МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 2

ШИФР ______________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}; \qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-12y = \sqrt{2xy-12y-x+6}, \\ x^2+36y^2-12x-36y = 45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$10x + \left|x^2-10x\right|^{\log_3 4} \geqslant x^2 + 5^{\log_3\left(10x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = \frac{15}{2}$, $BD = \frac{17}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a)+f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $2 \leqslant x \leqslant 25$, $2 \leqslant y \leqslant 25$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{16x-16}{4x-5} \leqslant ax+b \leqslant -32x^2+36x-3$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[\frac{1}{4};1\right]$.

$ax+b=y=57\frac{-4}{4x-5}$

$(ax+b)(4x-5)$

$=20x-25+4$

$4ax^2-5ax+4b=20x-21$

7. [6 баллов] Дана пирамида $KLMN$, вершина N которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра KN. Известно, что $KL = 3$, $KM = 1$, $MN = \sqrt{2}$. Найдите длину ребра LM. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

② $\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6} & (1) \\ x^2+36y^2-12x-36y=45 & (2) \end{cases}$

Преобразуем 2: $x^2-12x+36+36y^2-36y+9=90$

$(x-6)^2+(6y-3)^2=90$

Возведем (1) в квадрат учитывая $x-12y\geq 0$:

$x^2-24xy+144y^2=2xy-12y-x+6$

$x^2-26xy+x+\underbrace{144y^2+12y-6}_{6(24y^2+2y-1)}=0$

$D=25(4y^2-4y+1)=(5(2y-1))^2 \Rightarrow x_{1,2}=$

$=\frac{26y-1\pm(10y-5)}{2}=\frac{36y-6}{2} \vee \frac{16y+4}{2}$

1) 2)

подставим в (2):

1) $(18y-9)^2+(6y-3)^2=90$

$\cancel{81(2y-1)^2}+(6y-3)^2=90$

$81(2y-1)^2+9(2y-1)^2=90$

$2y-1=\pm 1$

$y=1 \vee y=0 \Rightarrow x=15 \vee x=-3$

$\Downarrow$ $\Downarrow$

$15-12>0$ $-3-0<0 \Rightarrow$ неОк.

$\Downarrow$

Ок

☐ черновик ☑ чистовик Страница № 1

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

2) $(8y+2-6)^2+(6y-3)^2=90$

$16(2y-1)^2+9(2y-1)^2=90$

$25(2y-1)^2=90$

$2y-1=\pm\frac{90}{25}=\pm\frac{18}{5} \Rightarrow y=\frac{23}{10} \vee -\frac{13}{10}$

$\Rightarrow x=8\cdot\frac{23}{10}+2=\frac{4}{5}\cdot 23+2 \vee 8\cdot -\frac{13}{10}+2=-\frac{4}{5}\cdot 13+2$

$x-12y=\frac{102}{5}-\frac{6\cdot 23}{5}<0 \Rightarrow$ не Ок

$x-12y=\frac{-52+10}{5}+\frac{6\cdot 13}{5}=$

$=\frac{78-42}{5}=\frac{36}{5}>0 \Rightarrow$ Ок.

Так как мы подставляли значения в обе системы и учли ОДЗ на $a=\sqrt{b} \Rightarrow a\geq 0$ (b не обязательно проверять т.к. если $b<0$ то у нас не было бы корней)

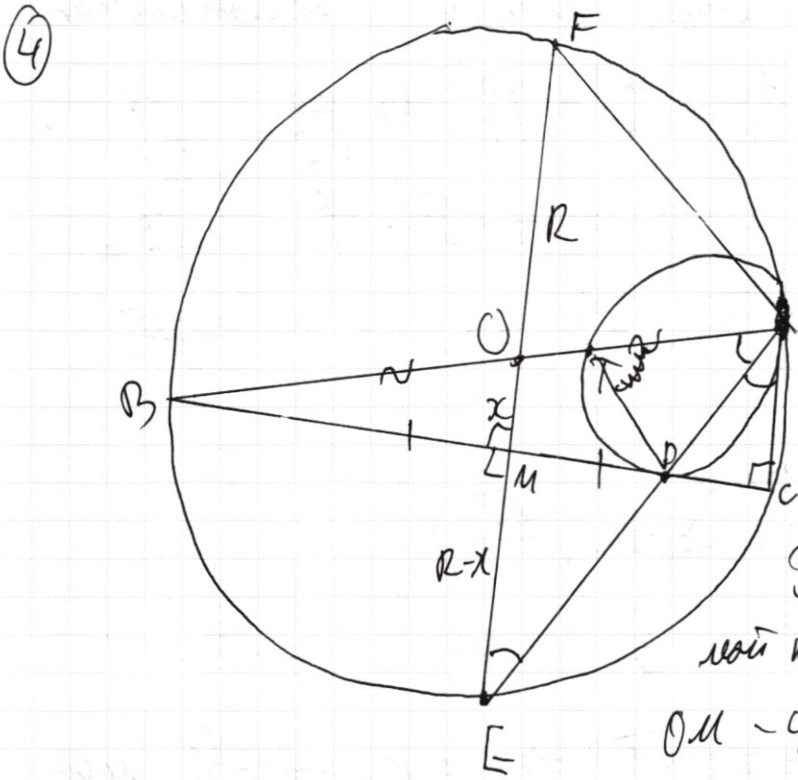
Ответ: ~~$x=\frac{102}{5}; y=...$~~

$x=-\frac{42}{5};\ y=-\frac{13}{10}$

$x=15;\ y=1.$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

(4)



Дано: $CD = \frac{15}{2}$; $BD = \frac{17}{2}$

$BM = MC$ т.к $\triangle BEC$ – р/б ($BE = EC = R$) R – радиус большей окр-ти, r – меньшей и $x = OM$; Тогда $BM + MC = BD + CD = 16 \Rightarrow BM = 8$; $MD = \frac{1}{2}$; $DC = 7{,}5$;

Рассмотрим $\triangle ABC$: $\angle C$ – прямой т.к опирается на диаметр; OM – средняя линия $\Rightarrow AC = 2x$; $\angle OMB = 90°$ $\Rightarrow$ Рассмотрим $\triangle MDE$: $\angle DME = 90 \Rightarrow$ т.к $\angle MDE = \angle ADC$ как вертикальные то $\triangle MDE \sim \triangle ADC \Rightarrow \angle MED = \angle DAC$ а т.к EOA – р/б то он равен и $\angle OAD \Rightarrow AD$ – биссектриса в $BAC \Rightarrow$ по св-ву биссектрисы: $\frac{BA}{AC} = \frac{2R}{2x} = \frac{BD}{DC} = \frac{17}{15}$; Также по св-ву пересекающихся хорд имеем $BM \cdot MC = EM \cdot FM = 8 \cdot 8 = (R-x)(R+x)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{R}{x} = \frac{17}{15} \\ R^2 - x^2 = 64 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{R}{x} = \frac{17}{15} \\ R^2 - \left(\frac{15}{17}\right)^2 R^2 = 64 \end{cases} \Rightarrow R = 17; \quad x = 17 \cdot \frac{15}{17} = 15$$

Тогда $\operatorname{tg} \angle CAD = \frac{\frac{15}{2}}{2 \cdot \frac{15}{\sqrt{17}}} = \frac{\sqrt{17}}{4} \Rightarrow \sin \angle CAD = \sqrt{\frac{17}{33}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{7{,}5}{DA} = \sqrt{\frac{17}{33}} \Rightarrow DA = \frac{15}{2} \cdot \sqrt{\frac{33}{17}} \Rightarrow$ к подобия $\triangle MDE$ и $ADC = \frac{MD}{DC} = \frac{1}{15}$

$\Rightarrow ED = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{33}{17}} \Rightarrow EA = 8\sqrt{\frac{33}{17}} \Rightarrow$ по т. синусов для

~~$\triangle EFA$: $\frac{8\sqrt{\frac{33}{17}}}{\sin\angle F} = 2\sqrt{17} \Rightarrow \sin\angle F = \frac{4\sqrt{\frac{33}{17}}}{2\sqrt{17}} = \frac{4\sqrt{33}}{17}$~~

~~$\Rightarrow \angle F = a\sin\left(\frac{4\sqrt{33}}{17}\right) \Rightarrow S_{\triangle AEF} = \frac{2R \cdot 8\sqrt{\frac{33}{17}} \cdot \sqrt{\frac{17}{33}}}{2} = 8\sqrt{17}$~~

~~Также рассмотрим $\triangle ABD$ и $\triangle BTD$!~~

~~$\angle TAD = \angle TDB$ как угол между хордой и касательной~~

~~$\Rightarrow$ запишем подобие: $\frac{AB}{DB} = \frac{BD}{BT} = \frac{AD}{DT}$ но $\frac{AB}{DB} = \frac{2\sqrt{17}}{\left(\frac{17}{2}\right)} =$~~

~~$= \frac{4}{\sqrt{17}}$ и $AD = \frac{15}{2}\sqrt{\frac{33}{17}} \Rightarrow DT = \frac{15}{2}\sqrt{\frac{33}{17}} \cdot \frac{\sqrt{17}}{4} = \frac{15\sqrt{33}}{8} \Rightarrow$~~

~~$\Rightarrow \frac{DT}{\sin\angle TAD} = 2r \Rightarrow \frac{15\sqrt{33}}{8} \cdot \frac{\sqrt{33}}{17} = 2r \Rightarrow r = \frac{33 \cdot 15}{8 \cdot 17}$~~

~~Ответ: $R = \sqrt{17}$; $r = \frac{33 \cdot 15}{8 \cdot 17}$;~~

~~$S_{\triangle AEF} = 8\sqrt{17}$; $\angle F = a\sin\left(\frac{4\sqrt{33}}{17}\right)$~~

Тогда $tg\angle CAD = \frac{7{,}5}{30} = \frac{1}{4} \Rightarrow \sin\angle CAD = \sqrt{\frac{1}{17}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{7{,}5}{DA} = \sqrt{\frac{1}{17}} \Rightarrow DA = 7{,}5\sqrt{17} \Rightarrow$ т.к. к подобия $\triangle MDE$

и $\triangle ADC = \frac{MD}{DC} = \frac{1}{15}$ то $ED = \frac{1}{2}\sqrt{17} \Rightarrow EA = 8\sqrt{17} \Rightarrow$

по т. синусов для $\triangle EFA$: $\frac{\cancel{8}4\sqrt{17}}{\sin\angle F} = 2 \cdot 17 \Rightarrow \sin\angle F =$

$= \frac{4}{\sqrt{17}} \Rightarrow \angle F = a\sin\left(\frac{4}{\sqrt{17}}\right) \Rightarrow S_{AEF} = \frac{2R \cdot 8\sqrt{17} \cdot \frac{1}{4}}{2} =$

$= 2 \cdot 17 \cdot \sqrt{17} = 34\sqrt{17} \Rightarrow$ рассмотрим $\triangle ABD$ и $\triangle BTD$!

Они подобны по 2 углам т.к $\angle TAD = \angle TDB$ как углы между хордой и касательной $\Rightarrow \frac{AB}{DB} = \frac{BD}{DT} = \frac{AD}{BT} \Rightarrow DT = \frac{BD \cdot BD}{AB} = \frac{8{,}5 \cdot 8{,}5}{17} =$

$= \frac{17 \cdot 17}{4 \cdot 17} = \frac{17}{4} \Rightarrow$ по т. синусов $\triangle ADT$: $\frac{17}{4 \cdot \frac{1}{4}} = 2r \Rightarrow$

$\Rightarrow r = \frac{17}{2} \Rightarrow$ Ответ: $R = 17$ $\angle F = a\sin\left(\frac{4}{\sqrt{17}}\right)$

$r = \frac{17}{2}$

$S = 34\sqrt{17}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3) ~~$10x + |x^2-10x|^{\log_3 4} \geq x^2 + 5^{\log_3(10x-x^2)}$~~

~~Ограничения: $10x - x^2 > 0 \Rightarrow x \in (0;10)$~~

~~Докажем лемму: на ОДЗ $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$:~~

~~$\log_a(a^{\log_b c}) = \log_a c^{\log_b a} \Leftrightarrow \log_b c = \log_a c \cdot \log_b a \Leftrightarrow \log_b c = \log_b c$~~

~~$\Rightarrow 10x + |x^2-10x|^{\log_3 4} - x^2 \geq \underbrace{5^{\log_3(10x-x^2)}}_{(10x-x^2)^{\log_3 5}}$~~

~~Замена $a = 10x - x^2 > 0$~~

~~$a + |-a|^{\log_3 4} \geq a^{\log_3 5}$~~

~~$a + |a|^{\log_3 4} \geq a^{\log_3 5}$~~ } переходы равносильны т.к $a>0$

~~$a + a^{\log_3 4} \geq a^{\log_3 5}$~~ ~~поделим на $a^{\log_3 5} > 0$~~;

~~$3^{\log_3 a} + 4^{\log_3 a} \geq 5^{\log_3 a}$~~ ← переход из леммы

~~$2^{\log_3 a} \geq 0$ Выполняется всегда на ОДЗ. Примечание: $|a|$ раскрывается однозначно т.к $a > 0$~~

1) $\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin(2\alpha + 4\beta) + \sin(2\alpha) = -\frac{2}{5} = 2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos(2\beta) \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$; $\sin 2\beta = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$\Rightarrow$ подставим: $\sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta + \sin 2\beta \cdot \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$$\frac{\sin 2\alpha}{\sqrt{5}} + \frac{2\cos 2\alpha}{\sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\sin 2\alpha + 2\cos 2\alpha = -1.$$

Замена $\cos 2\alpha = a$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

$\Rightarrow \sin 2\alpha = \pm\sqrt{1-a^2} \Rightarrow 2a+1 = \mp\sqrt{1-a^2} \Rightarrow$ возведем в квадрат и в конце проверим значения: $4a^2+4a+1 = 1-a^2$

$\Rightarrow (5a+4)\cdot a = 0$; $a=0 \Rightarrow 2a+1 = +\sqrt{1-a^2} \Leftrightarrow 1=1$

если $a = -\frac{4}{5}$ то $-\frac{8}{5}+1 = -\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2} \Leftrightarrow -\frac{3}{5} = -\frac{3}{5}$

$a=0 \Rightarrow 2\alpha = \frac{\pi}{2}+\pi k \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2} \Rightarrow tg(\alpha) = tg(\pm\frac{\pi}{4}) = \pm 1$

$a = -\frac{4}{5} \Rightarrow 2\alpha = \pm a\cos(-\frac{4}{5})+2\pi k$. Подставим в 1 выражение все значения: ~~sin~~ $2\alpha = a\cos(-\frac{4}{5}) \Rightarrow \sin(a\cos(-\frac{4}{5}))\cdot\frac{1}{\sqrt5}+\frac{2}{\sqrt5}\cdot\cos(a\cos\frac{-4}{5})$

$= \frac{3}{5\sqrt5} - \frac{8}{5\sqrt5} = -\frac{5}{5\sqrt5} = -\frac{1}{\sqrt5}$ - да и 2 выраж аналогично

верно; $2\alpha = -a\cos(-\frac{4}{5}) \Rightarrow \sin(-a\cos(-\frac{4}{5}))\cdot\frac{1}{\sqrt5}+\frac{2}{\sqrt5}\cdot\cos(-a\cos-\frac{4}{5}) = -\frac{3}{5\sqrt5}+\left(\frac{-8}{5\sqrt5}\right) \neq -\frac{1}{\sqrt5} \Rightarrow$ нам подходят 3 значения и т.к в условии сказано что их ≥ 3 а у нас их ≤ 3 то все эти значения верны и других нет $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Ответ: $tg\,\alpha = \pm 1$

$$tg\,\alpha = a\,tg\left(\frac{a\cos(-\frac{4}{5})}{2}\right)$$

(3) $10x + |x^2-10x|^{\log_3 4} \geq x^2 - 5^{\log_3(10x-x^2)}$

ОДЗ: $10x - x^2 > 0 \Rightarrow x \in (0;10)$

Лемма: $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$ на ОДЗ: $\lg_a a^{\log_b c} = \lg_a c^{\log_b a} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_b c = \lg_a c\cdot\log_b a = \log_b(c)$ - доказано.

сделаем замену $a = 10x-x^2$ учтя что

$|-a|^{\log_3 4} = 4^{\log_3|-a|}$ но $a>0 \Rightarrow$ это просто $4^{\log_3 a}$

Тогда имеем: $a + 4^{\log_3 a} \geq 5^{\log_3 a}$

$$3^{\log_3 a} + 4^{\log_3 a} \geq 5^{\log_3 a}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Поделим на $5^{\log_3 a} > 0$:

$f(a) = \left(\frac{3}{5}\right)^{\log_3 a} + \left(\frac{4}{5}\right)^{\log_3 a} \geq 1$ убывает.

$f(a)$ монотонна $\Rightarrow$ может иметь с $y = 1$ не более

одной т. пересеч $\Rightarrow$ т.к $3^2 + 4^2 = 5^2$ то эта точка при

$\log_3 a = 2 \Rightarrow$ при $\log_3 a \leq 2$ нер-во выполнено $\Rightarrow$

$\Rightarrow \log_3 10x - x^2 \leq \log_3 9$ на ОДЗ равносильно

$10x - x^2 \leq 9$

$x^2 - 10x + 9 \geq 0$

$x^2 - x - 9x + 9 \geq 0$

$(x-1)(x-9) \geq 0$

$x \leq 1; x \geq 9$

на пересечении с ОДЗ Ответ: $x \in (0; 1] \cup$
$\cup [9; 10)$

⑥ $\frac{16x-16}{4x-5} \le ax+b \le -32x^2+36x-3$

$5+\frac{4}{4x-5} \le ax+b \le -32x^2+36x-3$

1) 2)

1): гипербола сдвинута вверх на 5; $y=x$ при:

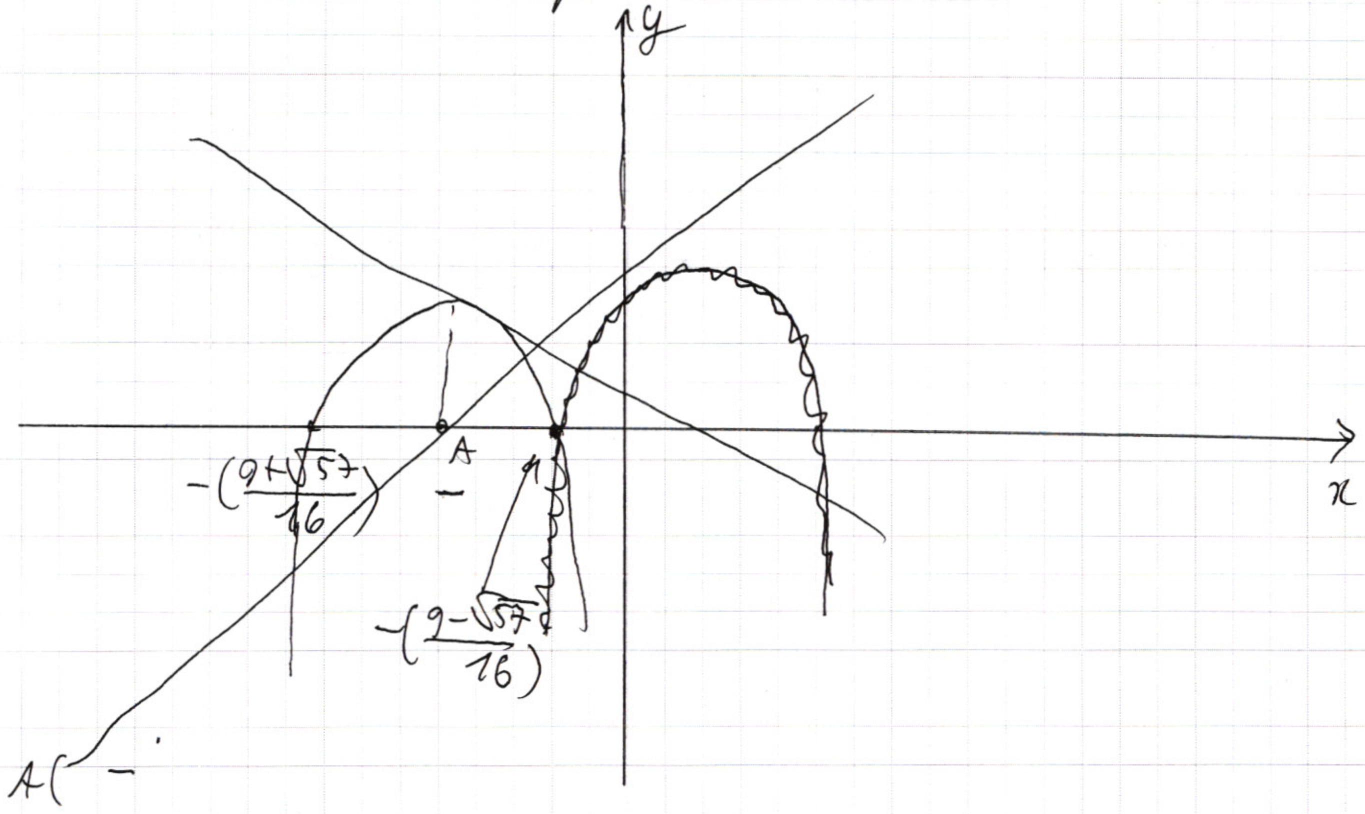
$x=\frac{4}{4x-5} \Leftrightarrow 4x^2-5x-4=0 \quad (x\ne\frac{5}{4})$

$x_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{89}}{8} \Rightarrow$ в 1 четверти $y=x$ при $\frac{5+\sqrt{89}}{8}+5$

а в 3 четверти при $\frac{5-\sqrt{89}}{5}+5>0 \Rightarrow$ эта точка тоже в 1 четверти

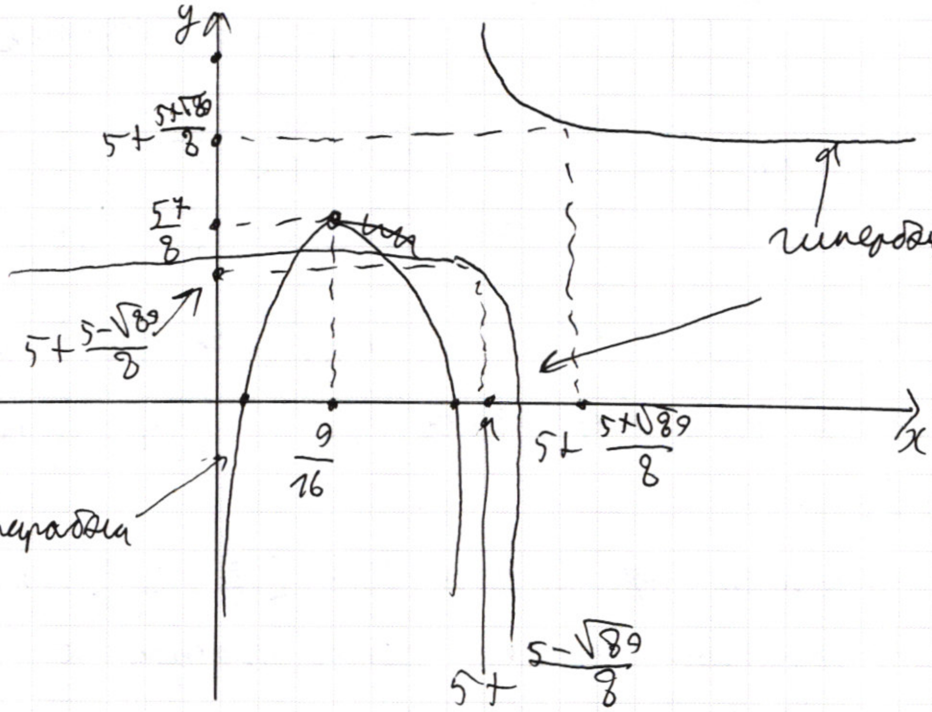
2) $-32x^2+36x-3$ — парабола ветвями вниз; $x_в=$
$=\frac{9}{16}$; $x_{1,2}=\cancel{+}\left(\frac{36\pm\sqrt{2^4\cdot 57}}{64}\right)=\cancel{ии}\left(\frac{9\pm\sqrt{57}}{16}\right)$

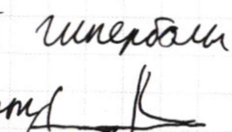
и имеем $ax+b$ — прямая



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$y_в = f\left(\frac{9}{16}\right) = \frac{57}{8}$

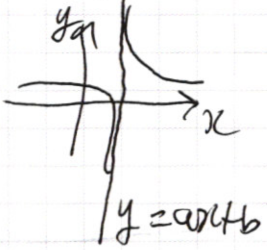


Нам подходят прямые которые лежат и внутри и гиперболы и вне ~~окр~~ параболы $\Rightarrow$ если $a=0$ то нам подходят такие прямые $y = b$ что они выше и вершин но ниже асимптоты $\Rightarrow$ $\begin{cases} a=0 \\ b \in \left[\frac{57}{8}; 5+\frac{5+\sqrt{89}}{8}\right] \end{cases}$. Также нам подходят все такие прямые что лежат между общей касательной гиперболы и ей же но отраженной для 2 других асимптот (

). В этом случае стоит учесть что прямая также должна лежать выше $y_в$ чтобы выполнялись условия $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ нам нужны 2 прямые: касательная 1 и прямая проходящая через $y_в$ но не пересекающая верхнюю часть гиперболы. Если $a > 0$ то прямая проходящая через

Ув кинется гиперболы или пересечет ее => первая граница $a=0$. Если прямая касается гиперболы следующим образом:



то это будет 2 границей =>

$\Rightarrow x=-\frac{b}{a}$ подставляем в уравнение

$5+\frac{4}{4(x)-5}=0 \Rightarrow 5+\left(\frac{4}{4\cdot -\frac{b}{a}-5}\right)=0$

$\Rightarrow \frac{-4}{\frac{4b}{a}+5}=-5 \Rightarrow \frac{4b}{a}+5=\frac{4}{5} \Rightarrow \frac{4b}{a}=-\frac{21}{5}$

или же $y=ax+b=5+\frac{4}{4x-5} \Rightarrow 4ax^2-x(5a+20-4b)-20b+21=0 \Rightarrow D$ выражения $=0 \Rightarrow (5a-4b+20)^2+4\cdot 4\cdot 20ab= =0$.

Вспоминаем про то что $x\in[\frac{1}{4};1]$, получаем, что подойдут только ранее указанные a и b =>

=> ~~a≠0~~ **Ответ:** $\begin{cases} a=0 \\ b\in\left[\frac{57}{8}; 5+\frac{5+\sqrt{89}}{8}\right] \end{cases}$

$ED \cdot DA = 8{,}5 \cdot 7{,}5$

$$\begin{cases} \cancel{\left(\sqrt{4x^2+7{,}5^2}\right)\left(\sqrt{(R-x)^2+\left(\tfrac{1}{2}\right)^2}\right) = 8{,}5 \cdot 7{,}5} \Rightarrow \left(\sqrt{4x^2+7{,}5^2}\right)\sqrt{64+\tfrac{1}{4}-2Rx} = 8{,}5 \cdot 7{,}5 \\ \cancel{R^2-x^2} = 64 \end{cases}$$

$\triangle MED \sim \triangle DAC$: $\frac{2x}{R-x} = \frac{15}{2}$

$4x = 15R - 15x$

$19x = 15R$

$R^2 - \left(\frac{15}{19}R\right)^2 = 64$

$\frac{34 \cdot 4}{16} R^2 = 64\ 16$

$R^2 = \frac{256}{34}$

$R = \frac{16}{\sqrt{34}}$

$\frac{R}{x} = \frac{17}{15}$

$R^2 - \left(\frac{15}{17}R\right)^2 = 64$

$\frac{2R \cdot 32R}{17} = 64$

$R^2 = 17$

$\underline{R = \sqrt{17}.}$

$x = \frac{15}{19} \cdot \frac{16}{\sqrt{34}}$

$\angle AEF = \alpha$

$\cos 2\alpha = \frac{15}{19}$

$2t^2 - 1 = \frac{15}{19}$

$2t^2 = \frac{34}{19}$

$t = \pm\sqrt{\frac{17}{19}}$

$2\alpha = \pm \arccos\left(\frac{15}{19}\right) + 2\pi n$

$\alpha = \frac{\arccos\left(\frac{15}{19}\right)}{2} + \pi k$ т.к угол острый

$\triangle ABD \sim \triangle DBT$

$\Rightarrow x = $ $\frac{AB}{DB} = \frac{BD}{BT} = \frac{AD}{DT}$

$\sin\left(\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{17}}{4}\right) = \frac{\frac{\sqrt{17}}{4}}{\sqrt{1+\frac{17}{16}}} = \frac{\frac{\sqrt{17}}{4}}{\sqrt{\frac{33}{4}}} = \sqrt{\frac{17}{33}}$

$\sin 2\alpha =$

$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sqrt{17}}{\sqrt{16}}$

$\frac{450}{9}$

$\sin\alpha^2 = \frac{17}{16}\cos^2\alpha$

$\sin\alpha = a$

$a^2 = (1-a^2) \cdot \frac{17}{16}$

$16a^2 = 17 - 17a^2$

$33a^2$

$2\sin\alpha\cos\alpha$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$y^2(36\cdot13) - y(36\cdot9) - 17 = 0$

$D = 36\cdot36\cdot9\cdot9 + 4\cdot36\cdot13\cdot17 = 729 - 221 =$

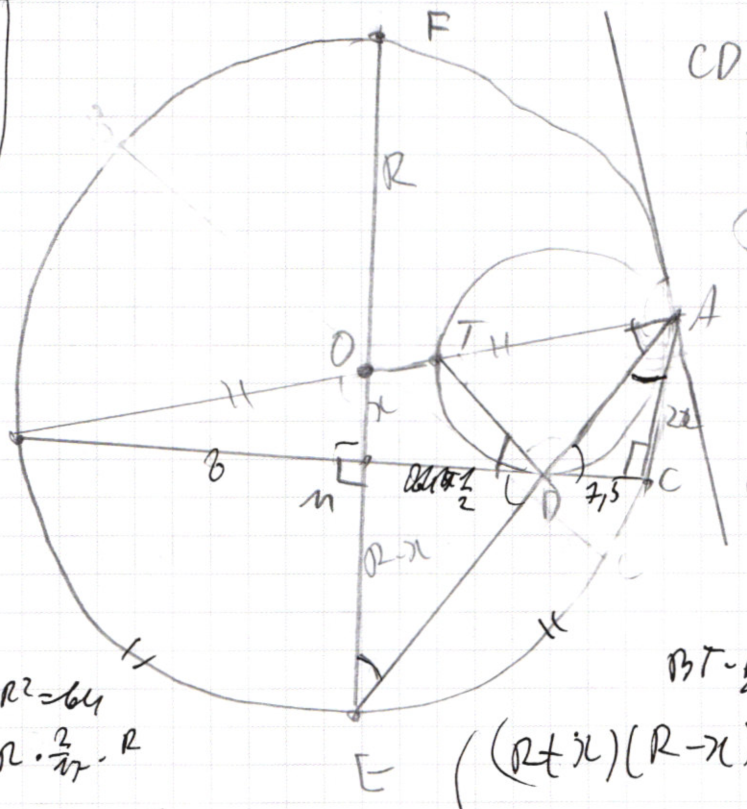
$= 4\cdot36(9\cdot9\cdot9 - 13\cdot17)$ $= 508 =$

$= 4\cdot127 =$

$= 4\cdot\cancel{39}$

$2 \quad \begin{array}{r} 17 \\ 13 \\ \hline 51 \\ 17 \\ \hline 221 \end{array}$

$$y_{1,2} = \frac{36\cdot9 \pm \cancel{12}\,24\,\sqrt{127}}{2\cdot36\cdot13}$$



$CD = \frac{15}{2}$

$BD = \frac{17}{2}$

$R, r - ?$

$\angle AFE?$

$S_{\triangle AEF}?$

$CD + BD = 16$

$\Downarrow$

$BM = 8.$

$BT\cdot \cancel{B}A = (16 - 2{,}5)^2$ ($2R$)

$\frac{8{,}5}{2{,}5} = \frac{17}{15}$

$\frac{2R}{x} = \frac{17}{15}$

$R^2 - x^2 = 64$

$R^2 - \frac{15^2}{17^2}R^2 = 64$

$R\cdot\frac{2}{17}\cdot R$

$\cancel{\triangle DBT \sim \triangle OBM}$

$\cancel{\frac{BD}{OB} = \frac{BT}{BM} = \frac{DT}{OM}}$

$\cancel{\frac{8{,}5}{R} = \frac{BT}{8} = \frac{DT}{x}}$

$$\begin{cases} (R+x)(R-x) = 8\cdot8 \\ (2x)^2 + (16)^2 = (2R)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} R^2 - x^2 = 64 \\ \cancel{4x^2 + 256 = 4R^2} \end{cases}$$

По формуле длины бисс

$AD = \sqrt{60 - 2{,}5\cdot8{,}5}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

$x^2-12x+36y^2-36y-45=0$

$D=144-4(36y^2-36y-45)=144-144y^2+144y+180=$

$=-144y^2+144y+324$ $\qquad \frac{324}{4}=81$

$4(-36y^2+36y+81)$

$36y^2-36y-81=12y^2-12y-27=$

$=4y^2-4y-9$

$x\geqslant 12y \Rightarrow x^2-24xy+\cancel{4}144y^2=2xy-12y\cancel{x}-x+6=$

$=x^2-26xy+12y+x-6+144y^2=0$

$x^2+x(1-26y)+\underbrace{144y^2+12y-6}_{6(24y^2+2y-1)}=0$

$D=26^2y\cancel{x}-52y+1-24(24y^2+2y-1)$

$=(26-24)(26+24)y^2-100y+25=$

$=100y^2-100y+25=25(4y^2-4y+1)$

$\Rightarrow x=\frac{26y-1\pm 5(2y-1)}{2}=\frac{26y-1\pm(10y-5)}{2}$

$=\frac{36y-4}{2}\ \vee\ \frac{16y+6}{2}=8y+3$

$18y-2$ $\qquad 2y-1=\frac{18}{5}$

$2y=\frac{23}{5}$

$(18y-8)^2+(\cancel{4}6y-3)^2=90$ $\qquad 2y=5-1$

$18^2y^2-16\cdot18y+64+36y^2-36y+9=90$

$y^2(18^2+6^2)-y(16\cdot18+6\cdot6)+64+9=90$

$y^2(24^2-2\cdot6\cdot18)-y(\cancel{2\cdot3\cdot3}$ $\qquad 36(8\cdot 2+2)-17=0$

$y^2($

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3) $10x + |x^2-10x|^{\log_3 4} \geq x^2 + 5^{\log_3(10x-x^2)}$

Ограничения: $10x - x^2 > 0 \Leftrightarrow x(10-x) > 0 \Leftrightarrow x(x-10) < 0$
$\Rightarrow x \in (0;10)$

~~100~~ Заметим что $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$ на ОДЗ!

$\lg a(a^{\log_b c}) = \log_a c \cdot \lg_b a$

$\log_b c = \lg_b c$

$10x - x^2 + |x^2-10x|^{\log_3 4} \geq 10x - x^2{}^{\log_3 5}$

$a = 10x - x^2$

$a + a^{\log_3 4} \geq a^{\log_3 5}$; $a > 0$

$a = 3 \Rightarrow 3 + 4 \geq 5 = 9a$ $\qquad a^{\log_3 5} \neq 0$

$f(a) = a + a^{\log_3 4} - a^{\log_3 5} = 0.$

$a^{\frac{1}{\log_3 5}} + a^{\frac{\log_3 4}{\log_3 5}} \geq 1.$

$a^{\log_5 3} + a^{\log_5 4} \geq 1.$

$3^{\log_5 a} + 4^{\log_5 a} \geq 1$

$7^{\log_5 a} \geq 1$

$\log_5 a \geq 0$

$a \geq 1.$

$10x - x^2 \geq 2$

$a^{\log_3 3 - \log_3 5} + a^{\log_3 4 - \log_3 5}$

$3^{\log_3 a} + 4^{\log_3 a} \geq 5^{\log_3 a}.$

$\frac{\frac{2}{4}}{\sqrt{\sqrt{17}}} = \frac{2}{\sqrt{7}}$

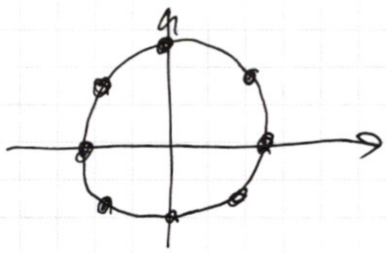
$x^2 - 10x + 2 \leq 0$

$x_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{96}}{2}$

$= \frac{10 \pm 4\sqrt{6}}{2}$

$= 5 \pm 2\sqrt{6}$

$\alpha - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2} \Rightarrow$ $\boxed{tg(\frac{\pi}{4}) = 1 \quad tg(-\frac{\pi}{4}) = -1}$



$tg(\frac{3\pi}{4}) =$

$= \frac{\sin(\frac{3\pi}{4})}{\cos(\frac{3\pi}{4})} = -1.$

$\cancel{tg(\frac{5\pi}{4}) =}$

$a = -\frac{4}{5} \Rightarrow \cos 2\alpha = -\frac{4}{5} \Rightarrow 2\alpha = \pm a\cos(-\frac{4}{5}) + 2\pi k$

$\alpha = \pm a\cos(-\frac{4}{5}) + \pi k.$

$\sin(2\alpha + 2\beta) =$

$= \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{-4}{5} =$

$= -\frac{5}{\sqrt{5} \cdot 5}$

$tg\,\alpha = a\,tg(\pm a\cos(-\frac{4}{5})) + \pi k$

$\cos 2\alpha = -\frac{4}{5} \Rightarrow \sin 2\alpha = \frac{3}{5}.$

$2^2 + 3^2 \vee 4^2$

$2+3 \vee 4$

Ответ: ± 1; $a\,tg\left(\frac{\pm a\cos(-\frac{4}{5})}{2}\right)$ $\quad 7^2 + 8^2 \vee 9^2$

(2) $\begin{cases} x - 12y = \sqrt{2xy - 12y - x + 6} & (1) \\ x^2 + 36y^2 - 36y \overset{-12x}{\cancel{=45}} = 45 & (2) \end{cases}$

$x^2 - 12x + 36 +$

$36y^2 - 36y + 9 = 45 + 45$

$6 \cdot 16 = 6 \cdot 6 \cdot 3$

$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \vee \frac{1}{5}$

$24 \cdot 24 - 6 \cdot 6 \cdot 3$

$\frac{7}{12} \vee \frac{1}{5}$

$6 \cdot 6 \cdot 16 - 6 \cdot 6 \cdot 3$

(2): $36y^2 - 36y +$

$x^2 - 12x + 36 + 36y^2 - 2 \cdot 6 \cdot y \cdot t + t^2 = 45$ $\quad = 6 \cdot 6 \cdot 13$

$(x-6)^2 + (6y - 3)^2 = 0$

$x = 6$

$y = \frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ проверим: $6 + 6 = \sqrt{2 \cdot 3 - 6 - 6 + 6}$

$6 - 6 = \sqrt{6 - 6 - 6 + 6}$ - да

Ответ: $x = 6$, $y = \frac{1}{2}$.

$36 + 9 - 36 \cdot \frac{1}{2} = 45$ - нет

$tg(-a\cos) =$ $\quad 4^2 + 5^2 \vee 6^2$

$3^x + 4^x \geq 5^x$

$(\frac{3}{5})^x + (\frac{4}{5})^x \geq 1$ $\quad 3^x + 4^x \geq 5^x.$

$7^x > 5^x$ $\quad (\frac{7}{5})^x > 1$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. $\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$ $\qquad tg\alpha - ?$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$2\sin\left(\frac{2\alpha+2\alpha+4\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{2\alpha-2\alpha+4\beta}{2}\right) = -\frac{2}{5}$

$\cancel{2}\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos(2\beta) = -\frac{\cancel{2}\,1}{5}$

$\cos(2\beta) = \frac{1}{\sqrt5} \Rightarrow \sin 2\beta = \frac{2}{\sqrt5}$

$\sin(2\alpha+2\beta) = 2\sin(\alpha+\beta)(\cos(\alpha+\beta))$

$\sin 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha = \sin$

$\frac{1}{\sqrt5} \qquad \frac{2}{\sqrt5}$

$= \frac{\sin 2\alpha}{\sqrt5} + \frac{2\cdot\cos 2\alpha}{\sqrt5} = -\frac{1}{\sqrt5} \qquad |\cdot\sqrt5 \neq 0$

$tg(\pm a\cos) =$

$=$

$\sin 2\alpha + 2\cos 2\alpha = -1.$

$\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha} \Rightarrow \cos 2\alpha = a$

$2a \pm \sqrt{1-a^2} = -1$

$\cancel{2a} = \mp\sqrt{1-a^2}$

$2a+1 = \mp\sqrt{1-a^2}$

$4a^2+4a+1 = 1-a^2$

$5a^2+4a = 0$

$a(5a+4) = 0$

$\sin 2\alpha = \frac{8}{5} = -2$

$\sin 2\alpha = \frac{3}{5}$

$a \angle -\frac{1}{2} \Rightarrow$

$\cancel{\sin}\cos 2\alpha = 0 \Rightarrow \sin 2\alpha = \pm 1.$

$\Rightarrow \cancel{2\alpha}\ 2\alpha = \frac{\pi}{2} + \pi k$

$\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}.$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+1} \\ x^2-12x+36y^2-36y=45 \end{cases}$$

$$(x-6)^2+(6y-3)^2=90.$$

$$x^2-24xy+y^2$$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

6

$\frac{16x-16}{4x-5} \le ax+b \le -32x^2+36x-3$

$\frac{16x-20+4}{4x-5} = 5+\frac{4}{4x-5}$.

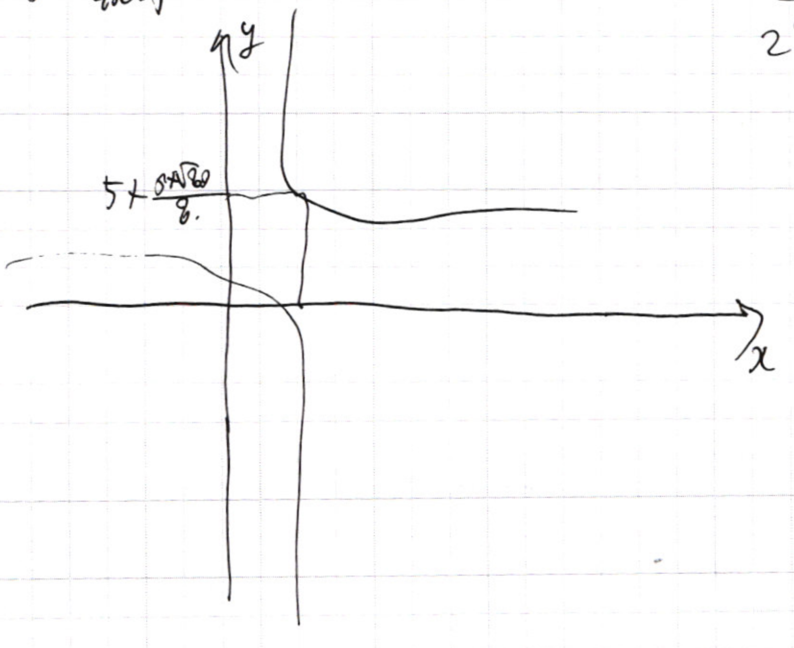
$-(32x^2-36x+3)$

$6\cdot 6\cdot 6\cdot 6-4\cdot 4\cdot 3\cdot 8.$

$2^4\cdot 3^4-2^4\cdot 3\cdot 8=$

$=2^4(81-24)=$

$=52$



$x=y$

$x=\frac{4}{4x-5}$

$4x^2-5x-4=0$

$x_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{89}}{8}$

$3^3+4^3 \vee 5^3$ 476

$27+64 \vee 125$

$4ax^2-5ax+4bx-5b=0$

$4b=f\left(\frac{9}{16}\right)$

$4ax^2-x(5a+20)+4bx-20b+2b=0$

$=-32\cdot\frac{81}{256}+36\cdot\frac{9}{16}-3$

$4ax^2-x(5a+20$

$=-\frac{81}{8}+\frac{9\cdot 18}{8}-24=\frac{162-105}{8}=\frac{57}{8}$.

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)