МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 4

ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}; \qquad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 6x = \sqrt{xy - 6x - y + 6}, \\ 9x^2 + y^2 - 18x - 12y = 45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$\left|x^2 - 26x\right|^{\log_5 12} + 26x \geqslant x^2 + 13^{\log_5\left(26x - x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = 12$, $BD = 13$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $4 \leqslant x \leqslant 28$, $4 \leqslant y \leqslant 28$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{8 - 6x}{3x - 2} \geqslant ax + b \geqslant 18x^2 - 51x + 28$$

выполнено для всех x на промежутке $\left(\frac{2}{3}; 2\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $TXYZ$, вершина Y которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра TY. Известно, что $XY = \sqrt{3}$, $TX = \sqrt{2}$, $TZ = 2$. Найдите длину ребра XZ. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

№1

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ (1)

$\underbrace{\sin(2\alpha+4\beta)+\sin(2\alpha)}_{\text{сумма синусов}} = -\frac{2}{17}$ (2)

$2\sin\left(\frac{2\alpha+4\beta+2\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{2\alpha+4\beta-2\alpha}{2}\right) = -\frac{2}{17}$

$\sin(2\alpha+2\beta)\cos(2\beta) = -\frac{1}{17}$

$-\frac{1}{\sqrt{17}}\cdot\cos(2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}\sqrt{17}}$

$\cos(2\beta) = \frac{1}{\sqrt{17}} \Rightarrow \quad \sin(2\beta) = \pm\sqrt{1-\cos^2(2\beta)} = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}$

Распишем первое ~~нер~~ равенство:

$\sin 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ (подставляя значения 2β).

1) $\sin(2\beta) = \frac{4}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt{17}} + \frac{4}{\sqrt{17}}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$ – универсальная триг. замена.

$\cos 2\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$

Пусть $\operatorname{tg}\alpha = x$

$\frac{2x}{1+x^2} + \frac{4(1-x^2)}{1+x^2} = -1 \quad / 1+x^2>0 \Rightarrow \quad /\cdot 1+x^2$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin(x+y)+\sin(x-y) =$

$= 2\sin x\cos y.$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$

$2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos(2\beta) = -\frac{2}{17}$

$\boxed{\cos(2\beta) = \frac{1}{\sqrt{17}}}$

$\sin 2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1+tg\alpha^2} =$

$\sin 2\beta = \pm\sqrt{1-\frac{1}{17}} = \frac{4}{\sqrt{17}}.$

$\cancel{= 2\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} / 1+\sin}$

$\cos 2\alpha = \frac{1-\frac{\sin^2}{\cos^2\alpha}}{1+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}.$

$\sin 2\alpha\cos 2\beta + \cos 2\alpha\cdot\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\cancel{2tg\alpha}$

$\frac{2x}{1+x^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{17}} + \frac{4}{\sqrt{17}}\cdot\frac{1-x^2}{1+x^2} = -\frac{1}{\sqrt{17}}.$

$\frac{2x}{1+x^2} + \frac{4(1-x^2)}{1+x^2} = -1 \quad /\cdot 1+x^2$

$\boxed{x=-1}$ $\boxed{x=\frac{5}{3}}$

$2x + 4 - 4x^2 = -1 - x^2$

$2x+5-3x^2=0$ $\boxed{3x^2-2x-5=0}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$2x+4(1-x^2)=-1-x^2$

$2x+4-4x^2=-1-x^2$

$3x^2-2x-5=0$

$a-b+c=0 \Rightarrow \quad x_1=-1 \quad x_2=\frac{5}{3} \Rightarrow$

$$\operatorname{tg}\alpha=-1 \qquad \operatorname{tg}\alpha=\frac{5}{3}$$

2) $\sin(2\beta)=-\frac{4}{\sqrt{17}}$

$\frac{2x}{1+x^2}\cdot\frac{1}{\cancel{\sqrt{17}}}-\frac{4}{\cancel{\sqrt{17}}}\cdot\frac{1-x^2}{1+x^2}=-\frac{1}{\cancel{\sqrt{17}}} \quad |\cdot 1+x^2$

$2x-4(1-x^2)=-1-x^2$

$4x^2+2x-4=-1-x^2$

$5x^2+2x-3=0$

$a-b+c=0 \Rightarrow \quad x_1=-1 \quad x_2=\frac{3}{5} \Rightarrow$

$$\operatorname{tg}\alpha=-1 \qquad \operatorname{tg}\alpha=\frac{3}{5}$$

Т.к. при каждом переходе мы проверяли равносильность $\Rightarrow$ эти решения единственны, и все они реализуются.

Ответ: $\operatorname{tg}\alpha=-1$

$\operatorname{tg}\alpha=\frac{5}{3}$

$\operatorname{tg}\alpha=\frac{3}{5}$

№2

$$\begin{cases} y-6x = \sqrt{xy-6x-y+6} \quad \uparrow^2 \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45 \quad (2) \end{cases}$$

ОДЗ: $\boxed{y \geq 6x}$.

$xy-6x-y+6 \geq 0$

$y(x-1)-6(x-1) \geq 0$

$\boxed{(x-1)(y-6) \geq 0}$.

$(y-6x)^2 = xy-6x-y+6$

$y^2-12xy+36x^2 = xy-6x-y+6$

$y^2-13xy+y+36x^2+6x-6=0$

решим кв. урин относ. y.

$y^2-y(13x-1)+36x^2+6x-6=0$

$D = 169x^2-26x+1-144x^2-24x+24 = 25x^2-50x+25 = 25(x-1)^2$

$$y_{1,2} = \frac{13x-1 \pm \sqrt{25(x-1)^2}}{2}$$

$$y_1 = \frac{13x-1+5|(x-1)|}{2} = \frac{18x-1+5}{2} = 9x-3 \quad \text{если} \quad x \geq 1$$

$$= \frac{13x-1+5-5x}{2} = 4x+2 \quad \text{если} \quad x<1$$

$$y_2 = \frac{13x-1+5|x-1|}{2} = 4x+2, \text{ если } x \geq 1$$

$$= 9x-3, \text{ если } x<1$$

$\Rightarrow$

$\boxed{y=4x+2}$ или $\boxed{y=9x-3}$

(1) $y=4x+2$. - подставим во (2) равенство:

$9x^2+(4x+2)^2-18x-12(4x+2)=45$

$9x^2+16x^2+16x+4-18x-48x-24=45$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$25x^2-50x-65=0$

$5x^2-10x-13=0$

$\frac{D}{4}=5^2+13\cdot5=90$

$x_1=\frac{5+\sqrt{90}}{5}=1+\sqrt{\frac{90}{25}}$; $y_1=6+4\sqrt{\frac{90}{25}}$ – ~~подходит под ОДЗ.~~

$x_2=\frac{5-\sqrt{90}}{5}=1-\sqrt{\frac{90}{25}}$; $y_1=6-4\sqrt{\frac{90}{25}}$

1) $x=1+\sqrt{\frac{90}{25}}$
$y=6+4\sqrt{\frac{90}{25}}$ $\Rightarrow$ $y\le6x\Rightarrow$ не подходит под ОДЗ.

$x=1-\sqrt{\frac{90}{25}}$ $\quad y-6x=6-4\sqrt{\frac{90}{25}}-6+6\sqrt{\frac{90}{25}}=2\sqrt{\frac{90}{25}}>0$

$y=6-4\sqrt{\frac{90}{25}}$. $\quad (x-1)(y-6)>0\Rightarrow$

$\boxed{x=1-\sqrt{\frac{90}{25}} \quad y=6-4\sqrt{\frac{90}{25}}}$ – подходит.

2) $y=9x-3$

$9x^2+(9x-3)^2-18x-12(9x-3)=45$

$9x^2+81x^2-54x+9-18x-108x+36=45$

$90x^2-180x+45=45\Rightarrow$

$90x^2-180x=0\Rightarrow$ $\boxed{x_1=0}$ $y_1=-3$ $\quad \boxed{x_2=2}$ $\boxed{y_2=15}$

$x=0$

$y=-3$ – ~~по~~ не подходит под ОДЗ т.к. $y-6x=-3-0=-3<0 \Rightarrow$

не подходит.

$y=15$

$\boxed{\begin{matrix} x=2 \\ \cancel{y=177} \\ \cancel{x=20} \end{matrix}}$ – подходит под ОДЗ.

Ответ: ~~(20; 177)~~ $(2;15)$.

$\left(1-4\sqrt{\frac{90}{25}};\ 6-4\sqrt{\frac{90}{25}}\right)$

№3

$|x^2-26x|^{\log_5 12}+26x \geqslant x^2+13^{\log_5(26x-x^2)}$

ОДЗ: $26x-x^2 \geqslant 0$

$- \quad 0 \quad + \quad 26 \quad -$

$\boxed{x\in[0;26)}$

С учетом ОДЗ

$(26-x^2)^{\log_5 12}+26x \geqslant x^2+(26x-x^2)^{\log_5 13}$

$26x-x^2 \geqslant (26x-x^2)^{\log_5 13}-(26x-x^2)^{\log_5 12}$.

Пусть $26x-x^2=u$

$u \geqslant u^{\log_5 13}-u^{\log_5 12}$.

$u\left(u^{\log_5 \frac{13}{5}}-u^{\log_5\frac{12}{5}}-1\right) \leqslant 0$

Заметим что при $u=\cancel{2}\,25$ – правая скобка обнуляется $\Rightarrow$

$\left(\frac{13^2}{5^2}-\frac{12^2}{5^2}-1=0\right)$.

При $u<\cancel{0}\,2$ – правая скобка меньше нуля, при

$u>\cancel{0}\,25$ правая скобка – больше нуля, т.к.

$u^{\log_5\frac{13}{2}}$ – растет быстрее чем $u^{\log_5\frac{12}{5}} \Rightarrow$ при $u>25$

разница будет больше $1 \Rightarrow$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

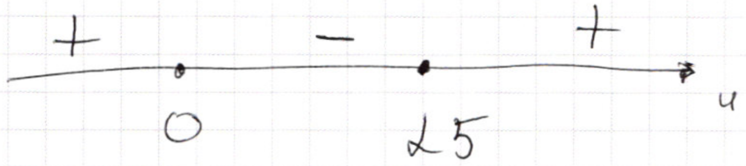
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$u=0$ $\quad u=25$



$\Rightarrow$

$u \in [0; \cancel{2}\,25]$

$26x - x^2 \in [0; 25]$

$\begin{cases} 26x - x^2 \geq 0 \\ 26x - x^2 \leq 25 \end{cases}$ $\quad x \in [0; 26]$ $\quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x \in [0; 26] \\ x \in [-1; 25] \end{cases} \Rightarrow$

$x^2 - 26x + 25 \leq 0 \Rightarrow x \in [-1; 25]$, но ~~ОДЗ~~

~~$\frac{D}{4} = 13^2 - 2 = 169 - 2 = 167$~~

~~$x_1 = 13 - \sqrt{167}$~~ $\Rightarrow$ ~~$x \in [13 - \sqrt{167}; 13 + \sqrt{167}]$~~

~~$x_2 = 13 + \sqrt{167}$~~

~~$x \in \{0\} \cup [13 - \sqrt{167}; 13 + \sqrt{167}] \cup \{26\}$ но ОДЗ $\Rightarrow$~~

~~Ответ: $x \in [13 - \sqrt{167}; 13 + \sqrt{167}]$~~

из системы

$\Rightarrow x \in [0; 25]$, но ОДЗ $\Rightarrow$

$\boxed{\text{Ответ: } x \in (0; 25]}$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 5

Найдем все значения $f(x)$, от 2 до 28

$f(2) = [\frac{2}{4}] = 0$

$f(3) = [\frac{3}{4}] = 0$

$f(4) = f(2) + f(2) = 0$

$f(5) = \lfloor \frac{5}{4} \rfloor = 1$

$f(6) = f(2) + f(3) = 0$

$f(7) = \lfloor \frac{7}{4} \rfloor = 1$

$f(8) = f(4) + f(2) = 0$

$f(9) = f(3) + f(3) = 0$

$f(3^k) = k \cdot f(3) \Rightarrow f(9) = 0$

$f(27) = 0.$

$f(2^k) = k \cdot f(2) = 0 \Rightarrow f(2) = f(4) = f(8) = f(16) = 0.$

$f(10) = f(5) + f(2) = 1$

$f(11) = \lfloor \frac{11}{4} \rfloor = 2$

$f(12) = f(2) + f(6) = 0$

$f(13) = \lfloor \frac{13}{4} \rfloor = 3$

$f(14) = f(7) + f(2) = 1$

$f(15) = f(5) + f(3) = 1$

$f(17) = \lfloor \frac{17}{4} \rfloor = 4$

$f(18) = f(9) + f(2) = 0$

$f(19) = \lfloor \frac{19}{4} \rfloor = 4$

$f(20) = f(10) + f(2) = 1$

$f(21) = f(7) + f(3) = 1$

$f(22) = f(11) + f(2) = 2$

$f(23) = \lfloor \frac{23}{4} \rfloor = 5$

$f(24) = f(12) + f(2) = 0$

$f(25) = f(5) + f(5) = 2$

$f(26) = f(13) + f(2) = 3$

$f(27) = 0$ $\Rightarrow$

$f(28) = f(14) + f(2) = 1$

$0 = \{\underbrace{2; 3; 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18, 24, 27}_{11}\}$

$1 = \{5; 10; 15; 20; \cancel{25}; 7; 14; 21; 28;\}$

$2 = \{25; 11; 22;\}$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y) \geq 0 \Rightarrow$

$3 = \{13; 26;\}$

• $\boxed{f(x) < f(y)}$

$4 = \{17, 19\}$

~~1~~ c

$5 = \{23\}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) вариант $f(x)=0$ $f(y)$ - остальн значени.

$f(x)=0 \Rightarrow$ $x \in \{4; 6; 8; 9; 12, 16, 18, 24, 27)$ - 9 вариантов.

$f(y)>0 \Rightarrow$ $y \in \{$ оставши и $\Rightarrow$ $(28-4)+1) - 9 = 16$. вариантов.

$9 \cdot 16 = 144$ - варианта. для $\{0\}$ и $\{1, 2, 3, 4, 5\}$

2) $\{1\}$ и $\{2, 3, 4, 5\}$

иа $f(x)=1 \Rightarrow$ $x \in \{5; 10; 15; 20; 7; 14; 21; 28\}$ - 8 вариантов

$f(y)>1 \Rightarrow$ $y \in \{25; 11; 22; 13; 26; 17; 19; 23\}$ - 8 $\Rightarrow$

$8 \cdot 8 = 64$ - варианти.

3) $\{2\}$ и $\{3; 4, 5\}$

$f(x)=2$ $\Rightarrow$ $x \in \{25; 11; 22\}$ - 3 вари

$f(y)>2 \Rightarrow$ $y \in \{13; 26; 17; 19; 23\}$ - 5 вариантов.

$3 \cdot 5 = 15$ вариантов.

4) $\{3\}$ и $\{4; 5\}$

$f(x)=3$ $\Rightarrow$ $x \in \{13, 26\}$ - 2

$f(y) > 3 \Rightarrow \quad y \in \{17; 19; 23\}$ - 3

$2 \cdot 3 = 6$ вариантов

4) $\{4\}$ и $\{5\}$

$f(x) = 4 \Rightarrow \quad x \in \{17, 19\}$

$f(y) > 4 \Rightarrow \quad y \in \{23\} \Rightarrow$

2 варианта

всего вариантов $144 + 64 + 15 + 6 + 2 = 144 + 87 =$
$= 231$ вариант

Ответ: 231 вариант.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

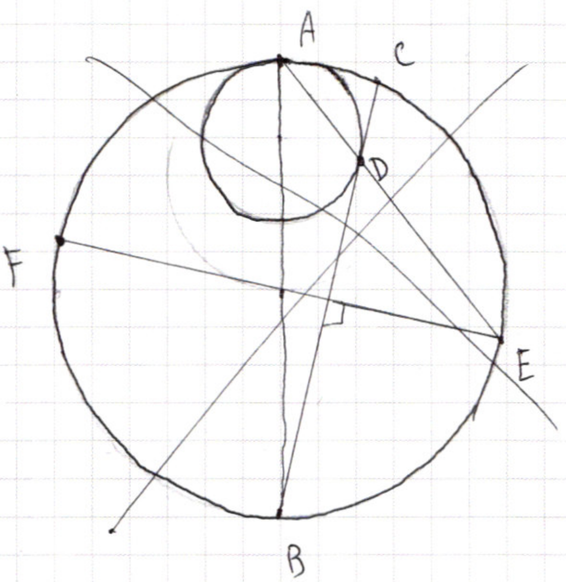
ШИФР
(заполняется секретарём)

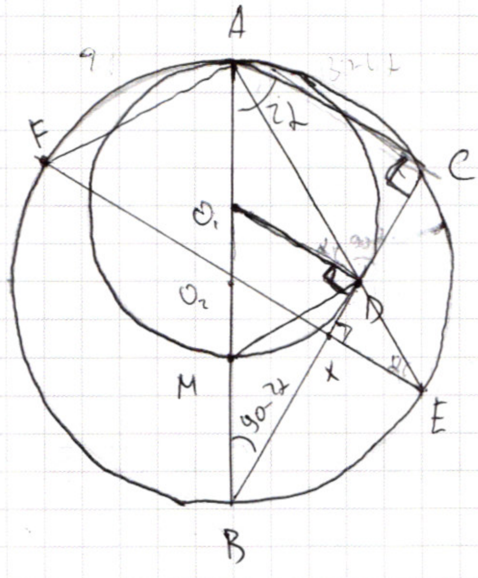
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4

$CD=12$

$BD=$





Пусть центр $\omega - O_1$

центр $\Omega - O_2$

r – радиус ω

R – радиус Ω

$\boxed{BM = 2R-2r}$

$OD = r$

т.к. D – точка касания ⇒

$O_1D \perp BC$ ⇒

$\triangle BDO_1$ – прямоуг ⇒

$BO_1^2 = O_1D^2 + BD^2$

$(2R-r)^2 = r^2 + BD^2$

по свойству касательной $BD^2 = BM \cdot AB$ =>

$\cancel{BD^2 = (2R-2r)\cdot 2R = 4R(R-r)}$ =>

$\cancel{(2R-r)^2 = r^2 + 4R(R-r)}$

$BD^2 = 4R\cdot(R-r)$ =>

$169 = 4R(R-r)$ => $\boxed{r = R - \frac{169}{4R}}$

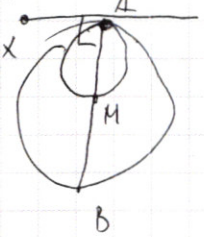
$\angle ACB = 90^\circ$, т.к. AB - диаметр Ω =>

$AC^2 + BC^2 = AB^2$

$\boxed{AC^2 + 25^2 = 4R^2}$

$\angle ADM = 90^\circ$, т.к. AM - тоже диаметр, т.к. Ω и ω внешне касаются в точке A =>

диаметр Ω - проходит через диаметр ω



$\angle BAX = 90^\circ$

$\angle MAX = 90^\circ$ =>

$\angle MAX$ - угол между касат. и хордой AM =>

$\breve{AM} = 180^\circ$ => AM - диаметр.

$\cancel{AD^2 +}$

$\triangle BO_1D \sim \triangle BAC$, т.к. $\angle B$ - общ. и $O_1D \perp BC$ и $\angle ACB = 90^\circ$ =>

$\frac{r}{AC} = \frac{BD}{BC} = \frac{13}{BC+CD} = \frac{13}{25}$ =>

$\cancel{r =}$ $\boxed{AC = \frac{25}{13} r}$

$\triangle BAC$: Т. Пифагора:

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$AC^2 + BC^2 = AB^2$

$\left(\frac{25}{13}r\right)^2 + 25^2 = 4R^2$

$r = R - \frac{169}{4R}$

$\left(\frac{25}{13}\left(R - \frac{169}{4R}\right)\right)^2 + 25^2 = 4R^2$

$\left(\frac{25}{13}R - \frac{13\cdot 25}{4R}\right)^2 + 25^2 = 4R^2$

$\frac{25^2}{13^2}R^2 - \frac{25^2}{2} + \frac{13^2\cdot 25^2}{16R^2} + 25^2 = 4R^2$, пусть $R^2 = t$

$\frac{25^2}{13^2}t + \frac{25^2}{2} + \frac{13^2\cdot 25^2}{16t} = 4t$

$t\left(4 - \frac{25^2}{13^2}\right) - \frac{25^2}{2} - \frac{13^2\cdot 25^2}{16t} = 0$

$t\cdot\frac{51}{13^2} - \frac{25^2}{2} - \frac{13^2\cdot 25^2}{16t} = 0$

$\frac{16t^2\cdot\frac{51}{13^2} - 8t\cdot 25^2 - 13^2\cdot 25^2}{16t} = 0 \Rightarrow$

$16t^2\cdot\frac{51}{13^2} - 8t\cdot 25^2 - 13^2\cdot 25^2 = 0$

$\frac{D}{4} = 16\cdot 25^4 + 16\cdot 51\cdot 25^2 = 16\cdot 25^2(25^2+51) = 16\cdot 25^2\cdot 26^2 \Rightarrow$

$t_1 = \dfrac{\cancel{8}^{\,4}\cdot 25^2 + 4\cdot 25\cdot 26}{\dfrac{16\cdot 51}{13^2}} = \dfrac{4\cdot 25\,(25+26)\cdot 13}{16\cdot 51} = \dfrac{\cancel{4}\cdot 25\cdot 13\cdot \cancel{51}}{{}_{4}\cancel{16}\cdot \cancel{51}} =$

$= \dfrac{25\cdot 13}{4} = \dfrac{325}{4} \Rightarrow$

$t_2 < 0 \Rightarrow$ не подходит.

$r = R - \dfrac{169}{R\cdot 4} = \dfrac{25\cdot 13}{4} - \dfrac{13^2}{25\cdot 13} = \dfrac{25\cdot 13}{4} - \dfrac{13}{25} =$

$= \dfrac{25^2\cdot 13 - 13\cdot 4}{100} = \dfrac{13(25^2-4)}{100} = \dfrac{13\cdot 27\cdot 23}{100} = \boxed{\dfrac{8083}{100}} = r$

$$\boxed{\begin{aligned} R &= \frac{325}{4} \\ r &= \frac{8083}{100} \end{aligned}}$$

2). $\angle AFE = \alpha \Rightarrow$

$\angle ADC = \angle EDX = 90 - \alpha \Rightarrow$

$\angle DAC = \alpha$, т.к. $(\triangle DAC -$ прямоуг$) \Rightarrow$

$\angle CAD = \alpha.$

$\angle O_1DA = \alpha$, т.к. $O_1D \parallel EF$, т.к. $O_1D \perp BC$ и $EF \perp BC \Rightarrow$

$\angle O_1AD = \alpha$, т.к. $\triangle O_1DA -$ равнобед $\Rightarrow$

$\angle BAC = 2\alpha \Rightarrow$

$\cancel{\cos 2\alpha =}$ $\cos 2\alpha = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{\frac{25}{13}\cdot r}{2R} = \dfrac{25r}{26R} = \dfrac{25\cdot \frac{13\cdot 27\cdot 23}{100}}{\frac{26\cdot 25\cdot 13}{4}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos 2\alpha = \dfrac{\cancel{13}\cdot 27\cdot 23}{26\cdot 25\cdot \cancel{13}} = \dfrac{27\cdot 23}{26\cdot 25} \Rightarrow$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 \Rightarrow$

$$\cancel{\cos\alpha = \sqrt{\frac{\cos 2\alpha + 1}{2}}}$$

$$\cancel{\cos\alpha = \sqrt{\frac{\frac{27\cdot 23}{26\cdot 25} + 1}{2}}} = \sqrt{\frac{621+650}{2\cdot 650}} = \sqrt{\frac{1271}{1300}} \Rightarrow$$

$$\cancel{\boxed{\alpha = \arccos\sqrt{\frac{1271}{1300}}}} \qquad \cancel{\alpha = \arccos\sqrt{\frac{1271}{1300}}}$$

3) ~~S_{AEF} - ?~~

$$\cancel{\angle AFE = \frac{\smile AE}{2} = \frac{\smile AC + \smile CE}{2} = \frac{\cancel{90-2\alpha+} \; 180-4\alpha + 2\alpha}{2}} = 90 - \alpha \Rightarrow$$

$$\cancel{\boxed{\angle AFE = 90 - \arccos\sqrt{\frac{1271}{1300}}}}$$

3) $\frac{AF}{BC} = \frac{\smile AF}{\smile BC} = \frac{\alpha}{2\alpha} \Rightarrow$

$$\boxed{AF = \frac{BC}{2} = \frac{25}{2}.}$$

$$AC = \frac{25}{13}\cdot r = \frac{\cancel{25}}{\cancel{13}}\cdot\frac{\cancel{13}\cdot 27\cdot 23}{\cancel{100}\,4} = \boxed{\frac{27\cdot 23}{4}}$$

~~$\angle FAC$~~

$\smile FA = 2\cdot\angle FEA = 2\alpha$

$\smile AC = 2\cdot\angle ABC = 180 - 4\alpha$ $\qquad$ $\smile CE = 2\cdot\angle EAC = 2\alpha \Rightarrow$

$\breve{FH} + \breve{HC} + CE = 180^\circ \Rightarrow$ FE - диаметр $\Rightarrow$

$AF = \frac{\cancel{27}\cdot 23}{\cancel{4}}$ $\frac{25}{2}$

$FE = \cancel{25+1}$ $2R = \frac{25\cdot 13}{4} = \frac{25\cdot 13}{2} \Rightarrow$

$\cos AFE = \frac{AF}{FE} = \frac{\frac{25}{2}}{\frac{25\cdot 13}{2}} = \frac{1}{13} \Rightarrow$

$$\boxed{\angle AFE = \arccos\frac{1}{13}}$$

$S_{AFE} = AF\cdot FE\cdot \sin\alpha \cdot \frac{1}{2} = \frac{25}{2}\cdot\frac{25\cdot 13}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{1-\frac{1}{13^2}} =$

$= \frac{25^2\cdot \cancel{13}}{8}\cdot\frac{\sqrt{12\cdot 14}}{\cancel{13}} = \frac{25^2\cdot 2\sqrt{42}}{8} = \boxed{\frac{25^2\cdot\sqrt{42}}{4}}$

Ответ: $R = \frac{325}{4}$

$r = \frac{8073}{100}$

$\angle AFE = \arccos\frac{1}{13}$

$S_{AFE} = \frac{25^2\cdot\sqrt{42}}{4}$

№6

$$\begin{cases} \frac{8-3x}{3x-2} \geq ax+b \\ ax+b \geq 18x^2 - 51x + 26 \end{cases}$$

$\cdot\ -2 + \frac{4}{3x-2} \geq ax+b \Rightarrow$ $\boxed{ax+b+2 \leq \frac{4}{3x-2}}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$ax+b+2 \geqslant 18x^2-51x+30 \Rightarrow$

$$\boxed{\frac{4}{3x-2} \geqslant 18x^2-51x+30}$$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\boxed{y > 6x}$.

$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6} \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45 \end{cases}$

$9x^2-18x+9 \quad +y^2-12y+36=90$

$\boxed{9(x-1)^2+(y-6)^2=90}$

$y^2-12xy+36x^2=xy-6x-y+6$

$y^2-13xy+36x^2=-6x-y+6$

$y^2-y(13x-1)+36x^2+6x-6=0$

$D=169x^2-26x+1-144x^2-24x+24=25x^2-50x+25$

$25(x-1)^2$

$y_1=\frac{13x-1+5(\cancel{x-1})^{1-x}}{2}=\frac{18x-6}{2}=\boxed{9x-2}$

$y_2=\frac{13x-1-5x+5}{2}=\boxed{4x+2}$

$9(x-1)^2+(9x-8)^2=90$

$\cancel{9}(x-1)^2+(4x-4)^2=90$

$25\cancel{7}(x-1)^2=90 \qquad (x-1)^2=\frac{90}{11} \qquad x=1\pm\sqrt{\frac{90}{25}}$

$|x^2-26x|^{\log_5 12}+26x \geq x^2+13^{\log_5(26x-x^2)}$.

$26x-x^2>0$

$(26x-x^2)^{\log_5 12}+26x \geq x^2+(26-x^2)^{\log_5 13}$

$(26x-x^2)^{\log_5 12}-(26-x^2)^{\log_5 13} \geq x^2-26$.

$\cancel{26}$

$t^{\log_5 13}-t^{\log_5 12} \leq t$

$t\left(t^{\log_5 \frac{13}{5}}-t^{\log_5 \frac{12}{5}}-1\right) \leq 0$

$(t-1)($

$30-12-15+6$

$\frac{36-27}{3}=9$

$9 \quad 15-12=\boxed{3}. \quad 18-3=15.$

$81(x-1)$

$9x-3 \quad 90(x-1)^2=90$

$\frac{D}{4}=25+65=90 \quad (x-1)^2=1$

$x_1=\frac{10+\sqrt{90}}{\cancel{\ }}=$

$(x-1)^2=1$

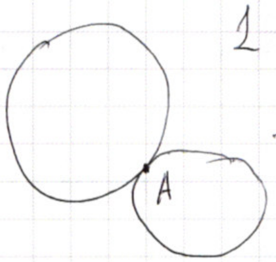
$\boxed{x=0}$

$\boxed{x=2}$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$(26x-x^2)^{\log_5 12}+26x \geqslant x^2+13^{\log_5}$



1 1

$f(8)$

$u \geqslant 4^{\log_5 13}-4^{\log_5 12}$

$2=0$
$3=0$
$5=1$

$4\left(4^{\log_5 \frac{13}{5}}-4^{\log_5 \frac{12}{5}}-1\right) \leq 0$ $\quad 7=1$

0

$26x-x^2=5$

$11=2$

$4^{\log_5 \frac{13}{5}}-4^{\log_5 \frac{12}{5}}-1=0$

$13=3$

$x^2-26x+5=0$

$17=4$ $\quad \frac{D}{4}=13^2-5=164$

$\frac{5^{4^{\log_5 \frac{13}{5}}}}{5^{4^{\log_5 \frac{13}{5}}}}=5$ $\quad 1$

$x_1=13+\sqrt{164}$

$=13-\sqrt{}$

$19=4$
$23=5$ $\quad \left(a^{\log_5 4}-b^{\log_5 4}\right)'$

$(4-1)\left(\frac{13}{5}-\frac{12}{5}\right)-1$ $\quad \log_5 4\, a^{\log_4 4-1}\cdot\frac{1}{4\ln 5}-$

$\cancel{\left(\frac{4-1}{5}\right)}-1$

$\frac{\log_5 4}{4\ln 5}\left(a^{\log_5 4-1}-b^{\log_5 4-1}\right)=f'(x)$

$4^{\log_5 \frac{13}{5}}-4^{\log_5 \frac{12}{5}}-4^{\log_5 1}=0$

$f(x)=Cx$

$(4-1)\left(\frac{13}{5}-\frac{12}{5}-1\right)$ $\quad \left[\frac{P}{4}\right]$ $\quad 4^{\log_5 \frac{12}{5}}+1 \geqslant 4^{\log_5 \frac{13}{5}}$ $\quad f(0)=0$

$-\frac{4}{5}(4-1)$ $\quad f(p\cdot 1)=f(p)+f(1)$

$\cancel{f(p)}=f(p)+f(1)\left(\left(\frac{13}{5}\right)^{\log_5 4}-\left(\frac{12}{5}\right)^{\log_5 4}-1\right)$

$r^2+4R^2-4Rr+r^2=4R^2-4Rr$

$\frac{13^2}{5^2}-\frac{12^2}{5^2}$ $\quad 2f(a)=f(x)-f(y)$

$r^2+(R+r)^2=169$

$\log_5 4\left(\frac{13}{5}\right.$ $\quad r^2+(2R-r)^2=169$ $\quad \frac{169-144}{25}=1$

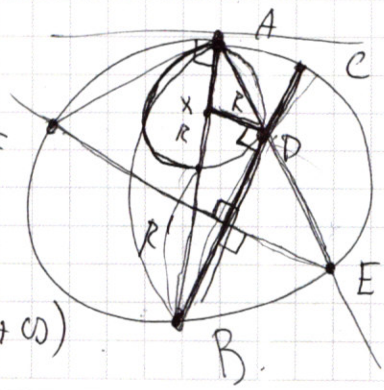
$(2R-2r)\cdot 2R=169$

$4=2$

$CD=12$

$BD=13$

$4\ (0;2)$



$4\ (2;+\infty)$

$r^2+(2R-r)^2=2R(2R-2r)$

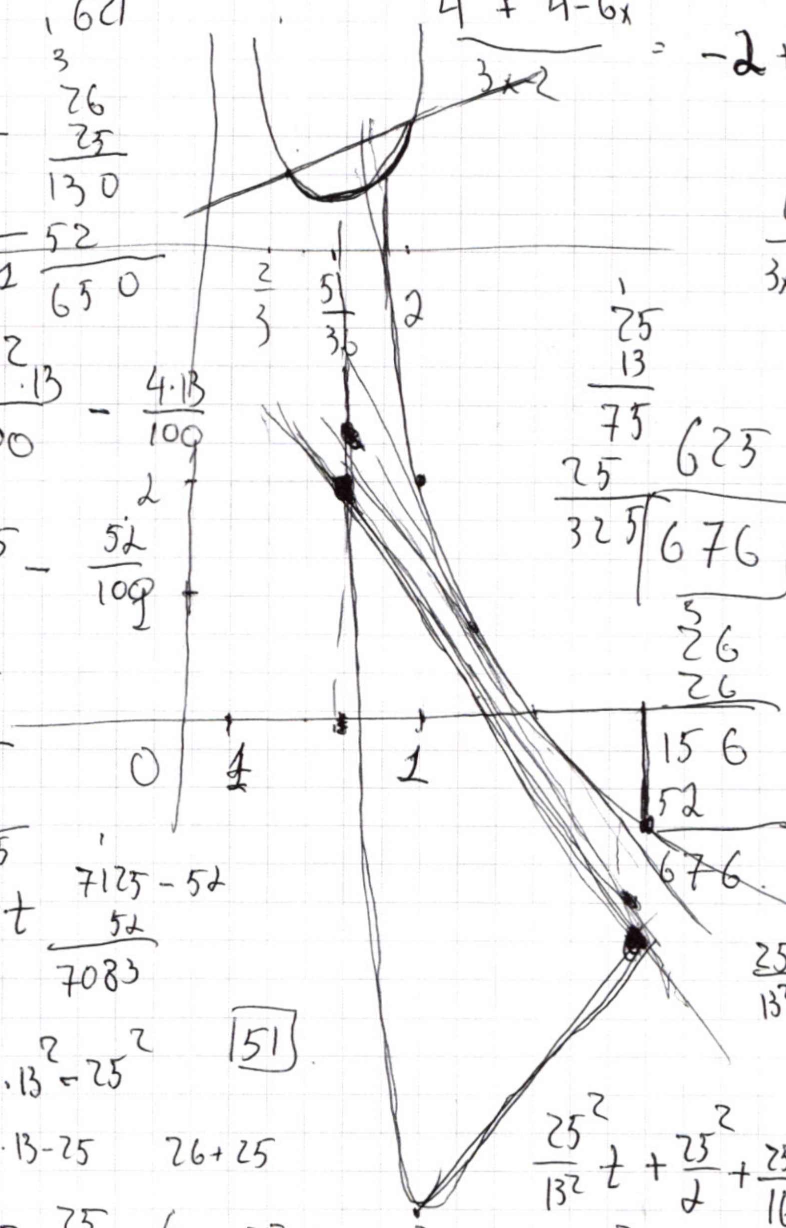
$$\begin{cases} \dfrac{8-6x}{3x-2} \geq ax+b \\ ax+b \geq 18x^2 - 51x + 28 \end{cases}$$

$x \in \left(\frac{2}{3}; 2\right]$

$\frac{4}{3x-2} \geq ax+(b+2)$

$ax+b \geq$

$\frac{4 + 4-6x}{3x-2} = -2 + \frac{4}{3x-2}$



$\frac{4}{3x+2} \geq \boxed{ax+b+2}$

$36-51$

-15

$18 \cdot 4 - 102 + 28$

72

$\frac{25^2 \cdot 13}{100} - \frac{4 \cdot 13}{100}$

$\frac{325}{4} - \frac{52}{100}$

$\frac{51}{13^2} t$

$7125 - 52$

7083

$\boxed{51}$

$4 \cdot 13^2 - 25^2$

$2 \cdot 13 - 25 \quad 26+25$

$\boxed{676}$

$\frac{25^2}{13^2}\left(R - \frac{169}{4R}\right)^2 + 25^2 = 4R^2$

$\frac{25^2}{13^2} \cdot R^2 - \frac{25^2}{2} + \frac{25^2 \cdot 13^2}{16R^2} + 25^2 = 4R^2$

$\frac{25^2}{13^2} t + \frac{25^2}{2} + \frac{25^2 \cdot 13^2}{16t} = 4t$

$t\left(\frac{25^2}{13^2} - 4\right)$

$\left(2R - \frac{25}{13}r\right)\left(2R + \frac{25}{13}r\right) = 25^2$

$R \quad r^2 + 169 = (2R-r)^2 \qquad 169 = 4R^2 - 4Rr$

$\boxed{169 + 4Rr}$

$\left(\frac{25}{13}\right)^2 r^2 + 25^2 = 4R^2 \qquad r = \frac{4R^2 - 169}{4R}$

$\left(\frac{25}{13}\right)^2 r^2 - 4Rr + 456 = 0 \qquad \boxed{r = R - \frac{169}{4R}}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\frac{R}{x} = \frac{13}{25} \Rightarrow$

$x = \frac{25}{13} R$

$\left(\frac{25}{13}\right)^2 r^2 + 25^2 = 4R^2$

$4R(R-r) = 169$

$4R^2 - 4Rr = 169$

$\left(\frac{25}{13}\right)^2 r^2 + 25^2 = 169 + 4Rr$

$\left(\frac{25}{13}\right)^2 r^2 - 4Rr + 12\cdot 38 = 0$

$(25)^2 - 4\cdot 13^2 R + 12\cdot 38\cdot 13^2 = 0$

$\cancel{\frac{D}{4} = 4\cdot 13^2 R^2}$

$51 \cdot 51 = 51$

$120 \cdot 18 = 960$, $2601 - 2160$, $2601 - 2160 = 4381$

$\boxed{439}$

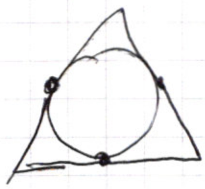
441

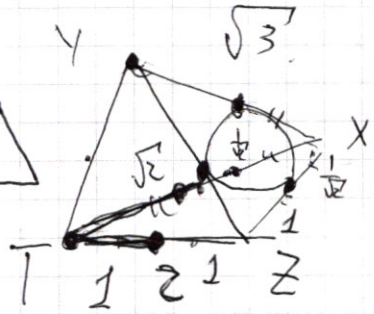
21

$x_1 = \frac{51+21}{36} = 2$

$x_2 = \frac{51-21}{36} = \frac{30}{36} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$

2	0
3	0
4	0
5	1
6	0
7	1
8	0
9	0
10	1
11	2
12	0
13	3
14	1
15	1
16	0
17	3 4
18	0
19	4
20	1
21	1
22	2
23	5
24	0
25	2
26	3
27	0
28	1





$25 - 13$

$12 \cdot 38$

$25^2 - 13^2$

$12 \cdot 38$

38

$\left(4^{\log_5 \frac{13}{5}} - 4^{\log \frac{12}{5}}\right) - 1$

$f(x) - f(y) < 0$

$11 \cdot 16$

$8 \cdot 8$

$3 \cdot 5$

$2 \cdot 3$

$18\left(x - \frac{5}{6}\right)(x-4)$

$(18x - 5\cdot 3)$

$3(6x-5)(x-4)$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)