МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР ______________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}; \qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y = \sqrt{xy-x-2y+2}, \\ x^2+9y^2-4x-18y = 12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geqslant \left|x^2+18x\right|^{\log_{12} 13} - 18x.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = 8$, $BD = 17$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a)+f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 24$, $1 \leqslant y \leqslant 24$ и $f(x/y) < 0$.

$-\frac{13}{4}$

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$g(-\frac{1}{2}) = 5$ $\qquad$ $g(-\frac{1}{4}) = \frac{8}{2} = 4$

$g(-\frac{11}{4}) = \frac{11}{4}$

$$\frac{12x+11}{4x+3} \leqslant ax+b \leqslant -8x^2-30x-17$$

$\frac{11}{4} < 5 > 4$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}\right)$.

$-\frac{11}{4}$ $\quad -\frac{1}{2}$ $\quad -\frac{1}{4}$

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB = 1$, $BD = 2$, $CD = 3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. $\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5} \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{4}{5} \end{cases}$ $\quad tg\,\alpha = ?$

$tg\,\alpha$ - определён $\Rightarrow$
$\Rightarrow \cos\alpha \neq 0$

$\Updownarrow$

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$

$2\sin\frac{4\alpha+4\beta}{2}\cdot\cos\frac{4\beta}{2} = -\frac{4}{5}$

$\Downarrow$

$-\frac{1}{\sqrt5}\cdot\cos 2\beta = -\frac{2}{5}$

$\cos 2\beta = \frac{2}{\sqrt5} \Rightarrow \sin 2\beta = \pm\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \sin 2\beta\cdot\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin 2\alpha\cdot\frac{2}{\sqrt5} + \left(\pm\frac{1}{\sqrt5}\right)\cdot\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5} \quad |\cdot\sqrt5$

1) $\sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt5}$: $\quad 2\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1$

$4\sin\alpha\cdot\cos\alpha + 2\cos^2\alpha - 1 = -1$

$4\sin\alpha\cdot\cos\alpha = -2\cos^2\alpha \quad |:\cos^2\alpha \neq 0$

$4\,tg\,\alpha = -2$

$\boxed{tg\,\alpha = -\frac{1}{2}}$

2) $\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt5}$: $\quad 2\sin 2\alpha - \cos 2\alpha = -1$

$4\sin\alpha\cdot\cos\alpha - 2\cos^2\alpha + 1 = -1 \quad |:2$

$2\sin\alpha\cdot\cos\alpha - \cos^2\alpha + 1 = 0 \quad |:\cos^2\alpha \neq 0$

$\frac{1}{\cos^2\alpha} = tg^2\alpha + 1$

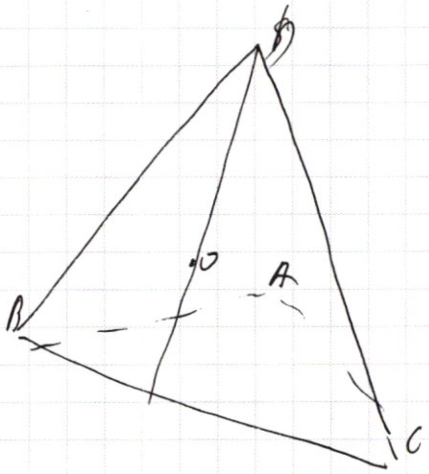
$2\,tg\,\alpha - 1 + tg^2\alpha + 1 = 0$

$tg^2\alpha = -2\,tg\,\alpha$

$\left[\begin{array}{l} tg\,\alpha = 0 \\ tg\,\alpha = -2 \end{array}\right.$

~~Ответ.~~

Ответ: $-\frac{1}{2}; 0; -2$



☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2. $\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases}$

огр. на x, y: $x-2y\geq 0$, $x\geq 2y$

$\begin{cases} x-2y=\sqrt{(x-2)(y-1)} \\ (x-2)^2+9(y-1)^2=25 \end{cases}$

замена: $(x-2)=a$, $(y-1)=b$ $\Rightarrow$ $x-2y=a-2b$, $ab\geq 0$

Ответ: $(6;3)$, $(2-\sqrt{\frac{5}{2}};1-\sqrt{\frac{5}{2}})$

$\begin{cases} a-2b=\sqrt{ab} \\ a^2+9b^2=25 \end{cases}$

$\Downarrow$

$\begin{cases} a^2-4ab+4b^2=ab \\ a^2+9b^2=25 \end{cases}$

$\cancel{a^2+4b^2=5ab}$

$\Downarrow$

$\begin{cases} (a-b)(a-4b)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a=b \\ a=4b \end{array}\right. \\ a^2+9b^2=25 \end{cases}$

1) $a=b$: $a^2+9a^2=25$

$10a^2=25$

$a^2=\frac{5}{2}$

$\begin{cases} a=\pm\sqrt{\frac{5}{2}} \\ b=\pm\sqrt{\frac{5}{2}} \end{cases}$, т.к. $ab\geq 0$ $\Rightarrow \begin{cases} x-2=\pm\sqrt{\frac{5}{2}} \\ y-1=\pm\sqrt{\frac{5}{2}} \end{cases}$

$\Downarrow$

$\begin{cases} x=2\pm\sqrt{\frac{5}{2}} \\ y=1\pm\sqrt{\frac{5}{2}} \end{cases}$

$\Downarrow$

$x-2y=2\pm\sqrt{\frac{5}{2}}-2\mp 2\sqrt{\frac{5}{2}}=\left[\begin{array}{l} -\sqrt{\frac{5}{2}}<0 \\ \sqrt{\frac{5}{2}}>0 \end{array}\right. \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x=2-\sqrt{\frac{5}{2}} \\ y=1-\sqrt{\frac{5}{2}} \end{cases}$

2) $a=4b$:

$16b^2+9b^2=25$

$b^2=1$

$b=\pm 1$ $\Rightarrow \begin{cases} x-2=\pm 4 \Rightarrow x=2\pm 4 \\ y-1=\pm 1 \Rightarrow y=1\pm 1 \end{cases}$

$\Downarrow$

$a=\pm 4$

$x-2y=2\pm 4-2\mp 1=\left[\begin{array}{l} 3>0 \\ -3<0 \end{array}\right. \Rightarrow$

$\Rightarrow x=6;\ y=3$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

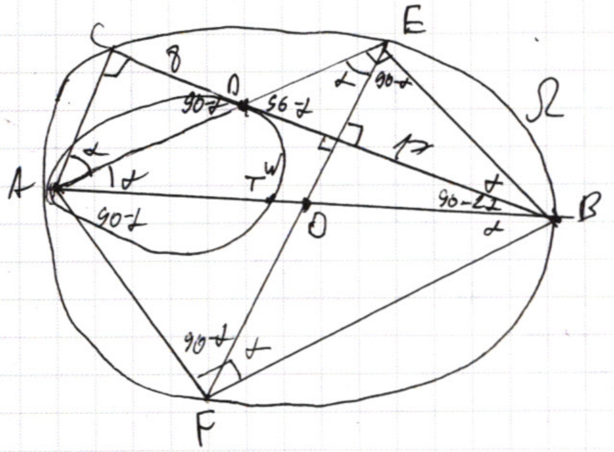
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4.



1) CB - кас. к $\omega \Rightarrow$

$\Rightarrow AD$ - бисс. $\angle CAD$

(Лемма Архимеда)

$\Downarrow$

если $AC = 8x \Rightarrow AB = 17x$

по Т. Пифагора $\triangle ABC$:

$AC^2 + BC^2 = AB^2$

$64x^2 + 625 = 289x^2$

$625 = 225x^2$

$25 = 9x^2$

$x = \frac{5}{3} \Rightarrow AB = \frac{85}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow \underset{(\text{окр } \Omega)}{R_1} = \boxed{\frac{85}{6}} = \frac{AB}{2}$

2) центры окр. ω и Ω лежат на одной прямой с т. $A \Rightarrow$

$\Rightarrow AT$ - диаметр

$BD^2 = BT \cdot AB$

(теорема о секущей и кас.)

$\Downarrow$

$17^2 = BT \cdot \frac{17 \cdot 5}{3}$

$BT = \frac{3 \cdot 17}{5} = \frac{51}{5} \Rightarrow AT = AB - BT = \frac{85}{3} - \frac{51}{5} = \frac{17 \cdot 25 - 9 \cdot 17}{15} =$

$= \frac{16 \cdot 17}{15} \Rightarrow \frac{AT}{2} = \underset{(\text{радиус окр } \omega)}{R_2} = \frac{17 \cdot 8}{15} = \boxed{\frac{136}{15}}$

3) если $\angle CAD = \alpha$, то $\angle CDA = 90 - \alpha \underset{(\text{верт.})}{=} \angle EDB \underset{(\text{высота из прямого угла})}{=} \angle FEB \underset{(\text{опир. на } FB)}{=} \angle FAB \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle FAB + \angle EAB = 90 - \alpha + \alpha = 90° \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle FAE = \angle AEB = \angle AFB = 90° \Rightarrow AEFB$ - прямоугольник $\Rightarrow$

(опир. на диаметр) $\Downarrow$

$S_{\triangle AFE} = \frac{1}{2} S_{AFEB}$

$\Rightarrow \angle AFE = \angle FAB = 90 - \alpha$

($2\alpha < 90°$, т.к. в прям. $\triangle$-ке)

4) по Т. синусов:

$\frac{BC}{\sin \angle CAB} = AB \quad \frac{25}{\sin 2\alpha} = \frac{85}{3} \Rightarrow \frac{5}{\sin 2\alpha} = \frac{17}{3} \Rightarrow \sin 2\alpha = \frac{15}{17} \Rightarrow \cos 2\alpha = \frac{8}{17}$

$\Downarrow$

$2\cos^2\alpha - 1 = \frac{64}{289} \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{353}{578} \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos\alpha = \sqrt{\frac{353}{578}} \Rightarrow \boxed{\alpha = \arccos\sqrt{\frac{353}{578}}} \Rightarrow$

$(\alpha < 90)$

~~$\Rightarrow \sin(90 - \alpha) = \frac{8}{17} \Rightarrow \angle AFE = \arccos\frac{8}{17}$~~

☐ черновик ☒ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

б)

$$S_{ABEF} = \frac{AB \cdot EF \cdot \sin\angle EOA}{2}$$

ABEF – прямоугольник $\Rightarrow AB = EF$

$$S_{ABEF} = \frac{AB^2 \cdot \sin 2\varphi}{2} = \frac{\frac{85}{3}\cdot\frac{85}{3}\cdot\frac{15}{17}}{2} = \frac{75\cdot 85}{18} =$$

$$= \frac{25\cdot 85}{6}$$

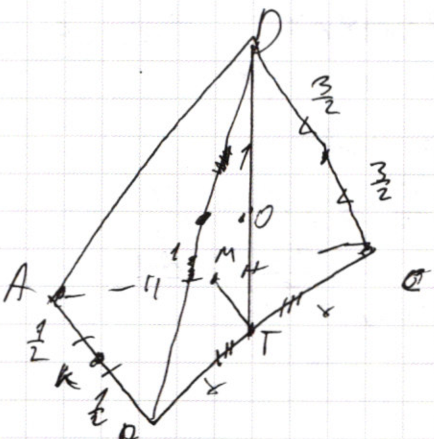
$$S_{AEF} = \frac{1}{2}S_{ABEF} = \frac{1}{2}\cdot\frac{25\cdot 85}{6} = \frac{25\cdot 85}{12} = \frac{2125}{12}$$

Ответ: радиусы $= \frac{85}{6}$; $\frac{136}{15}$

$\angle AFE = 90° - \arccos\sqrt{\frac{363}{578}}$

$S_{AEF} = \frac{2125}{12}$

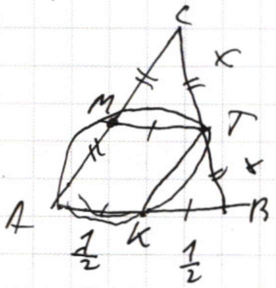
7.



O – центр сферы

K, M и T – середины AB, AC и BC соответственно.

рассмотрим пл. ABC:



~~MT || AK~~

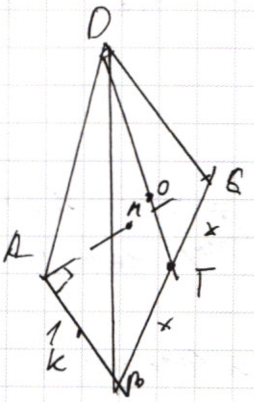
$CM = MA$
$CT = TB$ $\Rightarrow$ MT – ср. линия
$\Downarrow$

$\begin{cases} MT \parallel AK \\ MT = \frac{1}{2}AB = AK \end{cases}$

$\Downarrow$

$\begin{cases} MTKA \text{ – параллелограмм} \\ MTKA \text{ – вписанный} \end{cases}$

$\Downarrow$

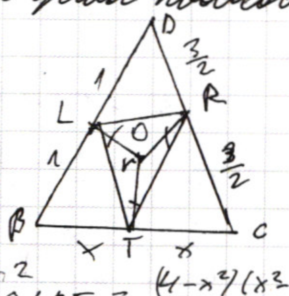


т.к. $\begin{cases} \angle MAK + \angle AMT = 180° \\ \angle MAK + \angle MTK = 180° \\ \angle AMT + \angle MTK = 180° \end{cases}$

все углы $= 90°$

MTKA – прямоугольник $\Rightarrow \angle A = 90° \Rightarrow O \in$ плоскости BCD и O лежит на DT

рассмотрим плоскость BDC:



O – центр окр. около $\triangle LRT$: $S^2_{\triangle LRT} = \frac{1}{16}S^2_{BDC}$

$LT = \frac{3}{2}$
$RT = 1$ (ср. линии)
$LR = x$

$S^2_{\triangle LRT} = \frac{(2+x)\cdot(x-1)\cdot x\cdot(2-x)}{16}$ (ф-ла Герона)

$S^2_{\triangle LRT} = \frac{(LT\cdot RT\cdot LR)^2}{16r^2}$

$S^2_{\triangle LRT} = \frac{(4-x^2)(x^2-1)}{16} = \frac{-x^4+5x^2-4}{16} = \frac{\frac{9}{4}x^2}{16r^2}$

☐ черновик ☒ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5. $f(ab) = f(a) + f(b)$ $\quad f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$

$f(p) = \left[\frac{p}{4}\right]$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) < 0$

заметим, что $f(0 \cdot 0) = f(0) + f(0)$

$f(0) = 2f(0)$

$f(0) = 0$

$f(k \cdot 0) = f(0) + f(k)$

где k - рац. число и k не явл. простым числом

$f(0) = f(0) + f(k) \Rightarrow f(k) = 0$

для любого k числа, где k не явл. простым, то $f(k) = 0$

если k - простое, то

$f(k) = \left[\frac{k}{4}\right] \geq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ для любого рац. k $f(k) \geq 0 \Rightarrow$

$f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) < 0$

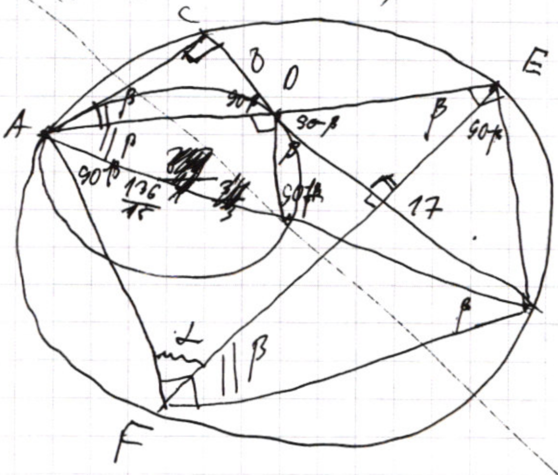
$\Rightarrow f(x) \geq 0$, $f\left(\frac{1}{y}\right) \geq 0 \Rightarrow f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) \geq 0$

$f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$ не может быть меньше 0.

Ответ: 0

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

4. (продолжение)



$\angle = ?$

1) $\angle CAD = \beta$

$\Downarrow$

$\angle CDA = 90 - \beta$ (высота в прям. Δке)

$\angle EDB = 90 - \beta \Rightarrow \angle FED = 90 - \beta$

$\Downarrow$

$\angle FAB = 90 - \beta$ (опир. на FB)

$\angle EFB = \angle EAB = \beta$

$\begin{cases} \angle BAE + \angle BAF = \beta + 90 - \beta = 90^\circ \\ \angle AFB = 90^\circ ; \angle AEB = 90^\circ \\ (AB - \text{диаметр}) \end{cases}$

$\Downarrow$

AEFB - прямоугольник

~~$\angle FB = 90 \Rightarrow$~~

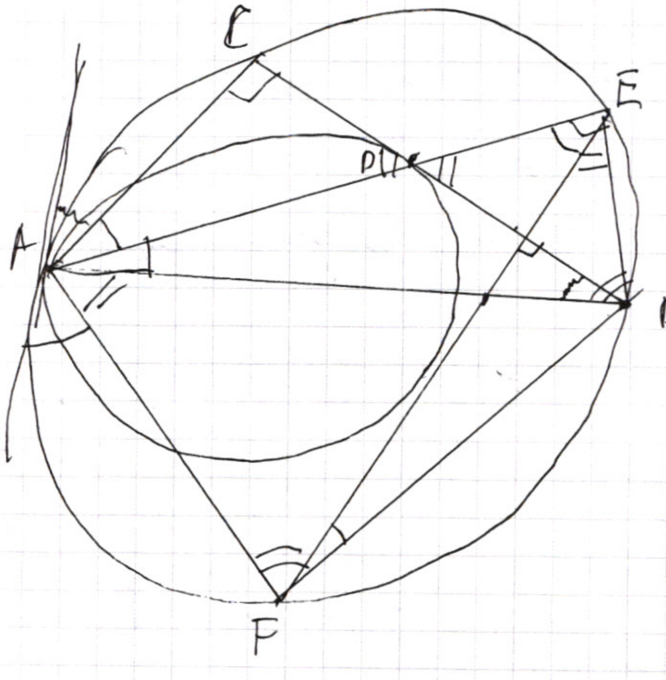
FE - диаметр ($\angle FAE = 90^\circ$)

$\Downarrow$

FE = AB

$\Downarrow$

~~AFEB - квадрат (т.к.~~



☒ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

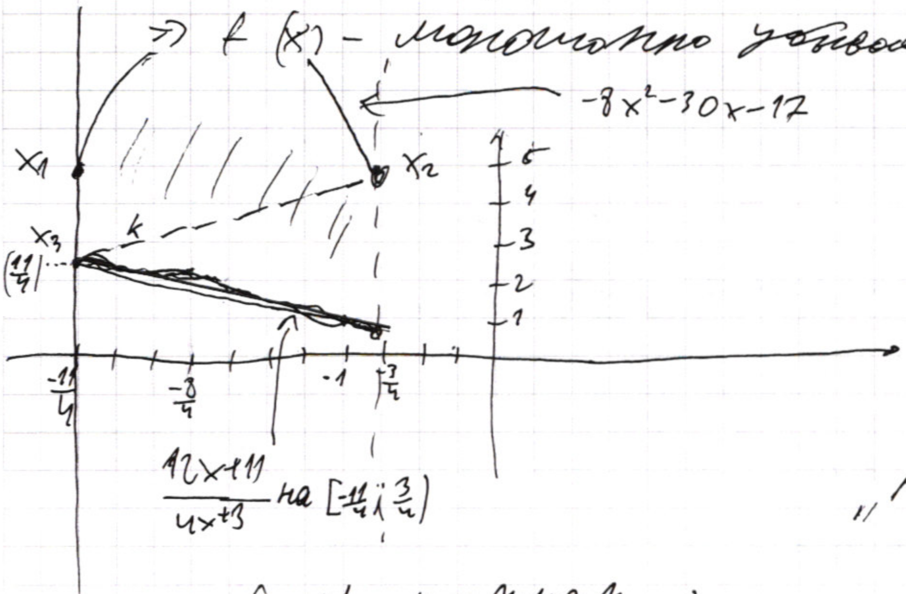
6

$$\frac{12x+11}{4x+3} \le ax+b \le -8x^2-30x-17 \qquad x \in \left[-\frac{11}{4}; \frac{3}{4}\right)$$

$$f(x) = \frac{12x+11}{4x+3}$$

$$f'(x) = \frac{12\cdot(4x+3) - 4(12x+11)}{(4x+3)^2} = \frac{48x+36-48x-44}{(4x+3)^2} = \frac{-8}{(4x+3)^2} < 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow f(x)$ – монотонно убывает



$g(x) = -8x^2-30x-17$

верш $\left(-\frac{15}{8}; \frac{85}{8}\right)$

~~$g(...)= ...$~~

$g\left(-\frac{3}{4}\right) = 5$

$g\left(-\frac{11}{4}\right) = 5$

"////" – подходящая зона

$ax+b$ – прямая

1) $a \ge 0$: $b \ge \frac{11}{4}$ – выше x_3

$b \le 5$ – ниже x_1

$a \in \left[0; \frac{2}{5}\right)$ – min x_2 для всех x

прямая k проходит через $\left(-\frac{11}{4}; \frac{11}{4}\right)$ и $\left(\frac{3}{4}; 5\right)$

$\Downarrow$

прямая k имеет вид

$$\frac{x-x_1}{x_1-x_2} = \frac{y-y_1}{y_1-y_2}$$

$$\frac{x+\frac{11}{4}}{-\frac{11}{4}+\frac{3}{4}} = \frac{y-\frac{11}{4}}{\frac{11}{4}-5}$$

$$\frac{4x+11}{4}\cdot\frac{4}{-8} = \frac{4y-11}{4}\cdot -2$$

$$4x+11 = (4y-11)\cdot\frac{9}{2}$$

$$\frac{8x+22}{9} = 4y-11$$

$$\frac{8x+121}{36} = y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{2}{9}x + \frac{121}{36}$$

2) $a<0$: ~~...~~

$b \in (0; 5]$ ~~...~~

$a \in \left(-\frac{11}{4}; 0\right)$

Ответ: $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a \in \left[0; \frac{2}{5}\right) \\ b \in \left[\frac{11}{4}; 5\right] \end{cases} \\ \begin{cases} a \in \left[-\frac{11}{4}; 0\right) \\ b \in (1; 5] \end{cases} \end{array}\right.$

3. $$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2+18x \ge |x^2+18x|^{\log_{12}13}$$

ОДЗ: $x^2+18x>0 \Rightarrow x(x+18)>0$

$x\in(-\infty;-18)\cup(0;+\infty)$

замена: $x^2+18x=a$

$$5^{\log_{12}a}+a \ge a^{\log_{12}13}$$

$$13^{\log_{12}a}-5^{\log_{12}a}\le a$$

$$\log_{12}a=t \Rightarrow a=12^t$$

$$13^t-5^t\le 12^t$$

$$f(t)=13^t-12^t-5^t\le 0$$

$$f'(t)=13^t\cdot\ln 13-12^t\cdot\ln 12-5^t\cdot\ln 5\ \cancel{<0} > 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow f(t)$ – монотонно возр. ф-ция

$f(2)=0$

$\Downarrow$

$t\in(-\infty;2]$

$\Downarrow$

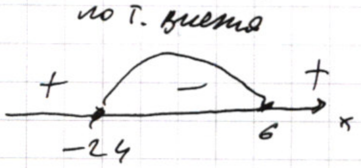
$\log_{12}a\le 2$

$a\le 144$

$x^2+18x-144\le 0$

$(x+24)(x-6)\le 0$

по т. Виета



$x\in[24;6]$

$x\in(-\infty;-18)\cup(0;+\infty)$

Ответ: $[-24;-18)\cup(0;6]$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3. $5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq (x^2+18x)^{\log_{12}13} - 18x$

ОДЗ: $x^2+18x>0$

$x(x+18)>0$

$x \in (-\infty;-18) \cup (0;+\infty)$

$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2+18x \geq (x^2+18x)^{\log_{12}13}$

$x^2+18x = a > 0$

$5^{\log_{12}a} + a \geq a^{\log_{12}13}$

$\cancel{5^{\log_{12}a} - 13^{\log_{12}a} \geq -a}$

$a^{\log_{12}5} + a \geq a^{\log_{12}13}$

$a^{\log_{12}5}(a^{\log_5 12}+1) \geq a^{\log_{12}13}$

прологарифмируем по основанию a; $a>0$

1) $a>1$: $\log_a(a^{\log_{12}5}\cdot(a^{\log_5 12}+1)) \geq \log_a a^{\log_{12}13}$

$\log_{12}5 + \log_a(a^{\log_5 12}+1) \geq \log_{12}13$

$\log_a(a^{\log_5 12}+1) \geq \log_{12}\frac{13}{5}$

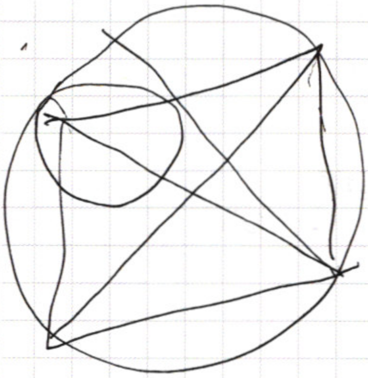
~~[illegible]~~

по методу рационализации:

$(a-12)(a^{\log_5 12}+1-\frac{13}{5}) \geq 0$

$(a-12)(a^{\log_5 12}-\frac{8}{5}) \geq 0$

~~верно, т.к.: $a^{\log_5 12}$ ... $a^{\log_5 12}$~~



☒ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

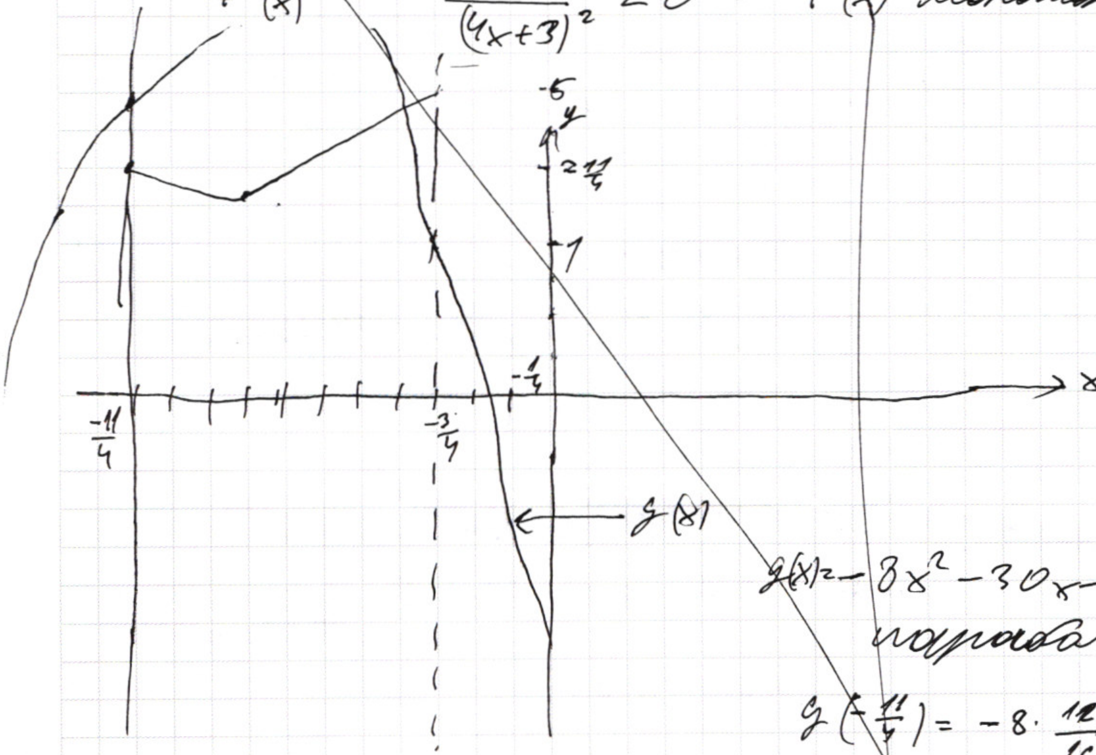
6.

$$\frac{12x+11}{4x+3} \le ax+b \le -8x^2-30x-17 \qquad \forall x \in \left[-\frac{11}{4}; \frac{3}{4}\right)$$

$a, b = ?$

$$f(x) = \frac{12x+11}{4x+3} = 3 + \frac{2}{4x+3}$$

$$f'(x) = -\frac{8}{(4x+3)^2} < 0 \Rightarrow f(x) \text{ — монотонно убывает.}$$



$g(x) = -8x^2-30x-17$ — парабола с верш. $\left(-\frac{15}{8}; \frac{89}{8}\right)$

$g\left(-\frac{11}{4}\right) = -8\cdot\frac{121}{16} + \frac{330}{4} - 17 =$

$= -\frac{242}{4} + \frac{330}{4} - 17 =$

$= \frac{88}{4} - 17 = 22 - 17 = 5$

$g\left(-\frac{3}{4}\right) = -8\cdot\frac{9}{16} + \frac{90}{4} - 17 =$

$= -\frac{18}{4} + \frac{90}{4} - 17 =$

$= \frac{72-68}{4} = 1$

$f(x) = \frac{12x+11}{4x+3}$

$f\left(-\frac{11}{4}\right) = \frac{-22}{-8} = \frac{11}{4}$

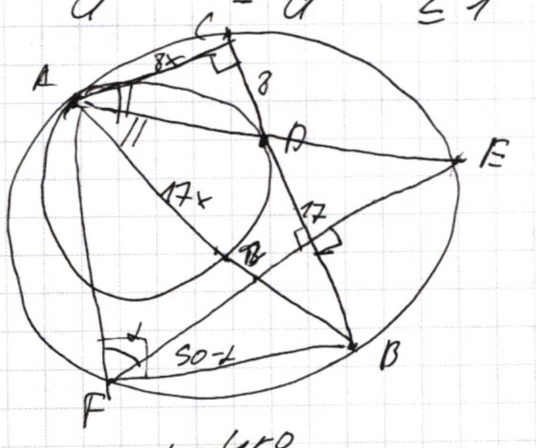
$f(-2) = \frac{-13}{-5} = \frac{13}{5}$

$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{1} = 5$

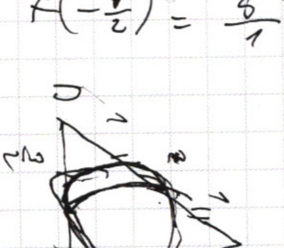
$$b^{\log_{12} a} + a \ge a^{\log_{12} 13} \qquad /:a$$

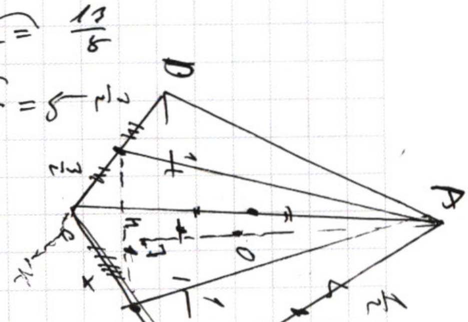
$$a^{\log_{12} 5 - 1} - a^{\log_{12} 13 - 1} \ge -1$$

$$a^{\log_{12}\frac{13}{12}} - a^{\log_{12}\frac{5}{12}} \le 1$$



$\alpha = 45^\circ$





☒ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

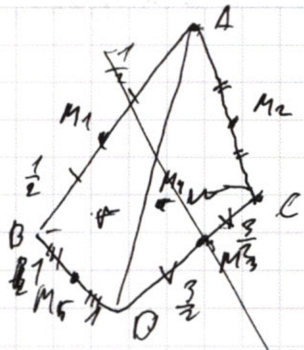
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

7.



$AB=1$ $BC=?$

$BD=2$ $min\ R=?$

$CD=3$

~~по т. о секущих~~

1) пусть M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 - середины рёбер AB, AC, CD, BC, BD соответственно

2) по т. о секущих:

$BM_1 \cdot BA = BM_4 \cdot CB$

$\Downarrow$

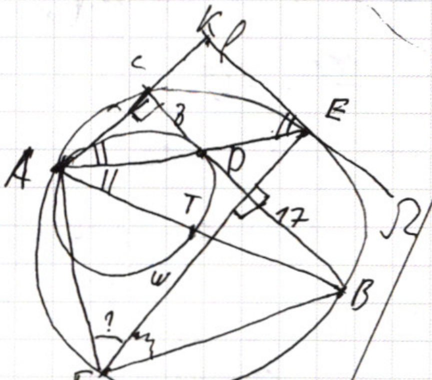
$\frac{1}{2}AB \cdot AB = \frac{1}{2}BC \cdot BC$

$\Downarrow$

$AB=BC \Rightarrow BC=1$

Ответ: 1

7.



1) проведём прямую l так, что она касается Ω и $l \parallel BC$. Тогда она будет касаться Ω в т. F, т.к. т. F и D гомотетичны $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle CAE = \angle AEK$ (угол между хордой и кас.)

~~$\angle AFE = x$~~

$\angle AEK = \angle EAB$ (накрест. леж.) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle CAE = \angle EAB \Rightarrow AD$ - бисс. угла ($\angle CAD$)

~~2) $\angle AFE$~~

2) центры окр. ω, Ω лежат на 1 прямой с т. $A \Rightarrow AT$ - диаметр ω

3) если $AC = 8x$, $AB = 17x \Rightarrow$

$\Rightarrow$ по т. Пифагора: $64x^2 + 825 = 289x^2 \Rightarrow$ (AC^2) ($BC)^2$ AB^2

$\Rightarrow 225x^2 = 825 \Rightarrow$ ~~...~~ $\Rightarrow$ ~~...~~ $\Rightarrow x^2 = \frac{25}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{5}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{AB = \frac{85}{3}}$

~~4) по т. о сек. и кас.:~~

~~$BT \cdot AB = ...$~~

~~$(AB - AT) \cdot 17 = 17^2$~~

$\boxed{R_1 = \frac{85}{6}}$

4) по т. о секущих и кас.:

$BT \cdot AB = BD^2$

$(\frac{85}{3} - AT) \frac{85}{3} = 17^2$

$\frac{17^2 \cdot 25}{3} - \frac{85 AT}{3} = 17 \mid \cdot \frac{9}{17}$

$17 \cdot 25 - 15AT = 9 \cdot 17$

$16 \cdot 17 = AT \cdot 15$

$\Downarrow$

$AT = \frac{16 \cdot 17}{15}$

$\Downarrow$

~~$R_2 = \frac{85}{16}$~~ ~~$= \frac{17}{3}$~~

$R_2 = \frac{136}{15}$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$12 \cdot 12$

$-24+6$

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$-\frac{8 \cdot 121}{\cancel{16}2} + \frac{15 \cdot 11}{2} - 17 =$

$2\sin\frac{2\alpha+4\beta+2\alpha}{2} \cdot \sin\frac{4\beta}{2} = -\frac{4 \cdot 2}{5}$

$= \frac{4^2 \cdot 11}{2} - 17 = 5$

$\sin(2\alpha+2\beta) \cdot \sin 2\beta = -\frac{2}{5}$

$\sin 2\beta =$

6^{10}

$\frac{1}{\cos^2\alpha} = tg^2\alpha + 1$

$a^2 - 5ab + 4b^2 = 0$

$(a-b)(a-4b) = 0$

$2 \pm \sqrt{\frac{5}{2}} \quad -2 \mp \sqrt{\frac{5}{2}}$

$\frac{-11{,}5+11}{-0{,}5} = \frac{-0{,}5}{}$

$(x-2)^2 + 5(y-1)^2 = 25$

$x - 2y = \sqrt{(x-2)(y-1)}$

$x-2=4$

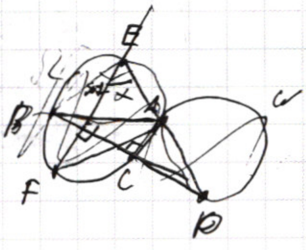
$y-1=6$

$a^2 + (3b)^2 = 5^2$

$a - 2b = x - 2y - 2 + 2 = 8 - 6$

$2-\sqrt{\frac{5}{2}}$

$a - 2b = \sqrt{ab}$



$\angle AFE = ?$

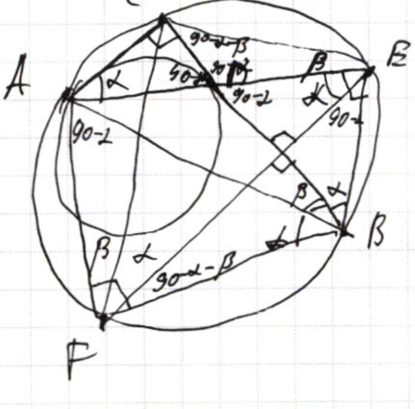
$S_{AEF} = ?$

$CD = 8$

$DD = 12$

$a^2 - 4ab + 4b^2 = ab$

$a^2 - 5ab + 4b^2 = 0$



$DC \cdot BD = DA \cdot DE$

$a^{\log_{12} 5} + a \geq a^{\log_{12} 13}$

$a^{\log_{12} 5}\left(1 + a^{\log_5 12} - a^{\log_{12}\frac{13}{5}}\right) \geq 0$

$a^{\log_{12} 5}\left(1 + a^{\log_5 12}\right) \geq a^{\log_{12} 13}$

$\log_{12} 5 + \log_a\left(1 + a^{\log_5 12}\right) \geq \log_{12} 13$

☒ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$0 + \frac{1}{2}$

$f(\frac{1}{2}) = f(1)$

$f(0) = 2f(0)$

$f(0) = 0$

$f(t) = f(0) + f(x) \Rightarrow$

$8x^2 + 30x + 17 = 0 \Rightarrow f(x) = 0$

$8x^2 + 30x + 17$

$2 - 15 + 13$

$\frac{12x+11}{4x+3} = 3 - \frac{2}{4x+3} \le ax + b$

$f(x) = -\frac{2}{4x+3}$

$f' = \frac{8}{(4x+3)^2} > 0$

$y = -x^2 + 2$

$y \ge -4 + 2$

$= 89$

$-8 \cdot \frac{225}{8} + \frac{2 \cdot 225}{8} - 17 =$

$\frac{136}{28} +$

$-\frac{8 \cdot 121}{2 \cdot 16} + \frac{15 \cdot 11}{4} = 11$

$= \frac{225}{8} - 17 =$

$= \frac{89}{8}$

$g(-\frac{11}{4}) = \frac{-33+11}{-8} = \frac{11}{4}$

$g(\frac{3}{4}) = \frac{9 \cdot 8}{16} + \frac{45}{2} - 17 = 26 - 17$

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(p) = [\frac{p}{4}]$

$(-2;1)$

$\frac{25 \cdot 25}{15 \cdot 16} = \frac{25 \cdot 25}{25 \cdot 5}$

$a^{\log_{12} 5} + a \ge a^{\log_{12} 18} \;\Big|\; : a^{\log_{12} 13} \Rightarrow$

$a^{\log_{12}\frac{5}{13}} + a^{\log_{12}\frac{12}{13}} \ge 1$

$t +$

$a^{\log_{12} 13} - a - a^{\log_{12} 5} \ge 0$

$a^{\log_{12} 13} \cdot \ln(\log_{12} 13) - 1 - a^{\log_{12} 5} \cdot \ln \log_{12} 5 \ge 0$

$f(x/y) = f(x) + f(\frac{1}{y}) < 0$

$[\frac{x}{4}] + [\frac{1}{4y}] < 0$

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)