{3}$ $\quad g'(x) = \frac{-6(3x-2) + (6x-8)\cdot 3}{(3x-2)^2} = \frac{-18x + 12 + 18x - 24}{(3x-2)^2} =$
$= -\frac{12}{(3x-2)^2}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin 2\alpha \cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta = \frac{-1}{\sqrt{17}}$

$\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}$

$|\sin 2\beta| = \frac{4}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\beta = \pm \frac{4}{\sqrt{17}}$

$\cos 2\alpha = \frac{-\frac{1}{\sqrt{17}} - \sin 2\alpha \cdot \frac{1}{\sqrt{17}}}{\sin 2\beta} = -\frac{1}{\sqrt{17}} \frac{\sin 2\alpha + 1}{\sin 2\beta}$

$\cancel{tg 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha \sin 2\beta}{\sin 2\alpha + 1}}$

$\sin 2\alpha = -\frac{2}{17} - \left(-\frac{1}{17} \pm \frac{16}{17}\right) =$

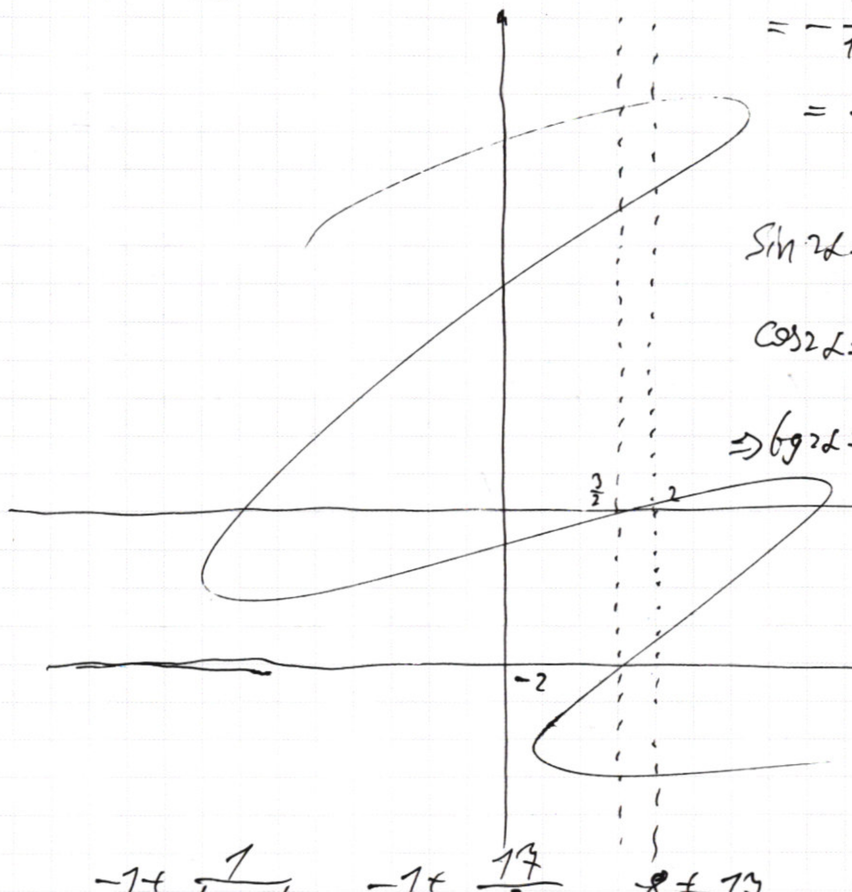
$= -\frac{2}{17} + \frac{1}{17} \pm \frac{16}{17} =$

$= -\frac{1}{17} \pm \frac{16}{17} = \frac{15}{17} \vee \cancel{-1}$ т.к. bg общ.

$\sin 2\alpha = \frac{15}{17}$

$\cos 2\alpha = \pm\sqrt{1 - \frac{225}{289}} = \pm\sqrt{\frac{64}{289}} = \pm\frac{8}{17}$

$\Rightarrow tg 2\alpha = \frac{\frac{15}{17}}{\pm\frac{8}{17}} = \pm\frac{15}{8}$




$tg\alpha = \frac{-1 \pm \frac{1}{|\cos 2\alpha|}}{tg 2\alpha} = \frac{-1 \pm \frac{17}{8}}{\pm\frac{15}{8}} = \frac{8 \pm 17}{\pm 15} = \boxed{\frac{9}{15};\ -\frac{9}{15};\ \frac{5}{3};\ -\frac{5}{3}}$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$f: \mathbb{Q}^+ \quad \forall a,b \in \mathbb{Q}^+ \quad f(a \cdot b) = f(a) + f(b)$

$\forall p \in \mathbb{P} \quad f(p) = \left[\frac{p}{4}\right]$ $\qquad x, y \in [4; 28]$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) = f(x) - f(y)$

$x = p_1^{\alpha_1} \dots p_n^{\alpha_n} \qquad y = q_1^{\beta_1} \dots q_m^{\beta_m}$

$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(p_i) \qquad f\left(\frac{1}{y}\right) = \sum_{j=1}^{m} \beta_j f\left(\frac{1}{q_j}\right)$

$f(2) = f\left(\frac{2y}{y}\right) = f(2y) + f\left(\frac{1}{y}\right)$

$= f(2) + f(y) + f\left(\frac{1}{y}\right)$

$f(y) + f\left(\frac{1}{y}\right) = 0$

$f\left(\frac{1}{y}\right) = -f(y)$

28

9 – 0

8 – 1

3 – 2

2 – 3

2 – 4

$f\left(\frac{x}{y}\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left[\frac{p_i}{4}\right] - \sum_{j=1}^{m} \beta_j \left[\frac{q_j}{4}\right]$

$2^2, 5, 2\cdot3, 7, 2^3, 3^2, 2\cdot5, 11, 2^2\cdot3, 13, 2\cdot7, 3\cdot5, 2^4, 17, 2\cdot3^2, 19,$
$2^2\cdot5, 3\cdot7, 2\cdot11, 23, 2^3\cdot3, 5^2, 2\cdot13, 3^3, 2^2\cdot7$

$\left(f(x)=0, \ \forall \text{ кроме}\right)$ — $9\cdot16 = 144$ +

$(f(x)=1, \ f(y)=2,5)$ — $8\cdot(25-9-8) = 64$ +

$(f(x)=2, \ f(y)=3,5)$ — $3\cdot(25-9-8-3) = 15$ +

$(f(x)=3, \ f(y)=4,5)$ — $2(25-9-8-3-2) = 6$ +

$(f(x)=4, \ f(y)=5)$ — $2(25-9-8-3-2) = 2$

0 – ∀

1 – 2,3,4,5

2 – 3,4,5

3 – 4,5

4 – 5

$144+64+15+6+2 = \boxed{231}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$= \cancel{\sin x}$ $\qquad\qquad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

$\sin\left(2(\alpha+\beta)+2\beta\right) + \sin 2\alpha = 2\cdot \sin 2(\alpha+\beta)\cdot \cos 2\beta =$

$= -\frac{2}{\sqrt{17}}\cos 2\beta = -\frac{2}{17} \Rightarrow \cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \qquad \cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}} \qquad \cos 4\beta = -\frac{15}{17}$

$\frac{1}{\sqrt{17}}\sin 2\alpha + \cos 2\alpha \sin 2\beta = \frac{-1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha + \sqrt{17}\cos 2\alpha \sin 2\beta = -1$

$\cancel{\sin\left(2(\alpha+\beta)+2\beta\right) + \frac{2}{17} - \sqrt{17}\cos 2\alpha \sin 2\beta = 1}$

$\cancel{\sin(2\alpha+4\beta) - \sqrt{17}\cos 2\alpha \sin 2\beta = \frac{15}{17}}$

$\cancel{\sin 2\alpha \cos 4\beta + 2\cos 2\alpha \sin 2\beta \cos 2\beta - \sqrt{17}\cos 2\alpha \sin 2\beta = \frac{15}{17}}$

$\cancel{\sin 2\alpha \cos 4\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta\left(\frac{2}{\sqrt{17}} - \sqrt{17}\right) = \frac{15}{17}}$

$\cancel{\sin 2\alpha \cos 4\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta \cdot \left(-\frac{15}{\sqrt{17}}\right) = -\frac{15}{17}\sin 2\alpha + \cos 2\alpha \sin 2\beta\left(-\frac{15}{\sqrt{17}}\right) = \frac{15}{17}}$

$\cos 4\beta = \cos 2\cdot(2\beta) = 2\cos^2 2\beta - 1 = -\frac{15}{17}$