МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 4

ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6}, \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$\left|x^2-26x\right|^{\log_5 12}+26x\geqslant x^2+13^{\log_5\left(26x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=12$, $BD=13$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $4\leqslant x\leqslant 28$, $4\leqslant y\leqslant 28$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{8-6x}{3x-2}\geqslant ax+b\geqslant 18x^2-51x+28$$

выполнено для всех x на промежутке $\left(\frac{2}{3};2\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $TXYZ$, вершина Y которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра TY. Известно, что $XY=\sqrt{3}$, $TX=\sqrt{2}$, $TZ=2$. Найдите длину ребра XZ. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

37

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \quad (1) \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{17} \quad (2) \end{cases}$$

(2) $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$

$$2\sin\frac{2\alpha+4\beta+2\alpha}{2}\cdot\cos\frac{2\alpha+4\beta-2\alpha}{2} = -\frac{2}{17}$$

$$\cancel{\sin(2\alpha+2\beta)} \ \sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta = -\frac{1}{17}$$

Подставим $\sin(2\alpha+2\beta)$ из (1):

$$-\frac{1}{\sqrt{17}}\cos 2\beta = \frac{-1}{17}$$

$$\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}$$

Из осн. триг. тождества: $\sin 2\beta = \pm\sqrt{1-\cos^2 2\beta} = \pm\sqrt{1-\frac{1}{17}} = \frac{\pm 4}{\sqrt{17}}$

(1) $\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$$\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \cos 2\alpha\cdot\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$\sin 2\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt{17}} + \cos 2\alpha\cdot\frac{\pm 4}{\sqrt{17}} = -\frac{1}{\sqrt{17}} \quad \Big|\cdot\sqrt{17}$$

$$\sin 2\alpha \pm 4\cos 2\alpha = -1 \quad (3)$$

~~1. si~~ Рассмотрим 2 случ.:

1. $\sin 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}$

Тогда (3) примет вид: $\sin 2\alpha + 4\cos 2\alpha = -1$

$$2\sin\alpha\cdot\cos\alpha + 4\cos^2\alpha - 4\sin^2\alpha = -\sin^2\alpha - \cos^2\alpha$$

$$5\cos^2\alpha + 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha - 3\sin^2\alpha = 0$$

Разделим на $\cos^2\alpha \neq 0$ (т.к. $tg\alpha$ определен)

$\frac{-54-18-12\cdot 9}{9} = -6-2-12$

$(9x-3)(9x-3)=9$

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\qquad \sin 2\beta = \frac{\pm 4}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos$ $\qquad \frac{25\cdot 156}{5\cdot 13}$ 12

$\sin(\underset{\alpha}{x+y}) + \sin(\underset{\beta}{x-y}) = 2\sin \underset{\frac{\alpha+\beta}{2}}{x} \cdot \cos \underset{\frac{\alpha-\beta}{2}}{y}$ $\qquad \frac{25}{13}\cdot\frac{12\cdot 13}{5}$

~~$\sin(2\alpha+4\beta) - \sin(2\alpha+2\beta) =$~~

~~$= 2\sin\beta\cos$~~ $\sin(2\alpha+2\beta)+\sin 2\alpha = 2\sin(2\alpha+\beta)\cos\beta$

$\frac{\sin 2\alpha}{\sqrt{17}} + \frac{\cos 2\alpha\, 4}{\sqrt{17}} = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\qquad \sin 2\alpha + 4\cos 2\alpha = -1$

~~$\sin 2\alpha = -1-4\cos 2\alpha$~~

$y-6x \geq 0$ $\qquad 2\sin\alpha\cos\alpha + 4\cos^2\alpha + 4\sin^2\alpha + \sin^2\alpha + \cos^2\alpha =$

$=0$

$16x-18x-48x$

$4-24$

$2tg\alpha + 5 - 3tg^2\alpha = 0$ $\qquad 2tg\alpha - 3tg^2$

$3tg^2\alpha - 2tg\alpha - 5 = 0$ $\qquad \frac{13x+5x-5}{2}$

$tg\alpha = -1$ $\qquad = 9x-3$

$tg\alpha = \frac{5}{3}$ $\qquad \frac{13x-5x+5}{2} - 1 = 4x+2$

~~$9x^2+y^2-18x-12y-45=0$~~ $\qquad \sqrt{60^2+12^2} = \sqrt{12^2\cdot 26}$

~~$y^2-12y+9x^2-18x-45=0$~~

~~$\frac{D}{4} = 36-9(x^2+2x+5)$~~ $36-9x^2+18x+45 = -9x^2+18x+81 =$

~~$=-9(x^2+2x$~~

$y^2-12xy+36x^2 = xy-6x-y+6$ $\qquad \boxed{y-6x\geq 0}$

$y^2 + \cancel{13xy+y}\ (1-13x)y + 36x^2+6x-6$

$D = (1-13x)^2 - 4\cdot 36x^2 - 4\cdot 6x + 24 =$

$= 25-50x+169x^2-144x^2 = 25x^2-50x+25 = 25(x-1)^2$

$y_1 = \frac{13x-1-5(x-1)}{2} = \frac{8x+4}{2} = 4x+2$

$y_2 = \frac{13x-1+5x-5}{2} = 9x-3$

$\cos F = \frac{5}{13}$

$\frac{5}{\sqrt{26}} - \frac{12\cdot 1}{13\sqrt{26}}$

$25x^2-50x-65$

$5x^2-10x-13$

$\frac{D}{4} = 25+5\cdot 13 = 25+65 = 90$

$\cos B = \frac{25}{65} = \frac{5}{13}$

$\sin\beta = \frac{12}{13}$

$\cos A = \frac{5}{\sqrt{26}}$

$\sin A = \frac{1}{\sqrt{26}}$

$\frac{c}{a+b} = \frac{a}{c}$

$13^2 = 2R(2R-2r)$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$5+2tg\alpha-3tg^2\alpha=0$$

$$3tg^2\alpha-2tg\alpha-5=0$$

$$\frac{D}{4}=1+3\cdot5=4^2$$

$$tg\alpha=\frac{1\pm4}{3}$$

$$\left[\begin{array}{l} tg\alpha=\frac{5}{3} \\ tg\alpha=-1 \end{array}\right.$$

2\. $\sin 2\beta=-\frac{4}{\sqrt{17}}$

(3) имеет вид: $\sin 2\alpha-4\cos 2\alpha=-1$

$$2\sin\alpha\cdot\cos\alpha-4\cos^2\alpha+4\sin^2\alpha=-\sin^2\alpha-\cos^2\alpha$$

$$5\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cdot\cos\alpha-3\cos^2\alpha=0 \;\Big|: \cos^2\alpha\neq0$$

$$5tg^2\alpha+2tg\alpha-3=0$$

$$\frac{D}{4}=1+3\cdot5=4^2$$

$$tg\alpha=\frac{-1\pm4}{5}$$

$$\left[\begin{array}{l} tg\alpha=-1 \\ tg\alpha=\frac{3}{5} \end{array}\right.$$

В итоге нашлось 3 знач. $tg\alpha$ $\Rightarrow$ каждое из них подходит, т.к. по условию значений не меньше 3

Ответ: $tg\alpha=-1$; $tg\alpha=\frac{5}{3}$; $tg\alpha=\frac{3}{5}$

№2

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6} & (1) \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45 & (2) \end{cases}$$

$|t|^{\log_5 12} \cancel{+ax} \geq t + 13^{\log_5 t}$

$\cancel{13^{\log_5 t} = t^{13^{\log_5 t}}}$ $\quad t^{\log_t 13^{\log_5 t}} = 13^{\log_5 t}$

$\cancel{|t|^{\log_5 12} = 12^{\log_{12}|t|^{\log_5 12}} = 5^{\log_{12}|t|}}$

$\cancel{13^{\log_5 t}}$ $\quad t^{\log_5 12} \geq t + 13^{\log_5 t}$

$\cancel{13^{\log_{13} t^{\log_5 12}} = 13}$

$t^{\log_5 12} = \cancel{12^{\log_{12} t^{\log_5 12}}}$ $\quad 5^{\log_5 t^{\log_5 12}} = 12^{\log_5 t}$

$12^{\log_5 t} \geq t + 13^{\log_5 t}$

$t = 5^{\log_5 t}$ $\qquad 12^y \geq 5^y + 13^y$

$f(y) = 13^y - 12^y + 5^{-y}$

$\cancel{f'(y) = \ln 13 \cdot 13^x - \ln 12 \cdot 12^x + \ln 5 \cdot 5^{-x}}$

$\cancel{(a^x)' = (e^{x\ln a^x})' \cdot \ln a \cdot a^x}$

$13^y = (\sqrt{5^2+12^2})^y = (5^2+12^2)$

$26x - x^2 \geq 0$

$x^2 - 26x < 0$

$x \in (0; 26)$

$13^x \vee 12^x$

$\left(\frac{13}{12}\right)^x \vee 1$

$x \geq 0 \Rightarrow \left(\frac{13}{12}\right)^x \geq 1$

$x < 0$:

$|x^2 - 26x| = 26x - x^2 = t$

$t^{\log_5 12} + t \geq 13^{\log_5 t}$

$t = 5^{\log_5 t}$ $\qquad \cancel{t^{\log_5 12} = 12^{\log_{12} t \cdot \log_5 12} = 1}$

$t^{\log_5 12} = 5^{\log_5 t \cdot \log_5 12} = 12^{\log_5 t}$

$y = \log_5 t$ $\qquad \ln 13 \cdot 13^x \vee \ln 12 \cdot 12^x$

$12^y + 5^y \geq 13^y$ $\qquad \frac{\ln 13}{\ln 12} \cdot \frac{13^x}{12^x} \vee 1$

$\log_{12} 13 \cdot \left(\frac{13}{12}\right)^x \vee 1$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

(1) $y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6}$

$\begin{cases} y-6x\geq 0 \ (3) \\ (y-6x)^2=xy-6x-y+6 \ (4) \end{cases}$

(4) $\cancel{y^2} \Leftrightarrow y^2+y(1-13x)+36x^2+6x-6=0$

Решим как квадратное отн. y

$D=(1-13x)^2-4\cdot(36x^2+6x-6)=25-50x+25x^2=25(x-1)^2$

$\left[\begin{array}{l} y=\dfrac{-1+13x-5(x-1)}{2} \\ y=\dfrac{-1+13x+5(x-1)}{2} \end{array}\right.$

Примечание: вообще говоря, $\sqrt{D}=|5(x-1)|$, но при использовании формулы для корней реализуются оба случая раскр. модуля, поэтому корни будут такими (как написано выше)

$\left[\begin{array}{l} y=4x+2 \\ y=9x-3 \end{array}\right.$

Подставим в (2):

1. $y=4x+2$

$9x^2+(4x+2)^2-18x-12(4x+2)=45$

$25x^2-50x-20=45$

$25x^2-50x-65=0 \ |:5$

$5x^2-10x-13=0$

$\frac{D}{4}=25+5\cdot 13=90=(3\sqrt{10})^2$

$\cancel{x = \frac{5 \pm 3\sqrt{10}}{5}}$

$\cancel{x = \frac{5+3\sqrt{10}}{5}}$ $\cancel{x = \frac{5-3\sqrt{10}}{5}}$

$\cancel{y = 4\frac{5+3\sqrt{10}}{5} + 2 = }$ $\cancel{y = 4\frac{5-3\sqrt{10}}{5} + 2}$

$\cancel{= \frac{30+12\sqrt{10}}{5}}$ $\cancel{y = \frac{30-12\sqrt{10}}{}}$

$\cancel{x = 5 \pm 3\sqrt{10}}$

$x = \frac{5+3\sqrt{10}}{5}$ $x = \frac{5-3\sqrt{10}}{5}$

$y = 4 \cdot \frac{5+3\sqrt{10}}{5} + 2 =$ $y = 4 \cdot \frac{5-3\sqrt{10}}{5} + 2 =$

$= \frac{30+12\sqrt{10}}{5}$ $= \frac{30-12\sqrt{10}}{5}$

2. $y = 9x - 3$

$9x^2 + (9x-3)^2 - 18x - 12(9x-3) = 45$

$9x^2 + 9(3x-1)^2 - 18x - 36(3x-1) = 45 \,|: 9$

$x^2 + (3x-1)^2 - 2x - \cancel{12}^{4}(3x-1) = 5$

$\cancel{10x^2 - 44x}$

$10x^2 - 20x + 5 = 5$

$10x^2 - 20x = 0$

$10x(x-2) = 0$

$x = 0$ $x = 2$

$y = 9 \cdot 0 - 3 = -3$ $y = 9 \cdot 2 - 3 = 15$

Проверим, удовлетворяет ли ~~каждое~~ условию (3) каждое из полученных реш.

1. $\left(\frac{5+3\sqrt{10}}{5}; \frac{30+12\sqrt{10}}{5}\right)$

$\frac{30+12\sqrt{10}}{5} - 6 \cdot \frac{5+3\sqrt{10}}{5} \geq 0$

$\frac{-6\sqrt{10}}{5} \geq 0$ – неверно

~~Эта пара~~ Это реш. не подходит

2. $\left(\frac{5-3\sqrt{10}}{5}; \frac{30-12\sqrt{10}}{5}\right)$

$\frac{30-12\sqrt{10}}{5} - 6 \cdot \frac{5-3\sqrt{10}}{5} \geq 0$

$\frac{6\sqrt{10}}{5} \geq 0$ – верно

Это реш. подходит

3. $(0; -3)$

$-3 - 6 \cdot 0 \geq 0$

$-3 \geq 0$ – неверно

Это реш. не подходит

4. $(2; 15)$

$15 - 2 \cdot 6 \geq 0$

$3 \geq 0$ – верно

Это реш. подходит

Ответ: $\left(\frac{5-3\sqrt{10}}{5}; \frac{30-12\sqrt{10}}{5}\right), (2; 15)$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Примечание: все решения были записаны в виде (x, y)

№3

$$|x^2-26x|^{\log_5 12}+26x \geq x^2+13^{\log_5(26x-x^2)}$$

ОДЗ: $26x-x^2>0$

$x^2-26x<0$

$x(x-26)<0$

$x \in (0; 26)$

На ОДЗ: $|x^2-26x| = 26x-x^2$

~~$(26x-x^2)^{\log_5 12}+26x-x^2 \geq 13^{\log_5(26x-x^2)}$~~

~~Замена: $t=26x-x^2$~~

Замена: $t=26x-x^2$, $t>0$

$$t^{\log_5 12}+t \geq 13^{\log_5 t}$$

$$t=5^{\log_5 t}$$

$$t^{\log_5 12} = 5^{\log_5 t^{\log_5 12}} = 5^{\log_5 12 \cdot \log_5 t} = 12^{\log_5 t}$$

Тогда $12^{\log_5 t}+5^{\log_5 t} \geq 13^{\log_5 t}$

Замена: $y=\log_5 t$

$$12^y+5^y \geq 13^y \;|\,:13^y>0$$

$$\left(\frac{12}{13}\right)^y+\left(\frac{5}{13}\right)^y \geq 1$$

$$\left(\frac{12}{13}\right)^y+\left(\frac{5}{13}\right)^y-1 \geq 0$$

Рассмотрим $f(y)=\left(\frac{12}{13}\right)^y+\left(\frac{5}{13}\right)^y-1$

~~Т.к. Заметим, что $g_1(y)=\frac{12}{1}$~~

$$f'(y)=\ln\frac{12}{13}\cdot\left(\frac{12}{13}\right)^y+\ln\frac{5}{13}\cdot\left(\frac{5}{13}\right)^y$$

~~Заметим, что g_1~~

Т.к. $\ln\frac{12}{13}<0$, $\ln\frac{5}{13}<0$, а $\left(\frac{12}{13}\right)^y>0$ и $\left(\frac{5}{13}\right)^y>0$, то $f'(y)<0$

Тогда $f(y)\downarrow \Rightarrow$ уравнение $f(y)=0$ имеет единств. реш y_0 и для всех $y \leq y_0$ выполняется $f(y) \geq 0$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Проверим $y=2$: $f(2)=\left(\frac{5}{13}\right)^2+\left(\frac{12}{13}\right)^2-1=1-1=0$

Тогда $y_0=2$

Нам подходят $y\le y_0=2$

$\log_5 t\le 2$

$\log_5 t\le \log_5 25$

$t\le 25$ (в силу строгого возрастания $g(t)=\log_5 t$)

Учтем, что $t>0$: $t\in(0;25]$

$$\begin{cases} t>0 \\ t\le 25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 26x-x^2>0 \\ 26x-x^2\le 25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\in(0;26) \\ x^2-26x+25\ge 0 \end{cases}$$ — решено еще при поиске ОДЗ

$$\begin{cases} x\in(0;26) \\ (x-1)(x-25)\ge 0 \quad (1) \end{cases}$$

~~$x\in(0;26)$~~

(1) $(x-1)(x-25)\ge 0$

$+ \quad 1 \quad - \quad 25 \quad +$

$x\in(-\infty;1]\cup[25;+\infty)$

К системе:

$$\begin{cases} x\in(0;26) \\ x\in(-\infty;1]\cup[25;+\infty) \end{cases}$$

$x\in(0;1]\cup[25;26)$

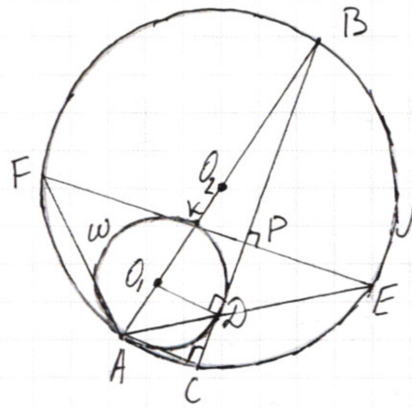
Ответ: $x\in(0;1]\cup[25;26)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4

$CD=12$

$BD=13$



O_1, O_2 - центры ω и Ω соотв.

r, R - радиусы ω и Ω соотв.

Пусть K - т. пересеч. AB и ω (отличная от A)

1) $O_1O_2 =$ ~~$O_2A =$~~ $R - r$ - т.к. внутр. кас.

По св-ву кас. и секущей для BD, BA и ω

$BK \cdot BA = BD^2$

~~$(BO_1 - O_1K)\cdot(O_2A + O_2B) = 13^2$~~ $(BA - AK)\cdot BA = 13^2$

~~$O_1, O_2 \in AB$~~ $O_1 \in AB$ - т.к. внутр. кас.

$(2R - 2r)\cdot 2R = 13^2$ (1)

2) $O_1D \perp BD$ (радиус, провед. в т. кас.)

$\angle ACB = 90°$ (впис. угол, опир. на диаметр) $\Rightarrow AC \perp BD$

Тогда $AC \parallel O_1D \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle O_1BD$ (по лемме о подобн. $\triangle$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{BD}{BC} = \dfrac{BO_1}{AB}$

~~$BC=$~~ $\dfrac{BD}{BD+CD} = \dfrac{BA - AO_1}{AB}$

$\dfrac{13}{25} = \dfrac{2R - r}{2R}$

$26R = 50R - 25r$

$24R = 25r$

$r = \frac{24}{25}R$

Подставим в (1): $\left(2R - 2\cdot\frac{24}{25}R\right)\cdot 2R = 13^2$

$4R^2 = 13^2\cdot 25$

$R^2 = \frac{13^2\cdot 5^2}{2^2}$

$R = \frac{5\cdot 13}{2} = \frac{65}{2}$

$r = \frac{24}{25}\cdot\frac{65}{2} = \frac{12\cdot 13}{5} = \frac{156}{5}$

~~3) Из $\Delta O_1BD \sim \Delta ABC$: $\frac{AC}{O_1D} = \frac{BC}{BD}$~~

~~$\frac{AC}{r} = \frac{CD+BD}{BD} = \frac{25}{13}$~~

~~$AC = \frac{25}{13}\cdot r = \frac{25}{13}\cdot\frac{156}{5} = 60$~~

~~ΔACB – п/уг:~~

3) ΔACB – п/уг: $\cos ABC = \frac{BC}{AB} = \frac{BD+CD}{2R} = \frac{25}{65} = \frac{5}{13}$

$\sin ABC = \sqrt{1-\cos^2 ABC} = \sqrt{1-\frac{5^2}{13^2}} = \frac{12}{13}$

~~Из ΔO_1~~ По т. Пифагора: $AC = \sqrt{AB^2 - BC^2}$

~~$AC = \sqrt{65^2 - (13+12)^2} = \sqrt{65^2 - 25^2}$~~

$AC = \sqrt{(2R)^2 - (BD+CD)^2}$

$AC = \sqrt{65^2 - 25^2} = \sqrt{40\cdot 90} = 60$

ΔACD – п/уг: ~~$\cos DAC$~~

По т. Пифагора: $AD = \sqrt{AC^2 + CD^2} = \sqrt{60^2 + 12^2} = \sqrt{12^2\cdot 26} = 12\sqrt{26}$

$\cos DAC = \frac{AC}{AD} = \frac{5}{\sqrt{26}}$

$\sin DAC = \frac{CD}{AD} = \frac{1}{\sqrt{26}}$

4) $\angle AFE$ – впис. угол $\Rightarrow \angle AFE = \frac{\smile AE}{2} = \frac{\smile AC + \smile CE}{2} = \frac{\smile AC}{2} + \frac{\smile CE}{2}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Тогда $\angle AFE = \angle ABC + \cancel{\angle CAE}\ \angle CAD$

$\cos AFE = \cos ABC \cdot \overset{\cos(AD)}{\cancel{\cos CAE}} - \sin ABC \cdot \overset{\sin(AD)}{\cancel{\sin CAE}}$

$\cos AFE = \frac{5}{13} \cdot \frac{5}{\sqrt{26}} - \frac{12}{13} \cdot \frac{1}{\sqrt{26}} = \frac{13}{13 \cdot \sqrt{26}} = \frac{1}{\sqrt{26}}$

$\angle AFE = \arccos \frac{1}{\sqrt{26}}$

5) $\cancel{KP \perp FE}$ $KP \perp BC, O_1D \perp BC \Rightarrow KP \parallel O_1D \Rightarrow \triangle AKE \sim \triangle AO_1D$ (по лемме о подобн. $\triangle$) $\Rightarrow \frac{AE}{AD} = \frac{KE}{O_1D} = \frac{AK}{AO_1} = \frac{2r}{r} = 2$

$AE = 2AD = 24\sqrt{26}$; $KE = 2O_1D = 2r = \frac{312}{5}$

~~$\triangle BPK \sim \triangle BDO_1$ (по лемме о подобн. $\triangle$) $\Rightarrow \frac{KP}{O_1D} = \frac{BK}{BO_1} =$~~

~~$= \frac{BA - AK}{BA - AO_1} = \frac{2R - 2r}{2R - r} = \frac{2R - 2\frac{24}{25}R}{2R - \frac{24}{25}R} = \frac{2}{26} = \frac{1}{13}$~~

~~$KP = \frac{O_1D}{13} = \frac{r}{13} = \frac{12}{5}$~~

~~6) $\triangle DPE$ - п/уг: $\cos PED = \frac{PE}{ED} = \frac{KE - KP}{AE - AD}$~~

$\triangle BPK \sim \triangle BDO_1$ (по лемме о подобн. $\triangle$) $\Rightarrow \frac{KP}{O_1D} = \frac{BK}{BO_1} =$

$= \frac{BA - AK}{BA - AO_1} = \frac{2R - 2r}{2R - r} = \frac{2R - 2 \cdot \frac{24}{25}R}{2R - \frac{24}{25}R} = \frac{1}{13}$

$KP = \frac{O_1D}{13} = \frac{12}{5}$

6) $\triangle DPE$ - п/уг: $\cos PED = \frac{PE}{ED} = \frac{KE - KP}{AE - AD} = \frac{\frac{312}{5} - \frac{12}{5}}{2AD - AD} = \frac{300}{5AD} =$

$= \frac{60}{12\sqrt{26}} = \frac{5}{\sqrt{26}}$

$\sin PED = \sqrt{1 - \cos^2 PED} = \frac{1}{\sqrt{26}}$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

7) По св-ву пересек. хорд (в Ω): $FK \cdot KE = BK \cdot AK$

$$FK \cdot KE = (BA - AK) \cdot AK = (2R - 2r) \cdot 2r$$
$$FK \cdot 2r = (2R - 2r) \cdot 2r$$
$$FK = 2R - 2r$$

ΔAFE:

$$FE = FK + KE = 2R - 2r + 2r = 2R = 65$$
$$S_{AFE} = \frac{1}{2} \cdot FE \cdot AE \cdot \sin PED = \frac{1}{2} \cdot 65 \cdot 24\sqrt{26} \cdot \frac{1}{\sqrt{26}} = 65 \cdot 12 = 780$$

Ответ: $R = \frac{65}{2}$; $r = \frac{156}{5}$; $\angle AFE = \arccos \frac{1}{\sqrt{26}}$; $S_{AFE} = 780$

№6

$$\frac{8-6x}{3x-2} \geq ax + b \geq 18x^2 - 51x + 28$$

$$\begin{cases} ax + b \geq 18x^2 - 51x + 28 \quad (1) \\ \frac{8-6x}{3x-2} \geq ax + b \end{cases}$$

(1) $18x^2 - (51 + a)x + 28 - b \leq 0$

~~Необх, чтоб выполн. для $\forall x \in [\frac{2}{3}; 2] \Rightarrow$ Необходимо, чтобы $\frac{2}{3}$ и 2 лежали между~~

$D = (51 + a)^2$

~~№5~~

~~$f(\frac{x}{y}) = f(x) + f(\frac{1}{y}) = f(x$~~

№5

Рассмотрим $f(\frac{1}{a})$:

$$f(\frac{1}{a}) = f(a \cdot \frac{1}{a^2}) = f(a) + f(\frac{1}{a^2}) = f(a) + f(\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a}) = f(a) + f(\frac{1}{a}) + f(\frac{1}{a})$$

$$f(\frac{1}{a}) = -f(a)$$

Тогда $f(\frac{x}{y}) = f(x) + f(y) = f(x) - f(y)$

Требуется $f(\frac{x}{y}) < 0$, то есть $f(x) < f(y)$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

$\cancel{f(4)=f(2)+f(2)=\left[\frac{2}{4}\right]\cdot 2=0}$ $\qquad$ $\cancel{f(5)=f(2)+f(3)\ \left[\frac{5}{2}\right]=2}$

$\cancel{f(6)=f(2)+f(3)=\left[\frac{2}{4}\right]+\left[\frac{3}{4}\right]=0}$ $\qquad$ $\cancel{f(7)=\left[\frac{7}{4}\right]=3}$

$\cancel{f(8)=f(2)+f(4)=\left[\frac{2}{4}\right]+0=0}$ $\qquad$ $\cancel{f(9)=f(3)+f(3)=2\cdot\left[\frac{3}{4}\right]=0}$

$\cancel{f(10)=f(2)+f(5)=0+2=2}$ $\qquad$ $\cancel{f(11)=\left[\frac{11}{2}\right.}$

$\cancel{f(2)=1}$ $\quad f(2)=\left[\frac{2}{4}\right]=0$ $\qquad$ $f(3)=\left[\frac{3}{4}\right]=0$

$f(4)=2f(2)=0$ $\qquad$ $f(5)=\left[\frac{5}{4}\right]=1$

$f(6)=f(2)+f(3)=0$ $\qquad$ $f(7)=\left[\frac{7}{4}\right]=1$

$f(8)=f(2)+f(4)=0$ $\qquad$ $f(9)=2f(3)=0$

$f(10)=f(2)+f(5)=1$ $\qquad$ $f(11)=\left[\frac{11}{4}\right]=2$

$f(12)=f(2)+f(6)=0$ $\qquad$ $f(13)=\left[\frac{13}{4}\right]=3$

$f(14)=f(2)+f(7)=1$ $\qquad$ $f(15)=f(5)+f(3)=1$

$f(16)=f(2)+f(8)=0$ $\qquad$ $f(17)=\left[\frac{17}{4}\right]=4$

$f(18)=f(2)+f(9)=0$ $\qquad$ $f(19)=\left[\frac{19}{4}\right]=4$

$f(20)=f(2)+f(10)=1$ $\qquad$ $f(21)=f(3)+f(7)=1$

$f(22)=f(2)+f(11)=2$ $\qquad$ $f(23)=\left[\frac{23}{4}\right]=5$

$f(24)=f(4)+f(6)=0$ $\qquad$ $f(25)=2f(5)=2$

$f(26)=f(2)+f(13)=3$ $\qquad$ $f(27)=f(3)+f(9)=0$

$f(28)=f(2)+f(14)=1$

~~1) Если $y=23$, то x может быть любым числом от 4 до 28 (кроме 23), т.к. $f(23)=5$ - max возможное знач. $f(4)$ при $y\in$ - $f(a)$ при $a\in[4;2$ $f(a)$, если $a\in\{4,5,\dots,28\}$. Т.е имеем~~

1) $f(y)=5$, т.е. $y=23$, в этом случ. $f(x)<5$ (т.е. $f(x)\leq 4$)
Тогда $x\in\{4;5;6;\dots;22;24;25;\dots;28\}$ - все числа от 4 до 28, отличные от 23

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Имеем 24 варианта выбора x при фиксированном y (в данном случае)

2) $f(y)=4$, т.е. $y\in\{17;19\}$ и $f(x)\le 3$

Тогда $x\in\{~~2;3~~\ 4;5;6;7;\dots;16;18;\dots;22;24;\dots;28\}$ - все числа от 4 до 28, кроме 17, 19, 23

Имеем 22 варианта выбора x при уже выбранном $y\in\{17;19\}$

3) $f(y)=3$, т.е. $y\in\{13;26\}$ и $f(x)\le 2$

$x\in\{4;5;\dots;12;14;15;16;18;20;21;22;24;25;27;28\}$ - все числа от 4 до 28, кроме 13; 17; 19, 23, 26

20 вариантов

4) $f(y)=2$, т.е. $y\in\{11;22;25\}$ и $f(x)\le 1$

$x\in\{4;5;\dots;10;12;14;15;16;18;20;21;27;24;27;28\}$ - все числа от 4 до 28, кроме ~~11;13~~, 11, 13, 17, 19, 22, 23, ~~26~~ 25; 26

17 вариантов

5) $f(y)=1$, т.е. $y\in\{5;7;10;14;15;20;21;28\}$ и $f(x)\le 0$

$x\in\{4;6;8;9;12;16;18;24;27\}$

Имеем 9 вариантов (1)

<u>Примечание</u>: ~~фразы~~ запись наподобие (1) означает, что после выбора y, удовлетворяющему рассматриваемому случаю, есть сколько-то вариантов выбора x

Итого пар: $24+2\cdot 22+2\cdot 20+3\cdot 17+8\cdot 9=231$

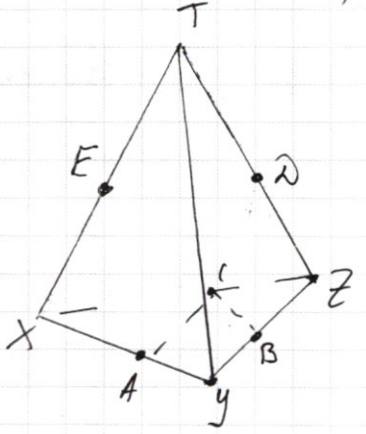
(из случая 1) из 2) из 3) из 4) из 5))

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Примечание: случай $f(y)=0$ нет смысла рассматривать, т.к. на рассматриваемом множестве знач. x и y ~~не сущест. $f(x)<$~~ значения x, при котором $f(x)<0$

Ответ: 231

№7



Точки A, B, C, D, E - середина ребер ~~$\triangle XYZ$~~ в пл-ти XYZ:

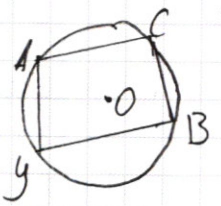
$BC = \frac{XY}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ - ср. линия

Тогда $BC = AY$

BC - ср. линия $\Rightarrow BC \parallel AY$

Тогда $ACBY$ - пар-м (по признаку пар-ма)

Сечение сферы $AYBC$:



O - проекция центра на ABC

~~Тогда~~ $AYBC$ - вписанный четырехуг. (т.к. любое сеч. сферы - окружность)

$\Rightarrow \angle AYB + \angle ACB = 180°$

Но $ACBY$ - пар-м $\Rightarrow \angle ACB = \angle AYB$

Тогда $\angle AYB = 90° \Rightarrow \triangle XYZ$ - п/уг ($\angle XYZ = 90°$)

По т. Пифагора из $\triangle XYZ$: $XZ = \sqrt{XY^2 + YZ^2}$

№6

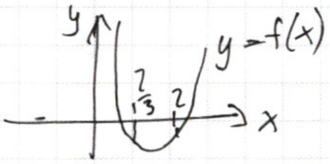
$\frac{8-6x}{3x-2} \geq ax+b \geq 18x^2-51x+28$

$\begin{cases} ax+b \geq 18x^2-51x+28 \quad (1) \\ \frac{8-6x}{3x-2} \geq ax+b \quad (2) \end{cases}$

(1) $ax+b \geq 18x^2-51x+28$

$18x^2-(51+a)x+28-b \leq 0$

Должно выполн. для $\forall x \in [\frac{2}{3}; 2]$, $\Rightarrow$ трехчлен должен иметь 2 корня, лежащих вне $(\frac{2}{3}; 2)$ или совпадающих с $\frac{2}{3}$ или 2 (совпасть может и лишь один корень, если второй $\notin (\frac{2}{3}; 2)$). Необходимы такие условия, т.к. имеем параболу ветвями вверх



$D=(51+a)^2-4\cdot18(28-b)$

Пусть $f(x)=18x^2-(51+a)x+28-b$

$f(\frac{2}{3}) \leq 0$ и $f(2) \leq 0$ (это как раз условия на корни)

Имеем систему: $\begin{cases} D>0 \text{ (2 корня)} \\ f(\frac{2}{3}) \leq 0 \\ f(2) \leq 0 \end{cases}$

(2) Домножим на $3x-2>0$ (на рассматр. полуинтервале)

$8-6x \geq 3ax^2-2ax+3bx-2b$

$3ax^2+(3b-2a+6)x-2b-8 \leq 0$

1. $a=0$: $(3b-2a+6)x-2b-8 \leq 0$

~~Тогда не должно быть корня на~~

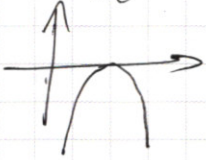
Пусть $g(x)=(3b-2a+6)x-2b-8$

Имеем лин. функцию $g(x) \Rightarrow$ достаточно условий: $\begin{cases} g(\frac{2}{3}) \leq 0 \\ g(2) \leq 0 \end{cases}$

2. $a<0$. Тогда ~~необход~~ возможны 2 случая:

$D_1 = (3b-2a+6)^2 + 12a(2b+8)$ — дискриминант

ил 1) $D_1 \le 0$:

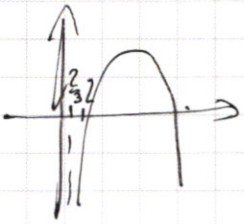


корней или нет, или есть лишь 1 корень

$\Rightarrow$ такой случ. подх. (т.к. ветви вниз)

2) $D_1 > 0$ и $\frac{2}{3}$ и 2 не леж. между корней

Пусть $h(x) = -3ax^2 + (3b-2a+6)x - 2b - 8$



~~$h\left(\frac{2}{3}\right) \ge 0$~~

$$\begin{cases} h\left(\frac{2}{3}\right) \le 0 \\ h(2) \le 0 \\ x_0 \in \left(\frac{2}{3}; 2\right) \\ D_1 > 0 \end{cases}$$

— вершина $x_0 = \frac{-3b+2a-6}{6a}$

3. $a>0$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$312 \cdot 13 = 936 \ldots 4056$

$KE = \frac{312}{5}$

$\frac{BP}{25} = \frac{2R-2r}{2R} = \frac{65-\frac{312}{5}}{65} = \frac{13}{5\cdot 65} = \frac{1}{25}$

$BP = 1$

$FE = \frac{312}{5} + \frac{5}{13} = \frac{4081}{13\cdot 5}$

$AE = 24\sqrt{26}$

$PD = 12$

$\sin A = \frac{\frac{4081}{65}}{\frac{65}{2}} = \frac{4081\cdot 2}{65^2}$

$FP \cdot \frac{312}{5} = 24 \cdot 1$

$FP = \frac{5}{13}$

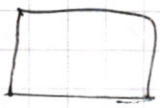
~~$\cos A = \sqrt{65^2 - 8}$~~

1. AE ~~24~~, KE
2. BP → PD
3. KP

$\frac{65}{12}$

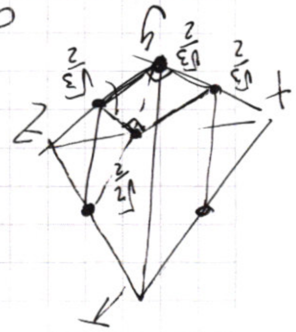
$650 + 130$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$



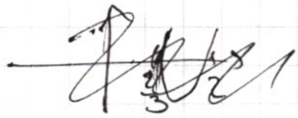
$\frac{8-6x}{3x-2} - ax - b \geq 0$

$3x - 2 = 0$



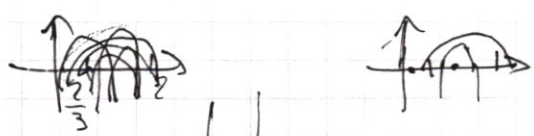
$\frac{8-6x-3ax^2+2ax-3bx+2}{} \geq 0$

$\cancel{3ax}\ 3ax^2 - 2ax + 3bx + 6x - 10 \leq 0$



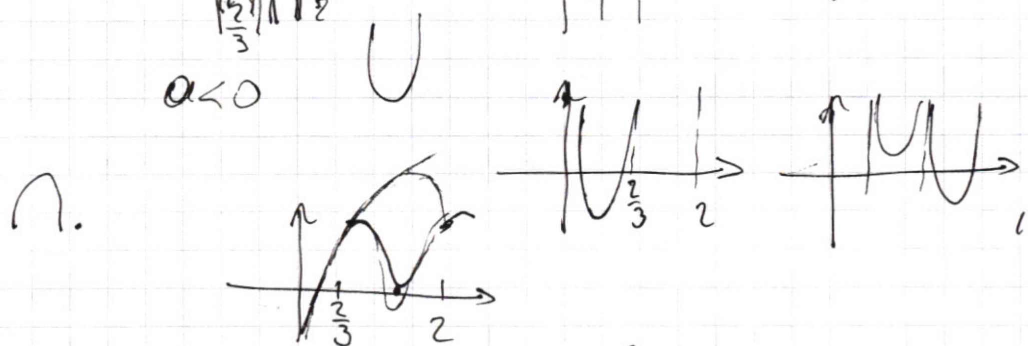
~~$f\left(\frac{2}{3}\right) \geq 0 \quad f(2)$~~

$a < 0$



$f\left(\frac{2}{3}\right) \geq 0 \quad f(2) \geq 0$

$a < 0$



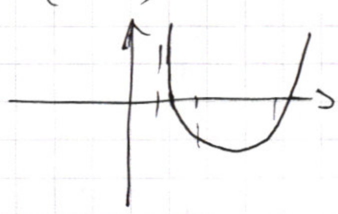
$18\cdot 4 - 102 - 2a + 28 - b \leq 0$

$-2a - b - 2 \leq 0$

$-2a - 3b + 6 \leq 0$

$\begin{cases} 2a + b + 2 \geq 0 \\ 2a + 3b - 6 \geq 0 \end{cases}$

$18x^2 - (51+a)x + 28 - b \leq 0$



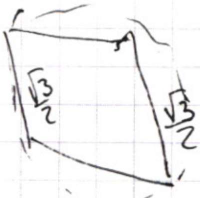
$f\left(\frac{2}{3}\right) \leq 0 \quad f(2) \leq 0$

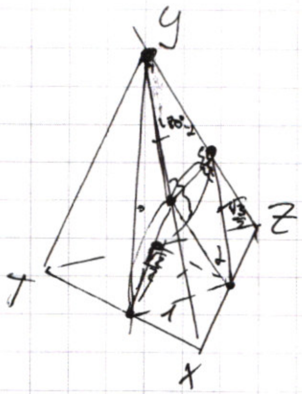
$8 - (51+a)\frac{2}{3} + 28 - b \leq 0 \mid \cdot 3$

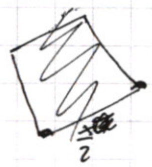
$24 - 102 - 2a + 84 - 3b \leq 0$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)







$XY=\sqrt{3}$
$TX=\sqrt{2}$
$TZ=2$

XZ – ?

~~2~~	~~0~~	11	2	20	1
~~3~~	~~0~~	12	0	21	1
4	0	13	3	22	2
5	1	14	1	23	5
6	0	15	1	24	0
7	1	16	0	25	2
8	0	17	4	26	3
9	0	18	0	27	0
10	1	19	4	28	1

$\cancel{f\left(\frac{a}{b}\right) f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y^3}\right) = f(x) + f(y^2)}$

$\cancel{f\left(\frac{28}{4}\right) = f(7)} \quad f\left(\frac{28}{5}\right) = f(28) + f\left(\frac{1}{5}\right) = \cancel{f(4) + f(7) + f(0{,}1) + f(2) =}$

$\cancel{= 3f}$

$\frac{1}{5} = \cancel{0{,}2 = 0{,}1\cdot 2}$

$f(0{,}2) = \overset{=0}{f(2)} + f(0{,}1) =$

$f(a) = f(a) + f(1) \qquad f(1)=0$

$f(a^2) = 2f(a) \qquad f\left(\frac{a}{b}\right) = f(a) + f\left(\frac{1}{b}\right) = f(a) +$

$f\left(\frac{1}{a}\right) = f(1) + f\left(\frac{1}{a}\right) \qquad f(a) = f(b)$

$f\left(\frac{1}{a^2}\right) = f\left(\frac{1}{a}\right) + f\left(\frac{1}{a}\right)$

$f\left(\frac{x}{y}\right) \qquad f\left(\frac{1}{a}\right) = f\left(a\cdot\frac{1}{a^2}\right) = f(a) + f\left(\frac{1}{a}\right) + f\left(\frac{1}{a}\right)$

$f\left(\frac{1}{a}\right) = -f(a)$

~~$x = 28$: 1, 2,~~

$f(x) - f(y) < 0$

$f(x) < f(y)$

~~$x=28$: y ... $x = 28$: $f(x) = f$~~

$f(28) = f(4) + f(7) = 2f(2) + f(7) =$

$= 0 + f(7) = \left[\frac{7}{4}\right] = 1$

$f(27) = 3f(3) = 3\left[\frac{3}{2}\right] = 3$

$f(26) = 3$

$n = 25$

$28 = 4 + n - 1$

$24 + 44 + 40 + 51 + 72 =$

$= 96 + 84 + 51 = \quad 4 \ldots 28$

$= 231$

~~24~~ 68 108 159

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)