МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}; \qquad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3y - 2x = \sqrt{3xy - 2x - 3y + 2}, \\ 3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 4. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geqslant |x^2 + 6x|^{\log_4 5} - x^2.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = \frac{5}{2}$, $BD = \frac{13}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $3 \leqslant x \leqslant 27$, $3 \leqslant y \leqslant 27$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{4x-3}{2x-2} \geqslant ax + b \geqslant 8x^2 - 34x + 30$$

выполнено для всех x на промежутке $(1; 3]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $PQRS$, вершина P которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра PQ. Известно, что $QR = 2$, $QS = 1$, $PS = \sqrt{2}$. Найдите длину ребра RS. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

Найти $tg\,\alpha$ если ~~х~~ таких значений ?3 и $\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ (1) и

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$ (2)

Решение:

1) из (2): $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = 2\sin\frac{2\alpha+4\beta+2\alpha}{2}\cdot\cos\frac{2\alpha+4\beta-2\alpha}{2} =$

$= 2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos(2\beta) = -\frac{8}{17}$; (3)

(1) → (3): $2\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right)\cdot\cos 2\beta = -\frac{8}{17}$, откуда $\cos 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}$;

2) $\sin 2\beta = \pm\sqrt{1-\cos^2 2\beta} = \sqrt{1-\frac{16}{17}} = \sqrt{\frac{1}{17}} = \pm\frac{1}{\sqrt{17}}$.

а) если $\sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}$; $\cos 2\beta = +\frac{4}{\sqrt{17}}$, то из (1):

$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha = \frac{4}{\sqrt{17}}\sin 2\alpha + \frac{1}{\sqrt{17}}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

тогда

$4\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1$;

$4\sin 2\alpha + 2\cos^2\alpha - 1 = -1$

$8\sin\alpha\cos\alpha + 2\cos^2\alpha = 0$

$\cancel{2}\cos\alpha(\cancel{8}\,4\sin\alpha + \cos\alpha) = 0$

т.к. $tg\,\alpha$ определен, то $\cos\alpha \neq 0$, тогда

$4\sin\alpha + \cos\alpha = 0$ | поделим на $\cos\alpha \neq 0$, получим

$4\,tg\,\alpha + 1 = 0$

$tg\,\alpha = -\frac{1}{4}$;

б) если $\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$; $\cos 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}$ тогда из (1):

$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha = \frac{4}{\sqrt{17}}\sin 2\alpha - \frac{1}{\sqrt{17}}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

тогда $4\sin 2\alpha - \cos 2\alpha = -1$

$4\sin 2\alpha - 1 + 2\sin^2\alpha = -1$

$8\sin\alpha\cos\alpha + 2\sin^2\alpha = 0$

$\sin\alpha(4\cos\alpha + \sin\alpha) = 0$

1) $\sin\alpha = 0$, тогда $tg\,\alpha = 0$;

2) $\sin\alpha \neq 0$, тогда $4\cos\alpha + \sin\alpha = 0$; $\cos\alpha = 0$ не корень ур-я, тогда поделим на $\cos\alpha \neq 0$, получим

$$4 + tg\alpha = 0$$
$$tg\,\alpha = -4.$$

Заметим, что других значений $tg\alpha$ быть не может (т.к. перебрали все возможные случаи для $\sin 2/3$ и $\cos 2/3$), а т.к. известно что значений $tg\,\alpha$ ~~≠~~ не меньше трёх, то все найденные значения подходят.

Ответ: $-4;\ -\frac{1}{4};\ 0$

N3

$$3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5} - x^2$$

1) $x^2+6x > 0$

$x(x+6) > 0$

$x \in (-\infty; -6) \cup (0; +\infty)$

2) $3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x + x^2 - (x^2+6x)^{\log_4 5} \geq 0$

$3^{\log_4(x^2+6x)} + 4^{\log_4(6x+x^2)} - 5^{\log_4(x^2+6x)} \geq 0$

Пусть $\log_4(x^2+6x) = t$, тогда

$3^t + 4^t - 5^t \geq 0$; равенство при $t=2$, при $t \leq 2$ н-во верно, тогда получим

$t \leq 2 \Rightarrow \log_4(x^2+6x) \leq 2 \Rightarrow 0 < x^2+6x \leq 16 \Rightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; -6) \cup (0; +\infty) \\ x^2+6x-16 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; -6) \cup (0; +\infty) \\ (x+8)(x-2) \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; -6) \cup (0; +\infty) \\ x \in [-8; 2] \end{cases} \Rightarrow x \in [-8; -6) \cup (0; 2]$

Ответ: $[-8; -6) \cup (0; 2]$.

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N5

1) Рассмотрим $a=1$, тогда $f(ab)=f(a)+f(b)$

$f(b)=f(1)+f(b)$

$f(1)=0$

2) $f(1)=0$

$f(2)=\left[\frac{2}{4}\right]=0$

$f(3)=\left[\frac{3}{4}\right]=0$

$f(4)=f(2\cdot 2)=f(2)+f(2)=0$

$f(5)=\left[\frac{5}{4}\right]=1$

$f(6)=f(2\cdot 3)=f(2)+f(3)=0$

$f(7)=\left[\frac{7}{4}\right]=1$

$f(8)=f(2)+f(4)=0$

$f(9)=f(3)+f(3)=0$

$f(10)=f(2)+f(5)=1$

$f(11)=\left[\frac{11}{4}\right]=2$

$f(12)=f(3)+f(4)=0$

$f(13)=\left[\frac{13}{4}\right]=3$

$f(14)=f(2)+f(7)=1$

$f(15)=f(3)+f(5)=1$

$f(16)=f(2)+f(8)=0$

$f(17)=\left[\frac{17}{4}\right]=4$

$f(18)=f(2)+f(9)=0$

$f(19)=\left[\frac{19}{4}\right]=4$

$f(20)=f(2)+f(10)=1$

$f(21)=f(3)+f(7)=1$

$f(22)=f(2)+f(11)=2$

$f(23)=\left[\frac{23}{4}\right]=5$

$f(24)=f(4)+f(6)=0$

$f(25)=f(5)+f(5)=2$

$f(26)=f(2)+f(13)=3$

$f(27)=f(3)+f(9)=0$

Тогда всего на промежутке от 3 до 27 включительно

10 чисел где $f(x)=0$ | 7 чисел где $f(x)=1$ | 3 числа где $f(x)=2$ |

2 числа где $f(x)=3$ | 2 числа где $f(x)=4$ | одно число где $f(x)=5$ |

3) $f(x\cdot\frac{1}{x})=f(x)+f(\frac{1}{x})=f(1)=0$, тогда $f(\frac{1}{x})=-f(x)$ |

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f\left(x \cdot \frac{1}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) = f(x) - f(y)$

Если $f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$, то $f(x) < f(y)$

тогда пару с x могут составлять любые числа y, такие что $f(y) > f(x)$.

Тогда кол-во пар получается как (кол-во где $f(x)=0$ · кол-во где $f(x)>0$ + + кол-во где $f(x)=1$ · кол-во где $f(x)>1$ и т.д. + кол-во $f(x)=4$ · кол-во $f(x)=5$)

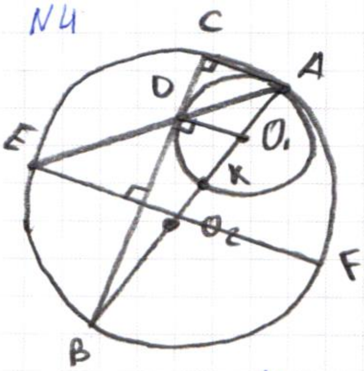
Тогда всего пар:

$10 \cdot 15 + 7 \cdot 8 + 3 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 1 =$

$= 150 + 56 + 12 + 6 + 2 = 206 + 20 = 226$

Ответ: 226 пар

N4



Дано: окр $(O_1, R) = \Omega$ касается с окр $(O_2, r) = \omega$ в точке A

AB – диаметр Ω; BC – касательная к ω;

$AD \cap \Omega = E$; $EF \perp BC$, $F \in \Omega$

$BD = \frac{13}{2}$; $CD = \frac{5}{2}$

Найти: а) r; R б) $\angle AKE$; в) S_{AKE}

Решение а) 1) т.к. AB – диаметр, то $\angle BCA = 90°$; т.к. BC – касательная, то $O_1D \perp BC$, тогда получим что $\angle ACB = \angle O_1DB$, а это соотв. углы при AC и O_1D и секущей BC, $\Rightarrow AC \parallel O_1D$;

2) Рассмотрим $\triangle BDO_1$ и $\triangle BCA$.

1) $\angle CBA$ общий

2) $\angle BDO_1 = \angle BCA = 90°$ } по 2-м углам $\triangle ABC \sim \triangle O_1BD$,

тогда $\frac{BO_1}{BA} = \frac{BD}{BC}$, } $AB \cap \omega = K$, $BK = x$, тогда

$\frac{x+r}{x+2r} = \frac{\frac{13}{2}}{\frac{18}{2}} = \frac{13}{18}$, тогда $18x + 18r = 13x + 26r$, откуда $x = \frac{8}{5}r$;

3) т.к. BC – касательная, то $BK \cdot BA = BD^2$, тогда $x \cdot (x + 2r) = \left(\frac{13}{2}\right)^2$

* пункт N0! т.к. окр-ти касаются внутр. образом то их ф центры на одной прямой !!! иначе перпендикуляр к общей кас. разным, противор.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Подставляя $x = \frac{8}{5}r$ получим

$\frac{8}{5}r \cdot \left(\frac{8}{5}r + 2r\right) = \frac{13^2}{4}$

$\frac{8}{5}r \cdot \frac{18}{5}r = \frac{13^2}{4} \Rightarrow r^2 = \frac{13^2 \cdot 5^2}{4 \cdot 8 \cdot 18} = \frac{13^2 \cdot 5^2}{4^2 \cdot 6^2}$, откуда $r = \frac{65}{24}$!

4) $R = BK - O_2K = x - (AO_2 - AK) = x - (R - 2r) \Rightarrow x + 2r - R$, тогда

$2R = x + 2r$, $R = \frac{x}{2} + r = \frac{8}{5}r \cdot \frac{1}{2} + r = \frac{4}{5}r + r = \frac{9}{5}r =$

$= \frac{9}{5} \cdot \frac{65}{24} = \frac{13 \cdot 3}{8} = \frac{39}{8}$ Ответ: $r = \frac{65}{24}$; $R = \frac{39}{8}$.

№2

~~Заметим~~ $\begin{cases} 3y - 2x = \sqrt{3xy - 2x - 3y + 2} \\ 3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 4 \end{cases}$

Рассмотрим второе ур-е системы:

$3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 4$

~~Заметим, что пары $(0; 2)$; $(0; -\frac{2}{3})$; $(2; 2)$; $(2; -\frac{2}{3})$ являются решениями данного уравнения. Так как обе переменные входят в ур-е во 2-й степени, то более 4 пар решений у него быть не может, значит методом подбора найдены все решения второго ур-я системы. Проверим, какие из них удовлетворяют первому уравнению~~

~~1) $(0; 2)$~~

~~$3 \cdot 2 - 2 \cdot 0 = \sqrt{3 \cdot 0 \cdot 2 - 2 \cdot 0 - 3 \cdot 2 + 2}$~~

~~$6 =$~~

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 5

(Нумеровать только чистовики)

Заметим что пары $(0; 2)$; $(0; -\frac{2}{3})$; $(2; 2)$; $(2; -\frac{2}{3})$;

$(1+\frac{\sqrt{21}}{3}; 0)$; $(1-\frac{\sqrt{21}}{3}; 0)$; $(1+\frac{\sqrt{21}}{3}; \frac{4}{3})$; $(1-\frac{\sqrt{21}}{3}; \frac{4}{3})$ – решения второго ур-я

Так как обе переменные в нём во 2-й степени, то больше решений оно иметь не может.

Проверкой корней для 1-го ур-я найдём какие удовлетворяют: $(2; 2)$; $\cancel{(1-\frac{\sqrt{21}}{3}; 0)}$

Ответ: $(2; 2)$; $\cancel{(1-\frac{\sqrt{21}}{3}; 0)}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\quad \sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$\sin 2\alpha\cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\quad \sin 2\alpha\cos 4\beta + \sin 4\beta \cos 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$\sin^2(2\alpha+2\beta) + (\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha)^2 = 1$ $\quad 1 \ge x^2+6x>0$

$(\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha)^2 = \cos^2(2\alpha+2\beta)$

$x^2+6x \le 1$

$x^2+6x-1 \le 0$

$\begin{cases} 3y-2x = \sqrt{3xy-2x-3y+2} \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \end{cases}$ $\quad (3y-2x)^2 = 3xy-2x-3y+2$

$9y^2+4x^2-12xy = 3xy-2x-3y+2$

$3(x^2-2x+1)+3(y^2-2y+1) = 10-2y$ $\quad t^{\log_4 3} - t^{\log_4 5} + t > 0$

$3x^2+3y^2-6x-4y-4=0$ $\quad t^{\log_4 5} - t^{\log_4 3} < t$

$3x^2-6x+3y^2-4y-4=0$ $\quad t^{\log_4 5 - 1} - t^{\log_4 3 - 1} = 1$

$D = 36-4\cdot 3\cdot(3y^2-4y-4) = 36-36y^2+48y+48 =$

$3y^2-4y+3x^2-6y-4=0$

$= -36y^2+48y+84 =$

$D = 16-4\cdot 3(3x^2-6y-4) =$ $\quad = 12(-3y^2+4y+7)$

$= 16-36x^2+72y+48 =$ $\quad t^{\log_4 3} - t^{\log_4 5} = -1$

$= -36x^2+72y+64 = 4(-9x^2+18x+16)$

$t>1$

$t^{\log_4 3} - t^{\log_4 5} + 1 > 0$ $\quad t^{\log_4 3} - t^{\log_4 5} = -1$

$t>0$ $\quad$ 1) $t \in (0;1]$ подходит

$t \in (0;1)$ $\quad x^2+6x \in (0;1)$

☑ черновик ☐ чистовик

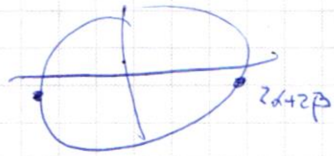
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$



$\frac{AD}{DE} = \frac{CD}{DH}$

$\sin\left((2\alpha+2\beta)+2\beta\right) = \sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta + \cos(2\alpha+2\beta)\sin 2\alpha \overset{+\sin 2\alpha}{=} -\frac{8}{17}$

$-\frac{1}{\sqrt{17}}\cos 2\beta + \sin 2\alpha\left(1 \pm \frac{8}{17}\right) = -\frac{8}{17}$

$3^t + 4^t > (4+1)^t$

$\left(\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha\right)^2 = \cos^2(2\alpha+2\beta)$

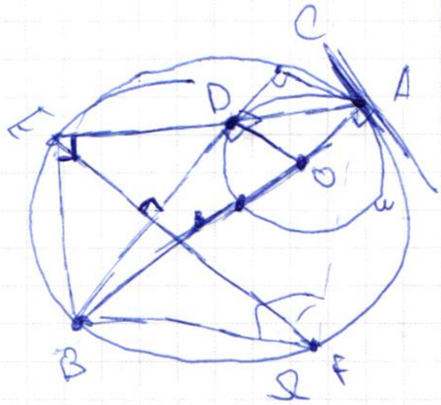
$3^t + 4^t > 4^t + 1 + 4^{t-1}t + \ldots$

$\frac{5}{16} \cdot \frac{13\sqrt{5}}{4} + \frac{13}{5}\sqrt{5}$

$x = R + (R-2r) = 2R - 2r$

$R = \frac{x}{2} + r$

$3^t \vee 4^{t-1}t + \ldots + 1$



AB - диаметр Ω

BC касается ω

Найти: r/R, $\angle AFE$, S_{AFE}

Дано: $CD = \frac{5}{2}$

$BD = \frac{13}{2}$

$\frac{BO}{BA} = \frac{13}{5}\ \frac{k}{6} = \frac{9}{6}$

$\frac{x+r}{x+2r} = \frac{13}{18}$

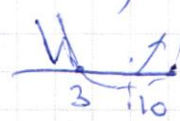
$18x + 18r = 13x + 26r$

$5r = 8x$

$x = \frac{5}{8}r$

$8x^2 - 34x + 30 =$

$(x-3)(8x - 10)$

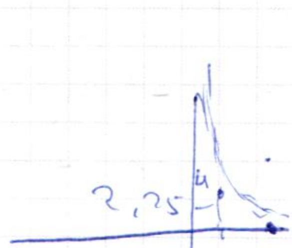


$\frac{4x-3}{2x-2} \geq ax + b \geq 8x^2 - 34x + 30$ верно $\forall x \in [1;3]$

$\frac{4x-3}{2x-2} \geq 8x^2 - 34x + 30$

$R = AB - 2r - (x-r) = AB - x - r$

$\frac{16x^3 - 68x^2 + 60x - 16x^2 + 68x - 60 - 4x + 3}{2x-2} \leq 0$



$16x^3 - 84x^2 + 124x - 57 \leq 0$

$f(3) = 2 + \frac{1}{4} = 2,25$

$2 + \frac{1}{2x-2}$

$AD \cdot DE = \frac{13 \cdot 5}{4}$

$g(1) = 8 + 30 - 34 = 4$

$g(3) = 0$

$\frac{5}{8}r \cdot 2r = \left(\frac{13}{2}\right)^2$

$\frac{5}{4}r^2 = \frac{13^2}{4}$

$r = \frac{13\sqrt{5}}{5}$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$t^{\log_4 5} - t^{\log_4 3} - t \le 0$

$t^{\log_4 3}\left(t^{\log_4 \frac{5}{3}} - 1\right) - t \le 0$

$f' = \cancel{\log_4 3 \cdot} t^{\log_4 3 - 1}\left(t^{\log_4 \frac{5}{3}} - 1\right) +$

25

0: $\boxed{1; 2}$; 3; 4; 6; 8; 9; 12; 16; 18; 24; 27 $2^k \cdot 3^m$

1: 5; 7; 10; 14; 15; 20; 21

2: 11; 22; 25

3: 13; 26 2·

4: 17; 19 2·22 = 44 пары

5: 23 24 пары

$f(x)$

$f(ab) = f(a) + f(b)$ $f(p) = \left[\frac{p}{4}\right]$ Найт $x, y \in N$: $3 < x \le 27$, $3 < y \le 27$

$f(2) = 0$ $f(3) = 0$ $f(5) = 1$ $f(7) = 1$ $f(11) = 2$ $f(13) = 3$ $f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$

$f(17) = 4$ $f(19) = 4$ $f(23) = 5$ $f(9) = 0$

$f(4) = 0$ $f(6) = 0$ $f(1) = 0$ $f(8) = 0$ $f(10) = 1$ $f(12) = 0$ $f(14) = 1$ $f(15) = 1$

$f(16) = 0$ $f(18) = 0$ $f(20) = 1$ $f(21) = 1$ $f(22) = 2$ $f(24) = 0$

$f(25) = 2$ $f(26) = 3$ $f(27) = 0$

$f(k) = 0$:

$f(a) + f\left(\frac{1}{a}\right) = 0$ $f\left(\frac{1}{a}\right) = -f(a)$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$ $f(x) < f(y)$

0: 10

1: 7

2: 3

3: 2

4: 2

5: 1

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-2y+2} \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \end{cases}$$

$2=\sqrt{12-4-6+2}=2$, верно

$$\begin{cases} 9y^2+4x^2-12xy=3xy-2x-2y+2 \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9y^2+4x^2-15xy+2x+2y-2=0 \\ 3y^2+3x^2-6x-4y-4=0 \end{cases}$$

$\times\begin{array}{r}16\\9\\\hline 144\end{array}$

$4x^2-(15y-2)x+9y^2+2y-2=0$

$D=(15y-2)^2-4\cdot4\cdot(9y^2+2y-2)=225y^2-60y+4-144y^2-32y+32=$

$=\cancel{81y^2-92y+36}$ $\cancel{(9y+8-6)^2}$

$\times\begin{array}{r}36\\4\\\hline 144\end{array}$

$9y^2-(15x-2)y+4x^2+2x-2=0$

$\cancel{D=225x^2-60x+4-4\cdot9(4x^2+2x-2)}$

$\cancel{=225x^2-60x+4-144x^2-72x+72=}$

$\cancel{=81x^2-132x+76}$

$3y^2-4y=4$

$D=16+4\cdot4\cdot3=$

$=64$

$y=\frac{4\pm8}{6}$

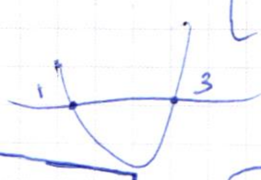
$3x^2-6x-4=0$

$\frac{4x-3}{2x-2}\ge ax+b$ и $8x^2-34x+20\le ax+b$ на $[1;3]$

$4x-3\ge 2ax^2+(2b-2a)x-2b$ на $[1;3]$

$$\left[\begin{array}{l} y=2 \\ y=-\frac{2}{3} \end{array}\right.$$

$2ax^2+(2b-2a-4)x-2b+3\le0$



$1+\frac{\sqrt{21}}{3}$

(1) $D>0$

$f(1)\le0$

$f(3)\le0$

$x=\frac{6\pm2\sqrt{21}}{6}=$

$$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2}=\sqrt{(3y-2)(x-1)} \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \end{cases}$$

$36+16\cdot3=$

$=84$

$3x^2-6x-4=0$ $D=$

$3x^2-6x-4=0$

$(3y-2x)^2=(3y-2)(x-1)$

$D=36+16\cdot3=$

$=36+48=$

$=84$

$8x^2-34x+30-ax-b\le0$

$8x^2-(34+a)x+30-b\le0$

$x,y=(2;2)$ V

$x,y=(2;-\frac{2}{3})$ X

$\frac{12}{9}+\frac{8}{3}=\frac{36}{9}=4$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$(x^2+6x)^{\log_4 3} - \cancel{\log}\, |x^2+6x|^{\log_4 x} + x^2+6x \geq 0$

$x^2+6x>0$

$t>0$

$t^{\log_4 3} - t^{\log_4 5} + t^1 \geq 0$

$\log_4 t$

$3^{\log_4 t} - 5^{\log_4 t} + 4^{\log_4 t} \geq 0$

-5^k

$3^k+4^k-5^k \geq 0$ $=$ при $k=2$

$f'(t) = -k \cdot 5^{k-1}$

$k \leq 2$

$\log_4 t \leq 2$

$0<t \leq 16$

$t + t^{\log_4 3} - t^{\log_4 5} \geq 0$ $t>0$

$4 \cdot 5^{-5} < 3 \cdot 5^{-4}$

$0 < x^2+6x \leq 16$

$1 + \log_4 3\, t^{\log_4 3 - 1} - \log_4 5\, t^{\log_4 5 - 1}$

$\frac{4}{3} \vee 5$

$x(x+6)>0$

$x \in (-\infty; -6) \cup (6; +\infty)$

$3^t+4^t-5^t \geq 0$

$3^t+4^t > 5^t$

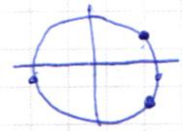
$x^2+6x-16 \leq 0$

$\log_5 (3^t+4^t) > 5$

$(x+8)(x-2) \leq 0$

$x \in [-8; 2] \;\to\; x \in [-8; -6) \cup (0; 2]$

$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$



$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = -\frac{8}{17}$

$\sin 2\alpha \cos 2\beta +$

$2 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right) \cdot \cos 2\beta = -\frac{8}{17}$

$+ \cos 2\alpha \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\cos 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}$

$\log_4(x^2+6x) \leq 2$

$0 < x^2+6x \leq 16$ $x \in (-\infty; -6) \cup (0; +\infty)$

$x^2+6x-16 \leq 0$ $(x+8)(x-2) \leq 0$ $x \in [-8; 2]$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\cos 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha \cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\beta = \pm\frac{1}{\sqrt{17}}$

1) $\cos 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}$ $\sin\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha \cdot \frac{4}{\sqrt{17}} + \cos 2\alpha \cdot \frac{1}{\sqrt{17}} = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$4\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1$

$8\sin\alpha\cos\alpha + 2\cos^2\alpha = 0$

$\cos\alpha(4\sin\alpha + \cos\alpha) = 0$

$4\sin\alpha + \cos\alpha = 0$

$4\,tg\alpha + 1 = 0$

$tg\alpha = -\frac{1}{4}$

$3x^2+3y^2-6x-4y-4 \,|\, x+y-4$

$3x^2+3xy-12x \,|\, 3x+3y$

$3y^2-3xy+6x-4y-4$

$3y^2+3xy-12y$

$-6xy+6x+8x-4$

2) $\cos 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}$ $\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\frac{4}{\sqrt{17}}\sin 2\alpha - \frac{1}{\sqrt{17}}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$4\sin 2\alpha - \cos 2\alpha = -1$

$8\sin\alpha\cos\alpha + 2\sin^2\alpha = 0$

$\sin\alpha(4\cos\alpha + \sin\alpha) = 0$

$\sin\alpha = 0 \to tg\,\alpha = 0$

$4\cos\alpha + \sin\alpha = 0$

$tg\alpha + 4 = 0$

$tg\alpha = -4$

Ответ: $-4; -\frac{1}{4}; 0$

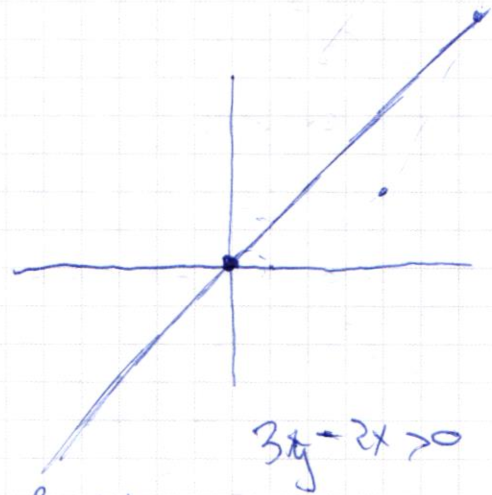
$$\begin{cases} 3y-2x = \sqrt{3xy-2x-3y+2} \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \end{cases}$$

$\boxed{t>0}$

$t^{\log_4 3} - t^{\log_4 5} \geq 0$

$t^{\log_4 3} - t^{\log_4 5} = t$

$t^{\log_4 5} - t^{\log_4 3} \leq t$



$3y-2x>0$

$5^3-3^3 = x^2-cx+$

$(3y-2)(x-1)$

$t^{\log_4 3}\cdot\left(t^{\log_4 5-\log_4 3}-1\right) =$

$= t^{\log_4 3}\left(t^{\log_4 \frac{5}{3}}-1\right)$

$t^{\log_4 \frac{5}{3}} = 1$ $t=1$

$\log_4 \frac{5}{3} = 1$ $\log_4 t = 0$

$3xy-2x-3y+2\geq 0$

$\boxed{(3y-2)(x-1)\geq 0}$

$3y(x-1)-2(x-1)\geq 0$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)