МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 8 ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 13x + \sqrt[3]{169x^2 - y^2} = 92, \\ y + \sqrt[3]{169x^2 - y^2} = -124. \end{cases}$$

2. [4 балла] Решите неравенство

$$\sqrt{\log_{3x^2} x^9} \leqslant \log_{9x^3} \frac{1}{x^3}.$$

3. [5 баллов] Найдите количество семизначных чисел, обладающих следующим свойством: сумма остатков от деления числа на некоторые три последовательные степени числа десять равна 12828.

4. [5 баллов] Даны равнобокая трапеция $ABCD$ (AD и BC – основания, $AD > BC$) и окружность ω с центром C, касающаяся стороны AD. Касательные к ω, проведённые из точки B, пересекают прямую AD в точках P и Q (точка P лежит между Q и D). На продолжении стороны CB за точку B выбрана точка N так, что $\angle CPN$ – прямой. Найдите углы ADC, NQC и площадь четырёхугольника $NCDQ$, если известно, что $\angle NCP = \operatorname{arctg} \dfrac{15}{8}$, $AP = 17$, $NC = 34$.

5. [5 баллов] Дана система уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{3}\cos(x-y) = 7\cos\left(\frac{2\pi}{3} + y\right), \\ \cos(2x-y) + \sqrt{3}\sin(2x-y) = 12\sin\left(y + \frac{\pi}{6}\right). \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y$, если известно, что оно определено и что этих значений не меньше двух.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x+26}{2x+3} \leqslant ax + b \leqslant 1 + \sqrt{-\frac{33}{4} - 13x - x^2}$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{19}{2}; -\frac{3}{2}\right)$.

7. [6 баллов] Дан параллелепипед $KLMNK_1L_1M_1N_1$, грани KLL_1K_1 и $K_1L_1M_1N_1$ которого являются прямоугольниками. Сфера S касается прямых MM_1 и M_1N_1, плоскости $K_1L_1M_1$, а также плоскости KLL_1 в точке K. Эта сфера повторно пересекает отрезок KM_1 в точке A. Найдите $\angle KK_1N_1$ и объём параллелепипеда $KLMNK_1L_1M_1N_1$, если известно, что $AK = 3$, $AM_1 = 1$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$$\begin{cases} 13x + \sqrt[3]{169x^2 - y^2} = 92 \\ y + \sqrt[3]{169x^2 - y^2} = -124 \end{cases} \Rightarrow 13x - y = 216 \Rightarrow 13x = 216 + y$$

Подставим в первое равенство:

$$216 + y + \sqrt[3]{216^2 + 512y + y^2 - y^2} = 92 \Leftrightarrow y + 6\sqrt[3]{2y + 216} = -124$$

Рассмотрим $f(y) = y + 6\sqrt[3]{2y + 216}$. $f'(y) = 1 + \frac{12}{2(\sqrt[3]{2y+216})^2}$

Заметим, что $f'(y) > 0$ при любом $y \Rightarrow$

$\Rightarrow f(y)$ - монотонно возрастает $\Rightarrow$

$\Rightarrow f(y) = a$ - может иметь только единственный корень.

Заметим, что $f(-112) = -112 + 6 \cdot \sqrt[3]{-224 + 216} = -112 + 6 \cdot \sqrt[3]{-8} =$

$= -112 + 6 \cdot -2 = -124 \Rightarrow y = -112$ - единственный корень $\Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{216 + y}{13} = \frac{216 - 112}{13} = \frac{104}{13} = 8$

Ответ: $\begin{cases} x = 8 \\ y = -112 \end{cases}$

№2

$\sqrt{\log_{3x^2}(x^3)} \le \log_{9x^3}\left(\frac{1}{x^3}\right) \Leftrightarrow \sqrt{9\log_{3x^2} x} \le -3\log_{9x^3} x \Leftrightarrow$

(все преобразования равносильные на ОДЗ: $x > 0$; $x \ne \frac{1}{\sqrt[3]{9}}$; $x \ne \frac{1}{\sqrt{3}}$. Условие, что подкоренное выражение ≥ 0, разобрано в дальнейшем.)

$\Leftrightarrow \sqrt{\log_{3x^2} x} \le -\log_{9x^3} x \Leftrightarrow \sqrt{\frac{1}{\log_x(3x^2)}} \le -\left(\frac{1}{\log_x 9x^3}\right)$

$x = 1$ не является корнем. $x=1$ не явл. корнем, при подстановке $x = 1$

$x \ne 1$!

$\sqrt{\frac{1}{\log_x 3 + 2}} \le -\frac{1}{2\log_x 3 + 3}$. Пусть $t = \log_x 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{\frac{1}{t+2}} \le -\frac{1}{2t+3} \Leftrightarrow \begin{cases} t + 2 > 0 \\ 2t + 3 < 0 \\ \frac{1}{t+2} \le \frac{1}{4t^2 + 12t + 9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4t^2 + 12t + 9 \le t + 2 \\ t < -\frac{3}{2} \\ t > -2 \end{cases}$ (добножили на 2 выраж., помимо > 0) $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4t^2 + 11t + 7 \le 0 \\ t \in (-2; -\frac{3}{2}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4(t+1)(t+\frac{7}{4}) \le 0 \\ t \in (-2; -\frac{3}{2}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \in [-\frac{7}{4}; -1] \\ t \in (-2; -\frac{3}{2}) \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow t \in [-\frac{7}{4}; -\frac{3}{2}) \Rightarrow \begin{cases} \log_x 3 \ge -\frac{7}{4} \\ \log_x 3 < -\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_x 3 - \log_x x^{-\frac{7}{4}} \ge 0 \\ \log_x 3 - \log_x x^{-\frac{3}{2}} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ (x-1)(3 - x^{-\frac{7}{4}}) \geq 0 \\ (x-1)(3 - x^{-\frac{3}{2}}) < 0 \end{cases} \quad \{\text{На ОДЗ}\} \; \cancel{\left\{x>0;\ x \neq \frac{1}{\sqrt{3}};\ x \neq \frac{1}{\sqrt[3]{9}}\right\}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ (x-1)(3^{-\frac{4}{7}} - x) \geq 0 \\ (x-1)(3^{-\frac{2}{3}} - x) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [3^{-\frac{4}{7}}; 1) \\ x \in (0; 3^{-\frac{2}{3}}) \cup (1; +\infty) \end{cases} \Rightarrow x \in [3^{-\frac{4}{7}}; 3^{-\frac{2}{3}}).$$

весь промежуток входит в изн. ОДЗ.

Ответ: $x \in [3^{-\frac{4}{7}}; 3^{-\frac{2}{3}}) \cup \{1\}$.

№ 3.

Пусть изначальное число: $\overline{xyabcde}$ ~~*~~. Число 12 828 может получится только (1 случай) суммой $\overline{abcde} + \overline{bcde} + \overline{cde}$ (остатков от деления числа на 10^4 – это число состоящее из n его последних цифр.), или (2 случай) суммой $\overline{yabcde} + \overline{abcde} + \overline{bcde}$, где $y = 0$. ~~Иначе у нас если мы рассматриваем~~ Если максимальный из остатков получится шестизначным, то мин. ~~число~~ значение суммы 100,000, что больше 12828, а если четырехзначным, то макс. значение суммы: $9999 + 999 + 99 = 11100 - 3 = 11097$, что < 12828.

Рассмотрим первый случай:

(~~3~~ Рассмотрим, как получилась цифра в каждом разряде)

$\overline{abcde} + \overline{bcde} + \overline{cde} = 12828 \Rightarrow$ 1) $3e = 8$ или $3e = 18 \Rightarrow e = 6$.

2) $3d + 1 = 2$ или $3d + 1 = 12$ или $3d + 1 = 21 \Rightarrow d = 7$.

3) $3c + 2 = 8$ или $3c + 2 = 18$ или $3c + 2 = 27 \Rightarrow$

$\Rightarrow c = 2$.

4) $2b + 0 = 2$ или $2b + 0 = 12$ или $2b + 0 = 22 \Rightarrow b = 1$.

5) $a + 0 = 1 \Rightarrow a = 1$.

Заметим, что $3k \leq 27$, где k = ~~одно~~ любому числу из: a, b, c, d, e)

Единственный возможный ~~вариант~~ способ получить такую сумму, когда $\overline{abcde} = 11276$. Заметим, что ~~вариант~~ во втором случае выполняется только тогда, когда выполняется первый, поэтому никаких новых семизначных он не ~~даст~~ включает (которые не будут найдены в случае 1). $\Rightarrow$ ~~ко~~ Всего количество чисел $= 9 \cdot 10 = 90$, т. к. $\overline{abcde} = 11276$; x = любому числу с 1–9, а y = любому числу с 0–9.

Ответ: 90 чисел.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 5.

$$\begin{cases} \sqrt{3}\cos(x-y) = 7\cos(\frac{2\pi}{3}+y) \\ \cos(2x-y) + \sqrt{3}\sin(2x-y) = 12\sin(y+\frac{\pi}{6}) \end{cases}$$

$\cos(2x-y)+\sqrt{3}\sin(2x-y) = 2\sin(2x-y+\frac{\pi}{6}) = 12\sin(y+\frac{\pi}{6}) \Rightarrow$

$\Rightarrow \sin(2x-y+\frac{\pi}{6}) = 6\sin(y+\frac{\pi}{6})$

$7\cos(\frac{2\pi}{3}+y) = 7\sin(-\frac{\pi}{6}-y) = -7\sin(y+\frac{\pi}{6}) = \sqrt{3}\cos(x-y)$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

№ 6.1

$$\frac{12x+26}{2x+3} \le ax+b \le 1+\sqrt{-\frac{33}{4}-13x-x^2} \Leftrightarrow \begin{cases} 6+\frac{8}{2x+3} \le ax+b \\ ax+b \le 1+\sqrt{-\frac{33}{4}-13x-x^2} \end{cases}$$

Рассмотрим ~~$y=1+\sqrt{-\frac{33}{4}-13x-x^2}$~~. $x_0 = -\frac{13}{2}$ ~~у~~ в этом $y=-\frac{33}{4}-13x-x^2$.

$x_0=-\frac{13}{2} \Rightarrow$ ~~график у наиб~~ наибольшее значение $y=-\frac{33}{4}-13x-x^2$, также как и $y=1+\sqrt{-\frac{33}{4}-13x-x^2}$ достигает при $x_0=-\frac{13}{2}$.

Рассмотрим графики $y=6+\frac{8}{2x+3}$; $y=1+\sqrt{-\frac{33}{4}-13x-x^2}$ и $y=ax+b$.

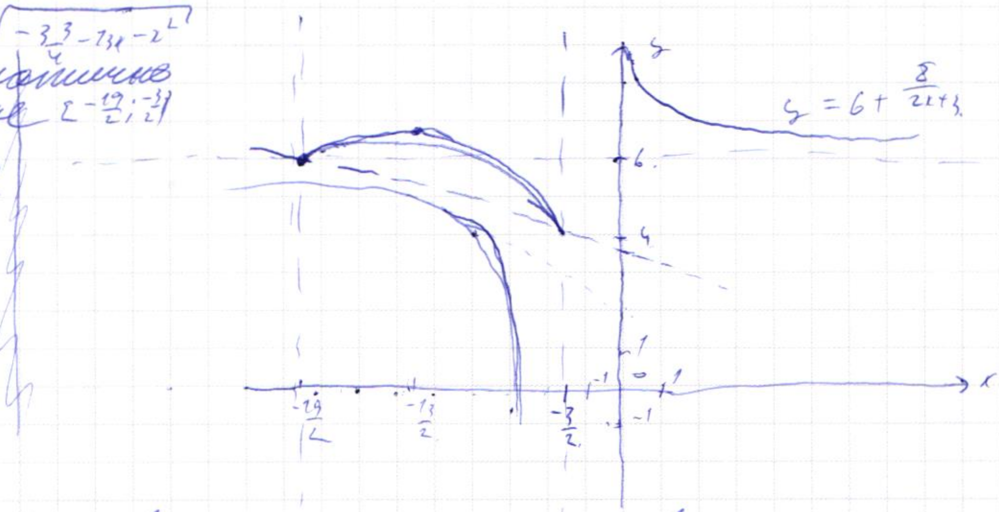
График $y=1+\sqrt{-\frac{33}{4}-13x-x^2}$ построим схематично на промежутке $[-\frac{19}{2};-\frac{3}{2}]$

$y=1+\sqrt{-\frac{33}{4}-13\cdot\frac{19}{2}-(\frac{19}{2})^2}=$

$=6.$

$y=1+\sqrt{-\frac{33}{4}-13\cdot\frac{3}{2}-(\frac{3}{2})^2}=$

$=4.$



Прямая $y=ax+b$ должна находится выше графика $y=6+\frac{8}{2x+3}$ и ниже $y=1+\sqrt{-\frac{33}{4}-13x-x^2}$ на ~~интервале~~ промежутке или касается.

Найдем. 1) $y=ax+b$ ниже $y=1+\sqrt{-\frac{33}{4}-13x-x^2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} y=-a\cdot\frac{19}{2}+b\le 6 \\ y=-\frac{3}{2}a+b\le 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b\le 6+\frac{19}{2}a \\ b\le 4+\frac{3}{2}a \end{cases}$$

2) ~~Как~~ $y=ax+b$ выше или касается $6+\frac{8}{2x+3} \Rightarrow$

$$\Rightarrow 6+\frac{8}{2x+3}=ax+a \Rightarrow 2ax^2+(3a+2b-12)x-26+3b=0$$

(т.к. мы рассматриваем только $x\in[-\frac{19}{2};-\frac{3}{2}]$) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow D=(3a^2+2b-12)^2-8a(3b-26)=(2b-3a-12)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} D=0 \Rightarrow b=\frac{3}{2}a+6 \\ \begin{cases} x=\frac{3a+2b-12+2b-3a-12}{2}=2b-12 \in [-\frac{19}{2};-\frac{3}{2}] \\ x=\frac{3a+2b-12+3a+12-2b}{2}=3a\in[-\frac{19}{2};-\frac{3}{2}] \end{cases} \\ -a\frac{19}{2}+b > \frac{12(-\frac{19}{2})+26}{-19+3} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} b=\frac{3}{2}a+6 \\ \begin{cases} b\in[6-\frac{19}{4};6-\frac{3}{4}] \\ a\in[-\frac{19}{6};-\frac{1}{2}] \end{cases} \\ b>\frac{19}{2}+\frac{35}{4} \end{array}\right.$$

3) $$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} b=\frac{3}{2}a+6 \\ ~~b\in[6-\frac{19}{4};6\frac{3}{4}]~~ \\ ~~a\in[-\frac{19}{6};-\frac{1}{2}]~~ \end{array}\right. \\ b\le 6+\frac{19}{2}a \\ b\le 4+\frac{3}{2}a \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6.2.

3) $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} b = \frac{3}{2}a+6 \\ \begin{cases} b \geq \frac{19}{2}a+\frac{35}{4} \\ \left[\begin{array}{l} b \notin \left[6-\frac{19}{4}; 6-\frac{3}{4}\right] \\ a \notin \left[-\frac{19}{6}; -\frac{1}{2}\right] \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right. \\ b \leq 6+\frac{19}{2}a \\ b \leq 4+\frac{3}{2}a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b \geq \frac{19}{2}a+\frac{35}{4} \\ b \leq 6+\frac{19}{2}a \\ b < 4+\frac{3}{2}a \\ b \notin \left[6-\frac{19}{4}; 6-\frac{3}{4}\right] \\ a \notin \left[-\frac{19}{6}; -\frac{1}{2}\right] \end{cases}$

Ответ: $\begin{cases} b \geq \frac{19}{2}a+\frac{35}{4} \\ b \leq 6+\frac{19}{2}a \\ b < 4+\frac{3}{2}a \\ b \notin \left[6-\frac{19}{4}; 6-\frac{3}{4}\right] \\ a \notin \left[-\frac{19}{6}; -\frac{1}{2}\right] \end{cases}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} \sqrt{3}\cos(x-y) = 7\cos(\frac{2\pi}{3}+y) = 7\sin(\cancel{4}y-\frac{\pi}{6}) = -7\sin(y+\frac{\pi}{6}) \\ \cos(2x-y)+\sqrt{3}\sin(2x-y) = 12\sin(y+\frac{\pi}{6}) \end{cases}$$

$$\sin(2x-y+\frac{\pi}{6}) = 6\sin(y+\frac{\pi}{6})$$

$$\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}y = \frac{\sin x}{\cos x}-\frac{\sin y}{\cos y} = \frac{\sin x\cos y-\sin y\cos x}{\cos x\cos y} = \frac{\sin(x-y)}{\cos x\cos y}$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{7}\cos(x-y) = \frac{\sin(2x-y+\frac{\pi}{6})}{6} = \sin(x-y)\cdot\frac{\sqrt{3}}{12}+\cos(x-y)\cdot\frac{1}{12}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{7} = \operatorname{tg}(x-y)\cdot\frac{\sqrt{3}}{12}+\frac{1}{12}$$

$$\operatorname{tg}(x-y) = \cancel{36}\frac{12}{7}-\sqrt{3}$$

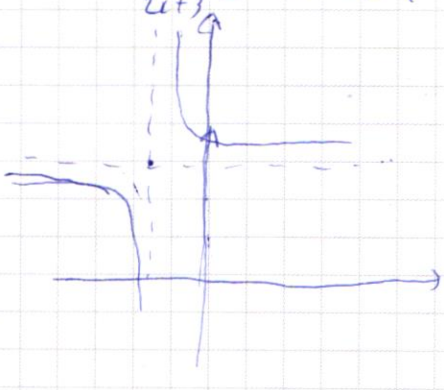
ОДЗ $x^2+13x+\frac{33}{4}\le 0$

$169-33=136=4\cdot 34$

$x\in\left[\frac{-13-2\sqrt{34}}{2};\frac{-13+2\sqrt{34}}{2}\right]$

$$\frac{12x+26}{2x+3}\le ax+b\le 1+\sqrt{-\frac{33}{4}-13x-x^2}$$

$$6+\frac{8}{2x+3}\le ax+b\le 1+\sqrt{\quad}$$



$b>\frac{19}{2}a+\frac{26-6\cdot 19}{16}=$

$=\frac{19}{2}a+\frac{13+3\cdot 19}{8}=$

$=\frac{19}{2}a+\frac{70}{8}$

$$\sqrt{\log_3(1)}\le\log_3(1)$$

$$0\le 0$$

$x\ne 3^{-\frac{2}{3}}$

$x\ne\frac{1}{3}^{-\frac{1}{2}}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

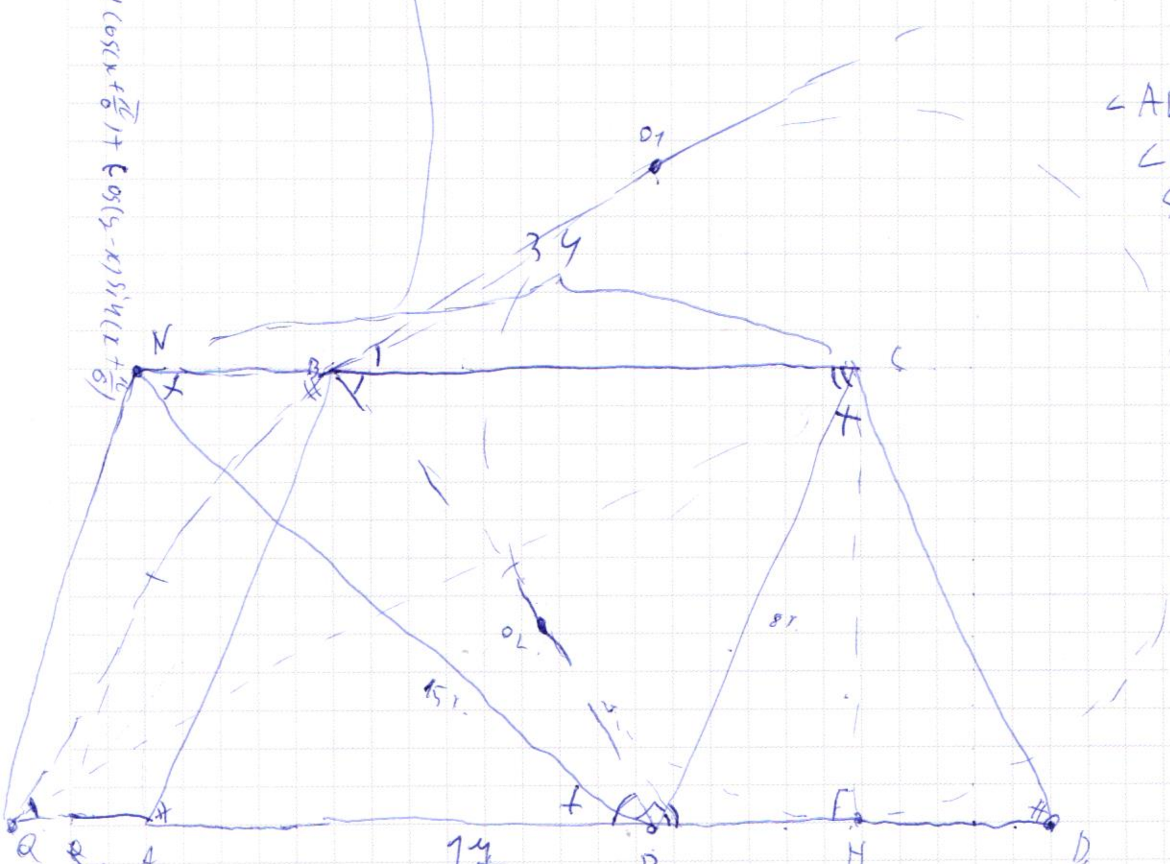
$$\begin{cases} \sqrt{7}\cos(x-y) = 7\cos\left(\frac{2\pi}{3}+y\right) = -7\sin\left(y+\frac{\pi}{6}\right) \\ \sin\left(2x-y+\frac{\pi}{6}\right) = 6\sin\left(y+\frac{\pi}{6}\right) \end{cases}$$

$$-\frac{\sqrt{7}}{7}\cos(x-y) = \frac{1}{6}\sin\left(2x-y+\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{6}\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\cos(x-y) + \frac{1}{6}\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\cdot\sin(x-y)$$

$$\sin(x-y)\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right) + \cos(x-y)\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right) = 6\sin\left(y+\frac{\pi}{6}\right)$$

$$-\frac{\sqrt{7}}{7} = \frac{1}{6}\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{6}\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\cdot tg(x-y)$$

$$-\frac{\sqrt{7}}{7} = \sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$$



$\angle ADC - ?$

$\angle NQC - ?$

$S_{NCDQ} - ?$

$tg\angle NCP = \frac{15}{8}$

$AP = 17$

$NC = 34$

$225x^2 + 64x^2 = 289x^2 = 34^2 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow CP = 16;\ NP = 30$

$\angle B_1BQ = \angle CBO_2$ (BC – бис.) $= \alpha$

$\angle BQP = \angle O_1BC = \alpha;\ \angle CBP = \angle BPA = \alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle BQP = \angle BPQ = \alpha \Rightarrow \triangle QBP$ – равноб.

$DH = PO_2;\ QO_1 = QH$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) $\begin{cases} 13x + \sqrt[3]{169x^2 - y^2} = 92 \\ y + \sqrt[3]{169x^2 - y^2} = -124 \end{cases}$

$13x - y = 92 + 124 = 216$

$y = \cancel{216 - 13x}\ 13x - 216 \Rightarrow$

$\Rightarrow 13x - 216 + \sqrt[3]{169x^2 - 169x^2 + 2\cdot 216\cdot 13x + 216^2} = -124$

$13x - 216$

$\cancel{13x + \sqrt[3]{(13x-216)216}} = -124$

$t + \sqrt[3]{216t} = -124$

$t + 6\sqrt[3]{t} = -124$

$6\sqrt[3]{t} = -124 - t$

$216t = -t^3 - 3\cdot 124t^2 - 3\cdot 124^2 t - 124^3$

$t^3 + 3\cdot 124t^2 + (3\cdot 124^2 + 216)t + 124^3 = 0$

$13x - y = 216$

$13x = 216 + y$

$216 + y + \sqrt[3]{216^2 + 512y + y^2 - y^2} = 92$

$y + 216 + \sqrt[3]{216(216 + 2y)} = 92$

$f'(t) > 0 \Rightarrow$ функция мон. возр.

$y + 6\sqrt[3]{216 + 2y} = -124$

$y = \cancel{-115}$

$\cancel{-115} + 6\sqrt[3]{\cancel{-14}}$

$y = -112$

$-112 + 6\sqrt[3]{-8} = -112 - 12 = -124$

$y = -112$

$x = \dfrac{216 + y}{13} = \dfrac{104}{13}$

Ответ: $\left(\dfrac{104}{13}; -112\right)$

$f'(y) = 1 + \dfrac{12}{(\sqrt[3]{\ })^2}$

$13\cdot 8 = 80 + 24 = 104$

$\begin{array}{r} 36 \\ \times\ 6 \\ \hline 36 \\ +18 \\ \hline 216 \end{array}$

$3\cdot 124$

$124 \mid 2$, $62 \mid 2$, 31

$13\cdot 8 = 104$

$-112 + \sqrt[3]{104^2 - 112^2} =$

$-(104+112)(112-104) =$

$= -8(216) = -1728$

$\begin{array}{r} 144 \\ \times\ 12 \\ \hline 288 \\ 144 \\ \hline 1728 \end{array}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$\sqrt{\log_{3x^2} x^9} \le \log_{9x^3} \frac{1}{x^3}$ (7) ОДЗ: $x>0$; $x \ne \frac{1}{\sqrt{3}}$; $\frac{1}{\sqrt[3]{9}}$; $x \ne 1$

$3\sqrt{\log_{3x^2} x} \le 3\log_{9x^3} \frac{1}{x}$

$\sqrt{\log_{3x^2} x} \le \log_{9x^3} x$. $\log_{3x^2} x = \frac{\log_x x}{\log_x 3x^2} = \frac{1}{\log_x 3x^2}$

$\sqrt{\log_x 3x^2} \le \log_x 9x^3$

$\sqrt{2+\log_x 3} \le 2\log_x 3 + 3$

$\sqrt{2+t} \le 2t+3$ $2t+3 \ge 0$. $t \ge -\frac{3}{2}$ $t > -\frac{3}{2}$ $\Rightarrow t > -\frac{6}{4}$

$2+t \le 4t^2+12t+9$

$4t^2+11t+7 \ge 0$ $t \in (-\infty; -\frac{7}{4}] \cup [-1; +\infty) \Rightarrow$

$t=-1; -\frac{7}{4} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\log_x 3 \le -\frac{7}{3} \\ \log_x 3 \ge -1\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x^{-\frac{7}{3}} \le 3 \\ x^{-1} = 3\end{array}\right.$ $\Rightarrow t \in [$ $t \ge -1$ x $\frac{1}{3}$

12828.

$1 \downarrow$ 2

$10^5; 10^4; 10^3$ $10^4 \cdot 10^3 \cdot 10^2$.

$\log_x 3 \ge -1 \Leftrightarrow \log_x 3 - \log_x(\frac{1}{x}) \ge 0$

$(x-1)(3-\frac{1}{x}) \ge 0 \Rightarrow$ 0 $\frac{1}{3}$ 1

$x \in (0; \frac{1}{3}] \cup (1; +\infty)$

1) ~~$\overline{abc}$~~ 3 +

$\overline{abcde} + \overline{bcde} + \overline{cde} = 12828$.

$3e = 18 \Rightarrow e = 6$.

$3e \ne 8$

$3d+1 \ne 2$.

$3d+1 \ne 12$.

$3d+1 = 22 \Rightarrow d = 7$.

$3c+2 = 8$.

$c = 2$ $3c+2 \ne 18$ $3c+2 \ne 28$

$2b \ne 2 \Rightarrow b = 1$.

$a = 1$.

только:

$x6112\,7\,6$.

$9 \cdot 10 = 90$ вар.

2) $\overline{abcd} + \overline{bcd} + \overline{cd} = 12828$.

$d = 6$.

$c = 7$

$b = 8$

$a = 6$.

~~$9876 + 876 + 76 = 828$~~

$9999 + 999 + 99 =$

$= 11100 - 3 = 11097$

$\sqrt[4]{81}$; $\sqrt[3]{9}$

81^3; 9^4.

9^6; 9^4.

$x \in (3^{\frac{4}{7}}; 1)$

$x \in (0;$

$3 \ge x^{\frac{7}{4}}$

$3^4 \ge x^7$

$3^{\frac{4}{7}} \ge x \ge 0$

$3^{\frac{4}{7}}$ 1.

$3 = x^{-\frac{7}{4}}$

$3 = \frac{1}{x^{\frac{7}{4}}} \Rightarrow$

$\Rightarrow x^{\frac{7}{4}} = \frac{1}{3}$

$x = (\frac{1}{3})^{\frac{4}{7}}$

$x = 3^{-\frac{4}{7}}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$6+\frac{8}{2x+3} \le ax+b$

$ax+b \le 1+\sqrt{-\frac{33}{4}-13x-x^2}$

$-x^2-13x-\frac{33}{4}$

$D=169-33=136=4\cdot 34$

$x=\frac{-13\pm 2\sqrt{34}}{2}$

$\frac{-13+10}{2}=-\frac{3}{2}$

$\frac{39}{2}-\frac{33+9}{4}$

$\frac{19\cdot 26}{4}-\frac{19\cdot 19}{4}=\frac{7\cdot 19}{4}$

$\frac{33}{4}$

мин. значение при $x=-\frac{19}{2};-\frac{3}{2}$

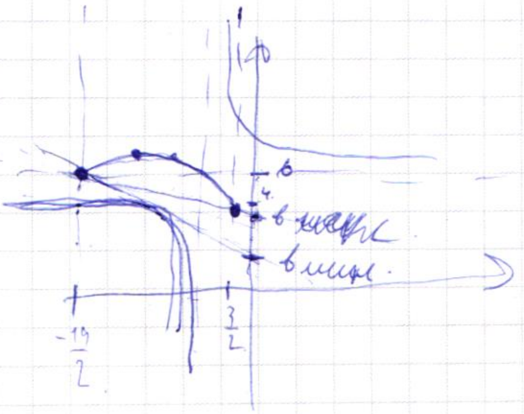
$x_0=\frac{13}{-2}=-\frac{13}{2}$

$\begin{cases} ax+b \le 1+\sqrt{\frac{13\cdot 19}{2}-\frac{33}{4}-\frac{19^2}{4}} \\ ax+b \le 1+\sqrt{\frac{13\cdot 3}{2}-\frac{33}{4}-\frac{9}{4}} = 1+\sqrt{\frac{39}{2}-\frac{21}{2}} = 1+\sqrt{\frac{18}{2}} = 4 \end{cases}$

$ax+b \le 4$

$1+\sqrt{\frac{26\cdot 19}{4}-\frac{19\cdot 19}{4}-\frac{33}{4}} = \sqrt{\frac{7\cdot 19}{4}-\frac{33}{4}}+1 =$

$=\sqrt{\frac{100}{4}}+1=5+1=6$



$1+\sqrt{\frac{13\cdot 13}{8}-\frac{13^2}{4}-\frac{33}{4}} = \sqrt{\frac{169}{8}-\frac{66}{8}} =$

$=\sqrt{\frac{103}{8}}+1$

$\boxed{-\frac{22}{5}}$

$y=ax+b$ $\begin{cases} 6=4a+b \Rightarrow b=6-4a, \\ 6+\frac{8}{2x+3}=ax+b-1 \text{ реш.} \end{cases} \Rightarrow b=\frac{19}{2}a+6$

$b=-\frac{19}{2}a+6$

$\begin{cases} -\frac{19}{2}a+b=6 \\ -\frac{3}{2}a+b=4 \end{cases}$

$-8a=2$

$a=-\frac{1}{4}$

$b=6-\frac{19}{8}=4\frac{3}{8}$ – макс.

$\Rightarrow \frac{8}{2x+3}=ax-4a \Rightarrow 8=2ax^2+3x-8ax-12a$

$2ax^2+(8a-3)+12a+8=0$

$D=64a^2-48a+9+96a^2+64a=0$

$160a^2+16a+9=0$

$D=256-280\cdot 9<0$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$6 + \frac{8}{2x+3} = ax+b$ — 1 реш.

$\frac{1}{2x+3} = \frac{ax+b-6}{8}$

$2x+3 =$

$12x+18+8 = 2ax^2+3ax+2bx+3b$

$2ax^2 + (3a+2b-12)x - 26 + 3b = 0.$

$D = 0 = (3a+2b-12)^2 - 24ab + 8 \cdot 26a.$

$9a^2+4b^2+144+12ab-72a-48b-24ab+8\cdot 26a =$

$= 9a^2+4b^2+144-12ab+72a-48b =$

$= (2b-3a-12)^2.$

$b = \frac{3}{2}a+6$, a мин.

b макс $= 6+\frac{3}{4}$;

$a \in (\quad ; -\frac{1}{4})$

b мин $\Rightarrow \begin{cases} b = \frac{3}{2}a+6 \\ -\frac{19}{2}a+b=6 \end{cases} \Rightarrow \frac{19}{2}a = \frac{3}{2}a$

$a=0;\ b=6.$

$\sqrt{3}\cos(x-y) = 7\cos(\frac{2\pi}{3}+y) = 7\cos(y+\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}) = -7\sin(y+\frac{\pi}{6}).$

$\cos(2x-y)+\sqrt{3}(2x-y) = 12\sin(y+\frac{\pi}{6})$

$\sin(2x-y+\frac{\pi}{6}) = 6\sin(y+\frac{\pi}{6}).$

$\sqrt{3}\cos x\cos y + \sqrt{3}\sin x \sin y = -\frac{7}{2}\sin y - \frac{7\sqrt{3}}{2}\cdot\cos y.$

$3\cos y + 3\sqrt{3}\sin y =$

$\begin{cases} \sqrt{3}\cos(x-y) = -7\sin(y+\frac{\pi}{6}) \\ \sin(x-y) + \cos(x-y)\cdot\sin(x+\frac{\pi}{6}) = 6\sin(y+\frac{\pi}{6}) \end{cases}$

$\cos(y+\frac{\pi}{6})$

$a\cos(x-y) = b\sin(x-y)\cos(x+\frac{\pi}{6}) + b\cos(x-y)\sin(x+\frac{\pi}{6}).$

$\cos(x-y)(a - b\sin(x+\frac{\pi}{6})) = b\sin(x-y)\cos(x+\frac{\pi}{6}).$

$\sin(2x-y+\frac{\pi}{6}) = 6\sin(y+\frac{\pi}{6})$

$x = \frac{3a+2b-12+2b-3a-12}{2}$

$= 2b-12.$

$x =$

$\operatorname{tg}x - \operatorname{tg}y = \frac{\sin x\cos y - \sin y\cdot\cos x}{\cos x\cos y} = \left(\frac{\sin(x-y)}{\frac{1}{2}(\cos(x+y)-\cos(x-y))}\right)$

$-\frac{6+7a+26}{-26}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)