МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР ______________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}; \qquad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy - x - 2y + 2}, \\ x^2 + 9y^2 - 4x - 18y = 12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geqslant \left|x^2 + 18x\right|^{\log_{12} 13} - 18x.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = 8$, $BD = 17$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 24$, $1 \leqslant y \leqslant 24$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x + 11}{4x + 3} \leqslant ax + b \leqslant -8x^2 - 30x - 17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}\right)$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB = 1$, $BD = 2$, $CD = 3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{4}{5} \end{cases}$$

Известно, что $\cos\alpha \neq 0$

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = -\frac{4}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}}\cos 2\beta = -\frac{2}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin 2\alpha\cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \cos 2\beta = \frac{2}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

1) $\cos 2\beta = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$\sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin 2\alpha \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} + \cos 2\alpha \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$2\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1$

$4\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha - \cancel{\sin^2\alpha} = -\cancel{\sin^2\alpha} - \cos^2\alpha$

$2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha = 0$

$(2\sin\alpha + \cos\alpha)\cos\alpha = 0$

$2\sin\alpha + \cos\alpha = 0$ $\downarrow \cos\alpha \neq 0$ из усл.

$2\operatorname{tg}\alpha + 1 = 0$ $\downarrow \cos\alpha \neq 0$

$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{2}$

2) $\cos 2\beta = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\frac{2}{\sqrt{5}} \sin 2\alpha - \frac{1}{\sqrt{5}} \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$2\sin 2\alpha - \cos 2\alpha = -1$

$4\sin\alpha\cos\alpha - \cancel{\cos^2\alpha} + \sin^2\alpha = -\sin^2\alpha - \cancel{\cos^2\alpha}$

$2\sin\alpha\cos\alpha + \sin^2\alpha = 0$

$(2\cos\alpha + \sin\alpha)\sin\alpha = 0$

$\sin\alpha = 0$ $\qquad$ $2\cos\alpha + \sin\alpha = 0$

$\underline{\operatorname{tg}\alpha = 0}$ $\qquad$ $2 + \operatorname{tg}\alpha = 0$ $\downarrow \cos\alpha \neq 0$ по усл.

$\underline{\operatorname{tg}\alpha = -2}$

Ответ: $-2; -\frac{1}{2}; 0$.

№5

$f(ab) = f(a) + f(b)$ $\qquad$ $1 \le x \le 24$ $\qquad$ $x, y \in \mathbb{N}$

$f(p) = \left[\frac{p}{4}\right]$ $\qquad$ $1 \le y \le 24$

$f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f\left(x \cdot \frac{1}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$

Посчитаем $f(p)$ для $p \in [1; 24]$:

$f(2) = 0$ $\qquad$ $f(23) = 5$

$f(3) = 0$ $\qquad$ Посчитаем $f(a)$, где $a \in \mathbb{N}$, $a \in [1; 24]$

$f(5) = 1$ $\qquad$ $f(1) = 0$, т.к. $f(2) = f(1 \cdot 2) = f(1) + f(2)$

$f(7) = 1$ $\qquad$ $f(4) = f(2 \cdot 2) = 0$ $\qquad$ $0 = f(1) + 0$

$\qquad$ $f(6) = f(2 \cdot 3) = 0$ $\qquad$ $f(1) = 0$

$f(11) = 2$ $\qquad$ $f(8) = f(2 \cdot 4) = 0$ $\qquad$ $f(15) = f(3 \cdot 5) = 1$ $\qquad$ $f(24) = f(2 \cdot 12) = 0$

$f(13) = 3$ $\qquad$ $f(9) = f(3 \cdot 3) = 0$ $\qquad$ $f(16) = f(4 \cdot 4) = 0$

$\qquad$ $f(18) = f(2 \cdot 9) = 0$

$f(17) = 4$ $\qquad$ $f(10) = f(2 \cdot 5) = 1$ $\qquad$ $f(20) = f(4 \cdot 5) = 1$

$\qquad$ $f(12) = f(3 \cdot 4) = 0$ $\qquad$ $f(21) = f(3 \cdot 7) = 1$

$f(19) = 4$ $\qquad$ $f(14) = f(2 \cdot 7) = 1$ $\qquad$ $f(22) = f(2 \cdot 11) = 2$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Для $a \in \mathbb{N}$:

$f(1) = f\left(\frac{a}{a}\right) = f(a) + f\left(\frac{1}{a}\right) = 0$

$f\left(\frac{1}{a}\right) = -f(a)$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f\left(x \cdot \frac{1}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) = f(x) - f(y)$

Если пара (x, y) подходит под условие $f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$, то пара (y, x) — не подходит, т.к.

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y) < 0$

$f\left(\frac{y}{x}\right) = f(y) - f(x) > 0.$

Если пара (x, y) не подходит под условие $f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$, то либо $f\left(\frac{x}{y}\right) > 0$ и пара (y, x) подходит, либо $f\left(\frac{x}{y}\right) = 0$ и пара (y, x) не подходит, т.к. $f\left(\frac{y}{x}\right) = 0$.

Всего можно составить 24^2 ~~пар~~ $= 576$ пар.

Среди них пар, для которых $f\left(\frac{x}{y}\right) = 0$ — $\underset{f(x)=f(y)=0}{11^2} + \underset{f(x)=f(y)=1}{7^2} + \underset{f(x)=f(y)=2}{2^2} + \underset{f(x)=f(y)=3}{1^2} + \underset{f(x)=f(y)=4}{2^2} + \underset{f(x)=f(y)=5}{1^2} = 121 + 49 + 4 + 1 + 4 + 1 = 180$

Осталось $576 - 180 = 396$ пар, для которых $f\left(\frac{x}{y}\right) \neq 0$.

~~Тогда~~ Пусть $f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$ — посчитаем пару (x, y) в ответ

тогда $f\left(\frac{y}{x}\right) > 0$ — посчитаем пару (x, y) в ответ второй раз

~~Итого~~ Т.е. 396 — удвоенное кол-во подходящих пар.

Ответ: 198 пар.

№ 2

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} & (1) \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 & (2) \end{cases}$$

(2) $x^2-4x+4+9y^2-18y+9-4-9=12$

$(x-2)^2+(3y-3)^2=25$

$3y=t$

$(x-2)^2+(t-3)^2=25$ – окр. с центром в т. $(2;3)$ и радиусом 5 в xOt.

$x'=x-2$

$t'=t-3$

$x'^2+t'^2=25$ – окр с центром в т. $(0;0)$ и радиусом 5 в $x'Ot'$

(1) $x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}$

$x-\frac{2}{3}t=\sqrt{x\cdot\frac{1}{3}t-x-\frac{2}{3}t+2}$

$x'+2-\frac{2}{3}(t'+3)=\sqrt{(x'+2)\cdot\frac{1}{3}(t'+3)-x'-2-\frac{2}{3}(t'+3)+2}$

$x'+\cancel{2}-\frac{2}{3}t'-\cancel{2}=\sqrt{(x'+2)(\frac{1}{3}t'+1)-x'-\frac{2}{3}t'-2}$

$x'-\frac{2}{3}t'=\sqrt{\frac{1}{3}x't'\cancel{+x'}+\cancel{\frac{2}{3}t'}\cancel{+2}\cancel{-x'}-\cancel{\frac{2}{3}t'}\cancel{-2}}$

$x'-\frac{2}{3}t'=\sqrt{\frac{1}{3}x't'}$

$$\begin{cases} x'^2-\frac{4}{3}x't'+\frac{4}{9}t'^2=\frac{1}{3}x't' \\ x'-\frac{2}{3}t'\geq 0 \rightarrow t'\leq\frac{3}{2}x' \end{cases}$$

$x'^2-\frac{5}{3}x't'+\frac{4}{9}t'^2=0$

$9x'^2-15x't'+4t'^2=0$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$x' - \frac{2}{3}t' = \sqrt{\frac{1}{3}x't' \cancel{+x'} + \cancel{\frac{2}{3}t'} \cancel{+2} \cancel{-x'} \cancel{-2} - \cancel{\frac{2}{3}t'} - \cancel{2} + \cancel{2}}$

$x' - \frac{2}{3}t' = \sqrt{\frac{1}{3}x't'}$

$x'^2 - \frac{4}{3}x't' + \frac{4}{9}t' = \frac{1}{3}x't'$

$x'^2 - \frac{5}{3}x't' + \frac{4}{9}t' = 0$

$\cancel{D} = 4t'^2 - 15x't' + 9x'^2 = 0$

$x_6 = \frac{15x'}{8}$

$4\left(\frac{t'}{x'}\right)^2 - 15\left(\frac{t'}{x'}\right) + 9 = 0$

$9x'^2 - 6x'$

$k = \frac{t'}{x'}$

$15 \times 15 = 75 + 15 = 225$

$4k^2 - 15k + 9 = 0$

$D = 225 - \overset{144}{16 \cdot 9} = 81 = 9^2$

$k_1 = \frac{15+9}{8} = \frac{24}{8} = 3$

$k_2 = \frac{15-9}{8} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

1)

$t' = 3x'$

$t - 3 = 3(x-2)$

$t - 3 = 3x - 6$

$t =$

2) $t' = \frac{3}{4}x'$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$9\left(\frac{x'}{t'}\right)^2 - 15\frac{x'}{t'} + 4 = 0$ / $t' \neq 0$, т.к. иначе $x' = 0$, но $(0;0) \notin$ окр. ②

$k = \frac{x'}{t'}$

$9k^2 - 15k + 4 = 0$

$D = 225 - 16 \cdot 9 = 81$

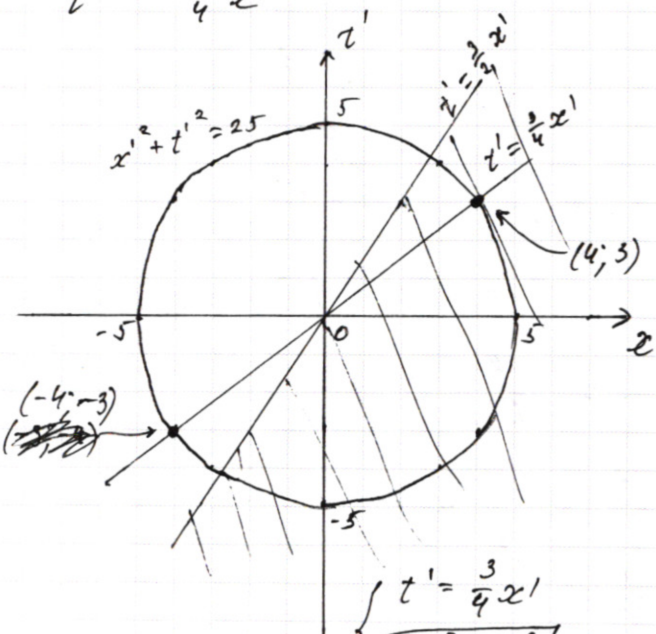
$k_1 = \frac{15+9}{18} = \frac{24}{18} = \frac{4}{3}$

$k_2 = \frac{15-9}{18} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$

1) $k = \frac{4}{3}$

$\cancel{x' = \frac{4}{3}t'}$

$t' = \frac{3}{4}x'$



$\begin{cases} t' = \frac{3}{4}x' \\ \sqrt{t'^2 + x'^2} = 5 \end{cases}$

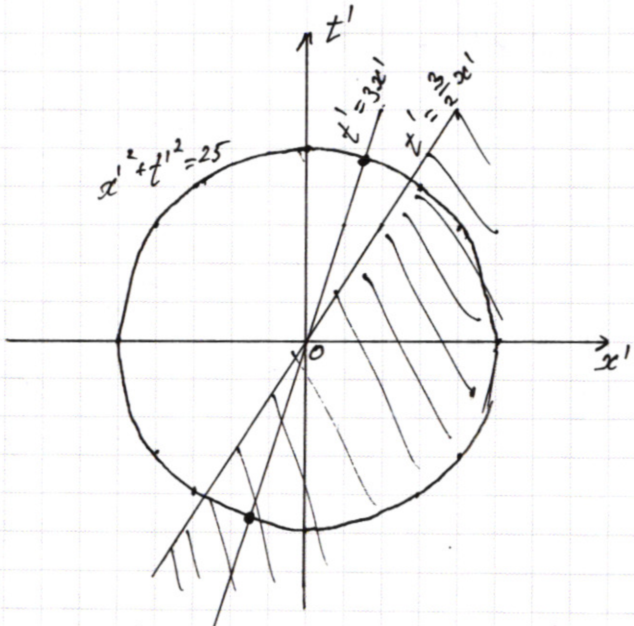
$\begin{cases} t' = \frac{3}{4}x' \\ \frac{9}{16}x'^2 + x'^2 = 25 \end{cases}$

$x' = 4$, $t' = 3$ | $x' = -4$, $t' = -3$ ⊗, т.к. $t' \leq \frac{3}{2}x'$

x' t'
$(4;3)$
x t
$(6;6)$
x y
$(6;2)$

$k = \frac{1}{3}$

$t' = 3x'$



$\begin{cases} t' = 3x' \\ \sqrt{t'^2 + x'^2} = 5 \end{cases}$

$\begin{cases} t' = 3x' \\ 9x'^2 + x'^2 = 25 \end{cases}$

$\begin{cases} t' = 3x' \\ x'^2 = \frac{5}{2} \end{cases}$

$x' = \sqrt{\frac{5}{2}}$, $t' = 3\sqrt{\frac{5}{2}}$ ⊗, т.к. $t' \leq \frac{3}{2}x'$ | $x' = -\sqrt{\frac{5}{2}}$, $t' = -3\sqrt{\frac{5}{2}}$

x' t'
$\left(-\sqrt{\frac{5}{2}}; -3\sqrt{\frac{5}{2}}\right)$
x t
$\left(2-\sqrt{\frac{5}{2}}; 3-3\sqrt{\frac{5}{2}}\right)$
x y
$\left(2-\sqrt{\frac{5}{2}}; 1-\sqrt{\frac{5}{2}}\right)$

Ответ: $(6;2)$; $\left(2-\sqrt{\frac{5}{2}}; 1-\sqrt{\frac{5}{2}}\right)$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3.

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geqslant |x^2+18x|^{\log_{12}13}-18x$$

ОДЗ: $x^2+18x>0$

$x(x+18)>0$

$+ \quad -18 \quad - \quad 0 \quad +$

$x\in(-\infty;-18)\cup(0;+\infty)$

На ОДЗ:

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geqslant (x^2+18x)^{\log_{12}13}-18x$$

$x^2+18x=t>0$

$$5^{\log_{12}t}+t \geqslant t^{\log_{12}13}$$

$$t^{\log_{12}5}+t-t^{\log_{12}13}\geqslant 0$$

$$1+t^{\log_{12}\frac{12}{5}}-t^{\log_{12}\frac{13}{5}}\geqslant 0$$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13} - 18x$

$x^2+18x = t > 0$ ОДЗ: $x^2+18x>0$

$5^{\log_{12}t} + t \geq |t|^{\log_{12}13}$

$\downarrow$ на ОДЗ.

$5^{\log_{12}t} + t \geq t^{\log_{12}13}$ $t = 12^{\log_{12}t}$

$5^{\log_{12}t} \geq t(t^{\log_{12}13-1} - 1)$

$\log_{12}t \log_{12}5 \geq \log_{12}t + \log_{12}(t^{\log_{12}13-1} - 1)$

$12^{\log_{12}5 \log_{12}t} + 12^{\log_{12}t} \geq 12^{\log_{12}13 \log_{12}t}$

$t^{\log_{12}5} + t \geq t^{\log_{12}13}$

$t=0$ $t^{\log_{12}5} + t - t^{\log_{12}13} \geq 0$

$\varnothing$ по ОДЗ $1 + t^{1-\log_{12}5} - t^{\log_{12}13-\log_{12}5} \geq 0$

$1 + t^{\log_{12}\frac{12}{5}} - t^{\log_{12}\frac{13}{5}} \geq 0$

$5^{\log_{12}t} + 12^{\log_{12}t} \geq 13^{\log_{12}t}$ $t^{\log_{12}\frac{12}{5}} \vee t^{\log_{12}\frac{13}{5}}$

~~$1 + \left(\frac{5}{12}\right)^{\log_{12}t} \geq 13$~~

$1 + \left(\frac{12}{5}\right)^{\log_{12}t} \geq \left(\frac{13}{5}\right)^{\log_{12}t}$

$\left(\log_{12}\frac{12}{5} - \log_{12}\frac{13}{5}\right)(t-1) \vee 0$

$\log_{12}\frac{12}{13}(t-1) \vee 0$

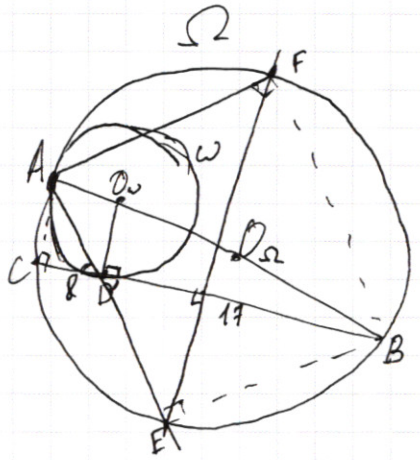
$\wedge$

0

~~$t \neq 1$~~

$t<1$ $t>1$

$(>)$ $(<)$



$r_\Omega = ?$ $CD = 8$

$r_\omega = ?$ $BD = 17$

$\angle AFE = ?$

$S_{\triangle AEF} = ?$

$\frac{17}{AD} = \frac{DE}{8}$ $AD \cdot DE = 17 \cdot 8$

$\frac{2r_\Omega}{2r_\Omega - r_\omega} = \frac{25}{17}$

$34 r_\Omega = 50 r_\Omega - 25 r_\omega$

$25 r_\omega = 16 r_\Omega$

$\frac{r_\Omega}{r_\omega} = \frac{25}{16}$

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(p) = \left[\frac{p}{4}\right]$

$1 \le x \le 24$ $f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$

$1 \le y \le 24$

$x, y \in \mathbb{N}$ $f\left(x \cdot \frac{1}{y}\right) < 0$

$f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) < 0$

$f(2) = 0$	$f(1) = 0$
$f(3) = 0$	$f(4) = 0$
$f(5) = 1$	$f(6) = 0$
$f(7) = 1$	$f(8) = 0$
$f(11) = 2$	$f(9) = 0$
$f(13) = 3$	$f(10) = 1$
$f(17) = 4$	$f(12) = 0$
$f(19) = 4$	$f(14) = 1$
$f(23) = 5$	$f(15) = 1$
	$f(16) = 0$
	$f(18) = 0$
	$f(20) = 1$
	$f(21) = 1$
	$f(22) = 2$
	$f(24) = 0$

$f(1) = f\left(\frac{a}{a}\right) = f(a) + f\left(\frac{1}{a}\right) = 0$

$$\begin{array}{r} \times\, 24 \\ 24 \\ \hline 96 \\ +\,48 \\ \hline 576 \end{array}$$

$\underbrace{121 + 49}_{170} + \underbrace{4 + 1}_{5} + \underbrace{4 + 1}_{5} =$ $\underset{10}{+}$

$= 180$

$396 : 2 = 198$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5} \end{cases}$$

$tg\alpha - ?$ $\cos\alpha \neq 0$

≥ 3 знак.

$$\begin{cases} \sin 2\alpha \cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \sin 2\alpha \cos 4\beta + \cos 2\alpha \sin 4\beta + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5} \end{cases}$$

$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$

$$\begin{cases} \sin^2(2\alpha+2\beta) = \frac{1}{5} \\ \sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5} = 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = -\frac{4}{5} \end{cases}$$

~~$\sin^2(2\alpha+2\beta) - 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = 1$~~

~~$(\sin(2\alpha+2\beta))(\sin(2\alpha+2\beta) - 2\cos 2\beta) = 1$~~

$2\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\cos 2\beta = -\frac{4}{5}$

$\frac{1}{\sqrt{5}}\cos 2\beta = \frac{2}{\sqrt{5}^2}$

$\cos 2\beta = \frac{2}{\sqrt{5}}$ $\sin 2\beta = \pm\sqrt{1-\frac{4}{5}} = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin 2\alpha \cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\frac{2}{\sqrt{5}}\sin 2\alpha + \frac{1}{\sqrt{5}}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$2\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1$

$4\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha - \cancel{\sin^2\alpha} = -\cancel{\sin^2\alpha} - \cos^2\alpha$

$4\sin\alpha\cos\alpha + 2\cos^2\alpha = 0$

$(2\sin\alpha + \cos\alpha)\cos\alpha = 0$

$2\sin\alpha + \cos\alpha = 0$

$2tg\alpha + 1 = 0$

$tg\alpha = -\frac{1}{2}$

$\frac{2}{\sqrt{5}}\sin 2\alpha - \frac{1}{\sqrt{5}}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$2\sin 2\alpha - \cos 2\alpha = -1$

$4\sin\alpha\cos\alpha - \cancel{\cos^2\alpha} + \sin^2\alpha = -\sin^2\alpha - \cancel{\cos^2\alpha}$

$2\sin\alpha\cos\alpha + \sin^2\alpha = 0$

$(2\cos\alpha + \sin\alpha)\sin\alpha = 0$

$\sin\alpha = 0$ $2\cos\alpha + \sin\alpha = 0$

$tg\alpha = 0$ $2 + tg\alpha = 0$

$tg\alpha = -2$

Ответ: $-2; -\frac{1}{2}; 0$

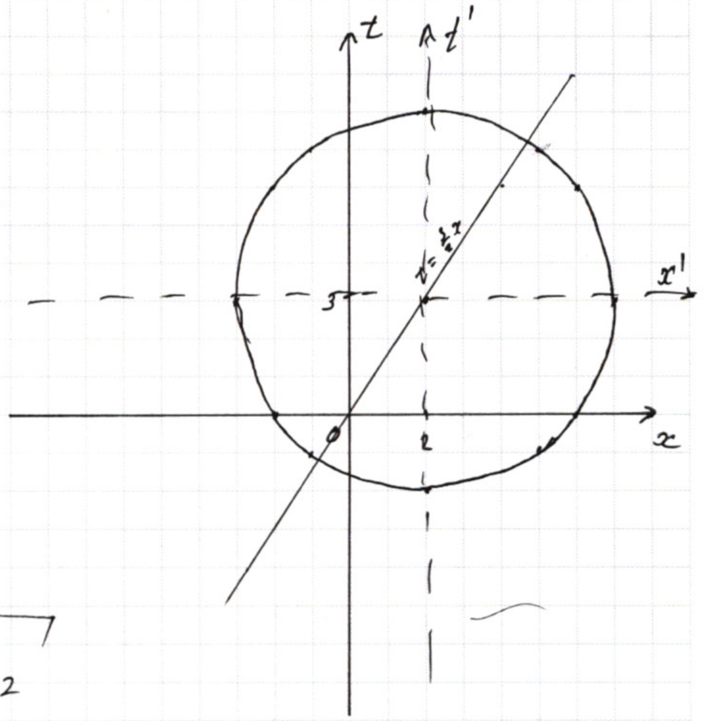
☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} & (1)\\ x^2+9y^2-4x-18y=12 & (2)\end{cases}$$



(2) $x^2-4x+4+9y^2-18y+9-4-9=12$

$(x-2)^2+(3y-3)^2=25$

$\cancel{(x-2)^2+9(y-1)^2=25}$

$3y=t$

$(x-2)^2+(t-3)^2=25$ - окр.

(1) $x-\frac{2}{3}t=\sqrt{x\cdot\frac{1}{3}t-x-\frac{2}{3}t+2}$

$x-\frac{2}{3}t=\sqrt{\frac{1}{3}t(x-2)-(x-2)}$

$x-\frac{2}{3}t=\sqrt{(x-2)(\frac{1}{3}t-1)}$ $\qquad (3x-2t)^2=3(x-2)(t-3)$

$$\begin{cases} x^2-2\cdot\frac{2}{3}xt+\frac{4}{9}t^2=\frac{1}{3}xt-x-\frac{2}{3}t+2\\ x-\frac{2}{3}t\geq 0 \to t\leq\frac{3}{2}x\end{cases}$$

$x^2-\frac{4}{3}xt+\frac{4}{9}t^2=\frac{1}{3}xt-x-\frac{2}{3}t+2$

$x^2-\frac{5}{3}xt+x+\frac{4}{9}t^2+\frac{2}{3}t-2=0$

$\cancel{\frac{4}{9}t^2+\left(\frac{2}{3}-\frac{5}{3}x\right)t+(x^2+x-2)=0}$

$\cancel{x_в=\frac{\frac{5}{3}x-\frac{2}{3}}{}}$

$\cancel{D=\left(\frac{2}{3}-\frac{5}{3}x\right)^2-\frac{16}{9}(x^2+x-2)=}$

$9x^2-15xt+9x+4t^2+6t-18=0$

$x'=x-2$, $t'=t-3$ $\rightarrow$ $x'^2+t'^2=25$

$x=x'+2$

$t=t'+3$

$x'+2-\frac{2}{3}(t'+3)=\sqrt{(x'+2)\cdot\frac{1}{3}(t'+3)-x'-2-\frac{2}{3}(t'+3)+2}$.

$x'+\cancel{2}-\frac{2}{3}t'-\cancel{2}=\sqrt{(x'+2)(\frac{1}{3}t'+1)-x'-2-\frac{2}{3}t'-2+2}$