МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}, \\ x^2+9y^2-4x-18y=12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2\geqslant \left|x^2+18x\right|^{\log_{12}13}-18x.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=8$, $BD=17$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1\leqslant x\leqslant 24$, $1\leqslant y\leqslant 24$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x+11}{4x+3}\leqslant ax+b\leqslant -8x^2-30x-17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4};-\frac{3}{4}\right)$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB=1$, $BD=2$, $CD=3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2. $\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases}$

Преобразуем подкоренное выражение в правой части первого уравнения системы: $xy-x-2y+2=x(y-1)-2(y-1)=(y-1)(x-2)$.

Во втором уравнении системы выделим полные квадраты: $(x^2-4x)+$ $+(9y^2-18y)=12$, $(x^2-4x+4)+(9y^2-18y+9)=12+4+9$, $(x-2)^2+(3y-3)^2=25$, т.е. $(x-2)^2+9(y-1)^2=25$. Учитывая проделанные преобразования, перепишем систему в виде: $\begin{cases} x-2y=\sqrt{(y-1)(x-2)} \\ (x-2)^2+9(y-1)^2=25 \end{cases}$. Сделаем замены: $t=y-1$, $z=x-2y$. Тогда заметим, что $2t+z=2y-2+x-2y=$ $=x-2$.

С учётом замен, перепишем первое уравнение системы так: $\cancel{2t+z}\ z=\sqrt{t(2t+z)}$.

Поскольку корень неотрицателен, то $z\geq0$. Учитывая это, перепишем уравнение в виде: $z^2=2t^2+tz$. Рассмотрим полученное уравнение как квадратное относительно t: $2t^2+z\cdot t-z^2=0$: $D=z^2+4\cdot2z^2=9z^2\Rightarrow t_{1,2}=\frac{-z\pm3z}{4}$, т.е. $t_1=\frac{z}{2}$, $t_2=-z$. Рассмотрим случай: $t=-z$. Второе уравнение системы имеет вид: $(2t+z)^2+9t^2=25$. При $t=-z$ получим: $(-2z+z)^2+9z^2=25$, $10z^2=25\Rightarrow z=\pm\frac{5}{\sqrt{10}}=\pm\sqrt{\frac{5}{2}}$. Однако $z\geq0\Rightarrow z=\sqrt{\frac{5}{2}}$. Тогда $t=-\sqrt{\frac{5}{2}}$.

Рассмотрим случай: $t=\frac{z}{2}$. Тогда получим: $(z+z)^2+9\cdot\frac{z^2}{4}=25$, $4z^2+\frac{9}{4}z^2=25$, $16z^2+9z^2=100$, $25z^2=100\Rightarrow z^2=4$, т.е. $z=\pm2$. Однако $z\geq0$, значит, $z=2$. Тогда $t=\cancel{2}\ 2/2=1$.

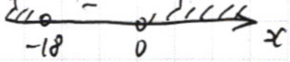
Если $t=-\sqrt{\frac{5}{2}}$, $z=\sqrt{\frac{5}{2}}$, то $\begin{cases} y-1=-\sqrt{\frac{5}{2}} \\ x-2y=\sqrt{\frac{5}{2}} \end{cases}$, $\begin{cases} y=1-\sqrt{\frac{5}{2}} \\ x=\sqrt{\frac{5}{2}}+2-2\sqrt{\frac{5}{2}}=2-\sqrt{\frac{5}{2}}. \end{cases}$

Если $t=1, z=2$, то $\begin{cases} y-1=1 \\ x-2y=2 \end{cases}$, $\begin{cases} y=2 \\ x=2+2\cdot 2 \end{cases}$, $\begin{cases} y=2 \\ x=6 \end{cases}$

Ответ: $(6;2)$, $\left(2-\sqrt{\frac{5}{2}}; 1-\sqrt{\frac{5}{2}}\right)$

№3. $5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13}-18x$

Поскольку логарифмируемое выражение должно быть положительно, то $x^2+18x>0$, $x(x+18)>0$; по методу интервалов получим:

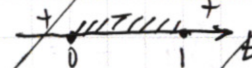


$x\in(-\infty;-18)\cup(0;+\infty)$.

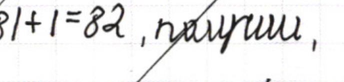
Заметим, что тогда $|x^2+18x|=x^2+18x$. Учитывая это, перепишем неравенство в виде: ~~$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2+18x \geq (x^2+18x)^{\log_{12}13}$. Заменим x^2+18x~~ на $t>0$. Тогда получим $5^{\log_{12}t}+t\geq t^{\log_{12}13}$, $5^{\log_{12}t}\geq t^{\log_{12}13}-t$,

$5^{\log_{12}t}\geq t(t^{\log_{12}13-1}-1)$ (*) ~~Поскольку функция $\log_{12}g(t)$ является монотонно возрастающей~~ Заметим, что $5^{\log_{12}t}>0$ при любых $t>0$, поэтому, если ~~левая~~ ~~так~~ правая часть будет неположительной, то неравенство будет верным. ~~Ит~~

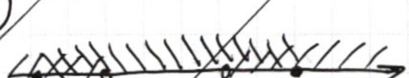
Имеем, $t(t^{\log_{12}13-1}-1)\leq 0$. Поскольку $\log_{12}13-1>\log_{12}12-1=1$, то функция $t^{\log_{12}13-1}$ монотонно возрастает, поэтому знак выражение $t^{\log_{12}13-1}-1$ совпадает со знаком выражение $t-1$. Тогда $t(t-1)\leq 0$. Значит, $0\leq t\leq 1$.



Учитывая, что $t>0$, получим: $0<t\leq 1$. Возвращаясь к замене: $0<x^2+18x\leq 1$; Из $x^2+18x\leq 1$, $x^2+18x-1\leq 0$: $\frac{1}{4}D=81+1=82$, получим, что $x_1=\frac{-9+\sqrt{82}}{1}=\sqrt{82}-9$, $x_2=-9-\sqrt{82}$, т.е.



$x\in[-9-\sqrt{82}; -9+\sqrt{82}]$. Учитывая, что $x\in(-\infty;-18)\cup(0;+\infty)$, получим: $x\in[-9-\sqrt{82}; -18)\cup(0; -9+\sqrt{82}]$ (1)



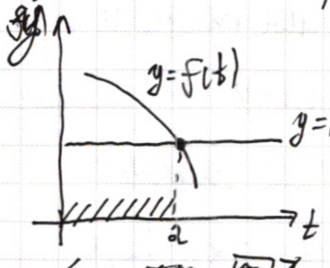
Если же $t(t^{\log_{12}13-1}-1)>0$, то прологарифмируем неравенство (*) по основанию 12 (т.к. $12>1$, то знак неравенства не изменится). Имеем: $\log_{12}(5^{\log_{12}t})\geq\log_{12}(t(t^{\log_{12}13-1}-1))$, получим:

$\log_{12}t\cdot\log_{12}5\geq\log_{12}t+\log_{12}(t^{\log_{12}13-1}-1)$, $\log_{12}t^{\log_{12}5}\geq\log_{12}t+\log_{12}(t^{\log_{12}13-1}-1)$,

$\log_{12}t^{\log_{12}5}-\log_{12}t\geq\log_{12}(t^{\log_{12}13-1}-1)$, т.к. $t>0$, то $\log_{12}\left(\frac{t^{\log_{12}5}}{t}\right)\geq\log_{12}(t^{\log_{12}13-1}-1)$,

~~$\log_{12}(t^{\log_{12}5-1}) \geq \log_{13}(t^{\log_{12}13-1}-1)$ Поскольку мы рассматриваемый случай, когда $t^{\log_{12}13-1}-1>0$, то неравенство равносильно следующему: $t^{\log_{12}5-1} \geq t^{\log_{12}13-1}-1$,~~

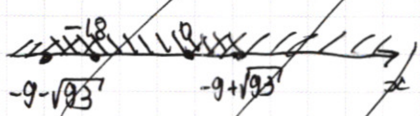
Учитывая это, перепишем неравенство в виде: $5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2+18x \geq$ $\geq (x^2+18x)^{\log_{12}13}$. Заменим $\log_{12}(x^2+18x)=t$. Тогда $x^2+18x=12^t$, а $(x^2+18x)^{\log_{12}13}=(12^t)^{\log_{12}13}=(12^{\log_{12}13})^t=13^t$. С учётом замен, перепишем неравенство в виде: $5^t+12^t\geq 13^t$. Разделим на $13^t>0$ без смены знака неравенства: $\frac{5^t}{13^t}+\frac{12^t}{13^t}\geq 1$, $(\frac{5}{13})^t+(\frac{12}{13})^t\geq 1$. Функция $f(t)=(\frac{5}{13})^t+(\frac{12}{13})^t$ является монотонно убывающей как сумма монотонно убывающих функций, поэтому уравнение $f(t)=1$ имеет не ~~мене~~ более одного корня. Заметим, что $f(2)=\frac{25}{169}+\frac{144}{169}=\frac{169}{169}=1$, поэтому $t=2$ — единственный корень. Тогда наше неравенство имеет решение: $t\leq 2$.



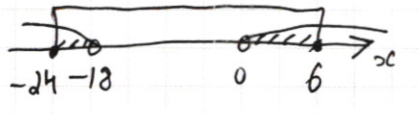
Возвращаясь к замене получим: $\log_{12}(x^2+18x)\leq 2=$ $=\log_{12}144$, $x^2+18x\leq 144$ (на ограничениях)

~~$x^2+18x-144\leq 0$: $\frac{1}{4}D=81+144=93 \Rightarrow x_{1,2}=-9\pm\sqrt{93}$. Значит, $x\in[-9-\sqrt{93}$~~ $\in[-9-\sqrt{93};-9+\sqrt{93}]$. С учётом ограничений окончательно получим: $x\in[-9-\sqrt{93};-18)\cup(0;-9+\sqrt{93}]$.

~~Ответ: $x\in[-9-\sqrt{93};-18)\cup(0$~~



$x^2+18x-144\leq 0$: $\frac{1}{4}D=81+144=225 \Rightarrow x_{1,2}=-9\pm 15$, $x_1=-24$, $x_2=6$, т.е. $x\in[-24;6]$. Пересечём найденное решение с ограничением. Окончательно получим: $x\in[-24;-18)\cup(0;6]$.



Ответ: $x\in[-24;-18)\cup(0;6]$

№1. $\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt5}$ (1), $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin2\alpha=-\frac{4}{5}$ (2). Распишем в (2) сумму синусов: $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin2\alpha=2\sin\frac{2\alpha+4\beta+2\alpha}{2}\cos\frac{2\alpha+4\beta-2\alpha}{2}=2\sin(2\alpha+2\beta)\cos2\beta$. Итак, $2\sin(2\alpha+2\beta)\cos2\beta=-\frac{4}{5}$. Из (1) $\Rightarrow$ $\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt5}$, поэтому $2\cdot(-\frac{1}{\sqrt5})\cos2\beta=-\frac{4}{5}$, $\frac{2}{\sqrt5}\cos2\beta=\frac45$, откуда $\cos2\beta=\frac{2}{\sqrt5}$. Тогда из основного триг. тождества находим $\sin2\beta=\pm\sqrt{1-\cos^2 2\beta}=\pm\frac{1}{\sqrt5}$. Предположим, что $\cos2\beta=\frac{2}{\sqrt5}$, $\sin2\beta=\frac{1}{\sqrt5}$ (3).

Равенство (1) перепишем в виде: $\sin2\alpha\cos2\beta+\cos2\alpha\sin2\beta=-\frac{1}{\sqrt5}$. Учитывая (3), получим: $\frac{2}{\sqrt5}\sin2\alpha+\frac{1}{\sqrt5}\cos2\alpha=-\frac{1}{\sqrt5}\ |\cdot\sqrt5$, $2\sin2\alpha+\cos2\alpha=-1$, $2\sin2\alpha=-1-\underbrace{(2\cos^2\alpha-1)}_{\cos2\alpha}$,
$2\sin2\alpha=-1-2\cos^2\alpha+1$, $2\sin2\alpha=-2\cos^2\alpha$, $2\sin\alpha\cos\alpha=-\cos^2\alpha$. По условию $tg\alpha$ существует, а значит, $\cos\alpha\neq0$. Разделим на $\cos^2\alpha$: $\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha}=-1$, $2tg\alpha=-1$. Значит $tg\alpha=-\frac12$. Предположим, что $\cos2\beta=\frac{2}{\sqrt5}$, $\sin2\beta=-\frac{1}{\sqrt5}$ (4). Тогда первое уравнение $\sin2\alpha\cos2\beta+\cos2\alpha\sin2\beta=-\frac{1}{\sqrt5}$ примет вид: $\frac{2}{\sqrt5}\sin2\alpha-\frac{1}{\sqrt5}\cos2\alpha=-\frac{1}{\sqrt5}\ |\cdot\sqrt5$,
$2\sin2\alpha-\cos2\alpha=-1$, $2\sin2\alpha=-1+\underbrace{(1-2\sin^2\alpha)}_{\cos2\alpha}$, $2\sin2\alpha=-2\sin^2\alpha$, $2\sin\alpha\cos\alpha=-\sin^2\alpha$. Если $\sin\alpha=0$, то $\cos\alpha\neq0$ и $tg\alpha=0$. Если $\sin\alpha\neq0$, то разделим на $\sin^2\alpha$: $2\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha}=-1$, $2ctg\alpha=-1\Rightarrow ctg\alpha=-\frac12$, т.е. $tg\alpha=-2$. При всех возможных случаях мы получили три возможных значения для $tg\alpha$: $tg\alpha=-2$, $tg\alpha=0$, $tg\alpha=-\frac12$. Поскольку по условию задачи их не меньше трёх, то все три найденных значения подходят.

Ответ: $-2, -\frac12, 0$.

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(p)$

МФТИ

$f(1\cdot p) = f(1) + f(p) = [\frac{p}{u}]$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

$f(1\cdot a) = f(1) + f(a)$ $f(1) = 0$

$5^{\log_{12} a} + a \geq a^{\log_{12} 13}$ $f(\frac{x}{y}) = f$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = -\frac{4}{5}$ $\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{}}$

$\log_{12} a = t$ $12^t = a$ $2\sin$

$\cos 2\beta = -\frac{2}{5}$ $\cos 2\beta = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$12^a = t$ $\log_{12}(x^2+18x) = a$ $\log_{12} 13$ $\log_{12}(x^2+18x) = a$

$(12^a) = (x^2+18x)$ $(12^{\log_{12} 13})^a$ $x^2+18x = a$ $(12^a)^{\log_{12} 13}$ $2\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}\cos 2\beta = \frac{4}{5}$

$5^a + 12^a \geq a^{\log_{12} 13}$

13^a $(x^2+18x)^{\log_{12} 13}$ 13^a $\cos 2\beta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

$5^a + 12^a$

$5^a + 12^a \geq 13^a$ $25 + 144$ $\sin$ $-\frac{\pi}{2} \leq 2\beta \leq -\frac{\pi}{2}$ $-\frac{2}{5} + \frac{1}{2}(\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha)$

$\cos 2b = \frac{3}{5}$

$\beta \leq$ $\sin a + \sin(2b-a) = -\frac{4}{5}$

$(\frac{5}{13})^a + (\frac{12}{13})^a \geq 1$ $\pi \leq 2\alpha + 2\beta \leq 0$ $\leq 2\alpha \leq -\frac{\pi}{2}$ $2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)$ $-\frac{2}{5} + \frac{1}{2}$

π

$\sin(2$ $\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$ $-\frac{2}{5} - \frac{2}{5} + \sin 2\alpha$

$\sin(2\alpha+4\beta)$ $2\sin b\cos(a-2b) = -\frac{4}{5}$

$\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y$ $2\sin b\cos(a-b) = -\frac{4}{5}$

$\sin(2\alpha+2\beta+2\beta)$

$2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = -\frac{4}{5}$ $\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta + \cos(2\alpha+2\beta)\sin 2\beta$

$\sin b\cos(a-b) = -\frac{2}{5}$

$x = \frac{\pi}{2}$ $y = \pi$

$x = \frac{a+b}{2}$ $x + y = a+b$ $\sin(2\alpha)2\beta$ $-\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\cos 2\beta = -\frac{2}{5}$ $-\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}} + \cos(2\alpha+2\beta)\sin 2\beta$

$\cos 2\beta = \frac{2}{5}\sqrt{5} = \frac{2}{\sqrt{5}}$ $-\frac{4}{5} + \sin 2\alpha =$ $4\alpha = 4b - 2a$ $\alpha = b - \frac{a}{2}$ $2\alpha = 2b - a$

$\sin(2\alpha+2\beta+2\beta)$ $\cos 2\beta = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$\cos 2\beta =$ $\frac{2}{5}$ $4\alpha + 6\beta = a+b$

$\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta + \cos(2\alpha+2\beta)\sin 2\beta = -\frac{4}{5}$ $\frac{1-\cos 2\beta}{2} = \frac{1}{5}$ $4\alpha + 3a - 3b = a+b$

$-\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}$ $\frac{1-\cos 2\beta}{2} = \frac{1}{5}$ $\frac{1}{2}(\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$\frac{\pi}{5} + \pi$ $2a + 4$ $2\alpha + 4\beta = a$

$-\frac{2}{5} + \cos(2\alpha+2\beta)\sin 2\beta = -\frac{4}{5}$ $\frac{2\pi}{2\cdot 4}$ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ $\sin a + \sin(2b-a) = -\frac{4}{5}$ $\frac{2}{5}$ $2\alpha + 2\beta = b$

$1 - \cos 2\beta = \frac{2}{5}$ $1 - \cos 2\beta = \frac{2}{5}$ $\sin b = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\alpha = a$

$\cos 2\beta = \frac{3}{5}$ $-\frac{2}{5} + \frac{1}{2}(\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$ $\frac{4+2}{5} =$ $2\beta = b$

$\sin a + \sin(2b-a) = -\frac{4}{5}$ $a - b = 2\beta$

$\sin 2\alpha + \sin(2\alpha+2\beta)$ $\sin b = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin 2\alpha + \beta$ $\sin(2\alpha+\beta)\cos\beta + \sin(2\alpha+4\beta)$

☐ черновик ☐ чистовик Страница №__

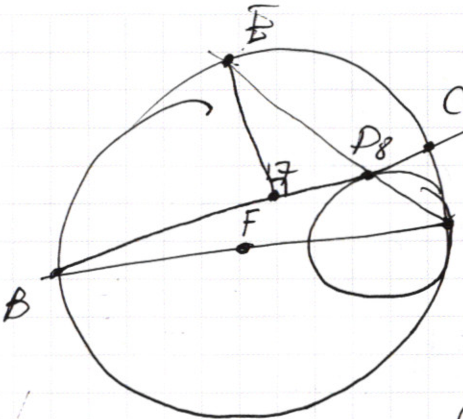
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

$ax+b \geqslant \frac{12x+11}{4x+3}$ $\quad a>0$

$\frac{12x+11}{4x+3} \leq -8x^2-30x-17$

$-\frac{11}{4}a+b \geqslant$

$ax+b \geqslant \frac{12x+11}{4x+3}$



$\frac{12\cdot(-\frac{11}{4})+11}{-4\cdot\frac{11}{4}+3}$

$\frac{-33+11}{-8} = -\frac{22}{8} = \frac{11}{4}$

$a>0$

$-\frac{11}{4}a+b \geqslant -\frac{11}{4}$

$b \geqslant -\frac{11}{4}+\frac{11}{4}a$

$\sin 2\alpha\cos 2\beta+\cos 2\alpha\sin 2\beta=-\frac{1}{\sqrt5}$

$\frac{1-\cos(4\alpha+4\beta)}{2}=\frac{1}{5}$

$\cos(4\alpha+4\beta)=\frac{3}{5}$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}$

$\frac{1}{2}(\cos 4\beta-\cos$

$\cancel{2\sin}$

$\cos 2\beta=\frac{2}{\sqrt5}$

$\sin 2\beta=\frac{1}{\sqrt5}$

$2\alpha+2\beta=a$

$2\beta=b$

$\sin a=-\sqrt5$

$\sin(a+b)+\sin(a-b)=-\frac{4}{5}$

$2\alpha=a-b$

$\alpha=\frac{a-b}{2}$

$2\sin\frac{a+b+a-b}{2}\cos\frac{a+b-a+b}{2}=-\frac{4}{5}$

$2\sin a\cos b=-\frac{4}{5}$

$\sin 2\alpha\cdot\frac{2}{\sqrt5}+\frac{1}{\sqrt5}\cos 2\alpha=-\frac{1}{\sqrt5}$

$2\sin 2\alpha+\cos 2\alpha=-1$

$\cancel{\cos 2\alpha}$

$-1-\cos 2\alpha=$
$=-1-2\cos^2\alpha+1$

$2\sin 2\alpha=-1+1$

$2\sin 2\alpha=-2\cos^2\alpha$

$2\sin\alpha\cos\alpha=-\cos^2\alpha$

$\cos b=\frac{2}{\sqrt5}$

$b=\arccos\frac{2}{\sqrt5}$

$-2\operatorname{tg}\alpha=-1$

$\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{2}$

$2\sin$

$\cos 2\beta=-\frac{2}{5}\cdot\sqrt5=\frac{2}{\sqrt5}$

$\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)=-\frac{1}{2\sqrt5}$

$\sin 2\alpha$

$\sin a=-\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin(a+b)+\sin(a-b)=-\frac{4}{5}$

$\sin 2\alpha(\cos$

$\sin 2\alpha\cos 4\beta+\cos 2\alpha\sin 4\beta+\sin 2\alpha$

$\sin 2\alpha\cos 4\beta+\cos 2\alpha\sin 4\beta=-\frac{4}{5}$

$\sin 2\alpha(\cos 4\beta+1)+\cos 2\alpha\sin 4\beta$

$2\sin\frac{a-a-b}{2}\cos\frac{a+b+a}{2}$

$-2\sin\frac{b}{2}\cos(a+\frac{b}{2})=$

$-2\sin b/2\cos(a+b/2)$

$\sin 2\alpha\cos 2\beta+\sin$

$\sin 2\alpha\cos 2\beta+\cos 2\alpha\sin 2\beta=c$

$\sin 2\alpha\cos 4\beta+\cos 2\alpha\sin 4\beta+\sin 2\alpha=b$

$\sin 2\alpha\cos 2\beta+\cos 2\alpha\sin 2\beta=c$

$\sin 2\alpha(\cos 4\beta+1)+\cos 2\alpha\sin 4\beta=b$

$\sin 2\alpha\cdot\sin^2 2\beta+\cos 2\alpha+\sin 4b$

$4\sin 2\alpha\cos^2\beta\sin^2\beta+\cos 2\alpha\cancel{+}\sin 4\beta$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1, 2, 3,

$f(\frac{x}{y})<0$ log

$f(x\cdot\frac{1}{y}) = f(x) + f(\frac{1}{y}) < 0$

$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq (x^2+18x)^{\log_{12}13} - 18x$

$\frac{30}{16} = \frac{15}{8}$

$x^2+18x>0$

$x(x+18)>0$

$x>0$
$x<-18$

$x^2+18x>0$

$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq (x^2+18x)^{\log_{12}13} - 18x$

$\cancel{\log_{12}(x^2+18x) + \log_5 x^2 \geq \log_{12}13 \log_{12}(x^2+18x) - \log_5 18x}$

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23

$f(4)=f(2)+f(2)$

5

$\log_{12}(x^2+18x) = \frac{\log_5(x^2+18x)}{\log_5 12}$

$\log_{12}a \geq \log_{12}(a^{\log_{12}13} - a)$

$\log_{12}a \geq \log_{12}a + \log_{12}(a^{\log_{12}13-1} - 1)$

$\left(5^{\log_5(x^2+18x)}\right)^{\frac{1}{\log_5 12}} + x^2 \geq (x^2+18x)^{\log_{12}13}$

$\log_{12}(a^{\log_{12}13-1}-1)\leq 0$

$f(16)=f(4)+f(4)$

$f(16)=4f(2)$

$(x^2+18x)^{\frac{1}{\log_5 12}} + x^2$

$x^2+18=a$

$t^2 - t$

$x^2+18x=t$

$a^{\log_{12}13-1}-1\leq 0$

$t(t-1)$

$\boxed{5^{\log_{12}a} + a \geq a^{\log_{12}13}}$

$a>0$

p

p^k

$b=\frac{1}{\log_{12}5}$

$5^{\log_{12}a} = 5^{\frac{\log_5 a}{\log_{12}5}}$

$5^{\log_{12}a} \geq a(a^{\log_{12}13-1} - 1)$ p-про

$a^b + a \geq a^{\log_{12}13}$

$f(p^2) = 2f(p)$

$5^{\log_{12}a} \geq a(a^{\log_{12}\frac{13}{12}} - 1)$

$f(p^k) = k[p]$

$a^b + a \geq a^c$

$\cancel{\log_{12}a}$

$f(p^k) = kf(p)$

$\log_{12}a \cdot \log_{12}5 \geq \log_{12}(a^{\log_{12}13} - a)$

$\frac{a^b+a}{a^c}\geq 1$

$f(p^k) = k\cdot[\frac{p}{4}]$

$a^b - a^c + a \geq 0$

$f(p) = [\frac{p}{4}]$

$\log_{12}$

$f(p)\leq 5$

$[\frac{p}{4}]$ $[\frac{23}{4}] = 5$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$t^{\log_{12}13} - t \le 0$

$t(t^{\log_{12}13-1} - 1) \le 0$

$5^{-\log_{12}a} + a \ge a^{\log_{12}13}$

$c\log_{12}t \ge c\log_{12}t+1$

$\log_{12}tc \ge b \ne 0$

$c\log_{12}t \ge \log_{12}$

+ — +

0 1

$t^{\log_{12}13-1}(1-t^{\log_{12}\frac{13}{5}}) \le 1$

$t^{\log_{12}5-1} \ge t^{\log_{12}13-1} - 1$

$\log_{12}t \ge c$

$\log_{12}t \ge \log_{12}t + \log_{12}t$

$\log_{12}(t^{c-1}) \ge b$

$t(t^{\log_{12}13-1} - 1) \le 0$

$t(t-1)$

$t^{\log_{12}13-1-\log_{12}t} \ge t^{\log_{12}13} + t$

$\log \cdot 5$

$\log_{12}5 - t - \log_{12}13 \ge t$

$20-17$

-3

$-\frac{121}{2} + \frac{181}{2} - 17$

$t^{\log_{12}\frac{5}{12}} \ge t^{\log_{12}\frac{13}{12}} - 1$

$\log_{12}\frac{5}{12}\log_{12}t \ge$

$-8 \cdot \frac{121}{16} + 30 \cdot \frac{11}{4} - 17$

$\log_{12}t \ge \log_5 t + \log_5(c)$

$t^{\log_{12}\frac{5}{12}} \ge t^{\log_{12}\frac{13}{12}} - t$

$\frac{-12 \cdot \frac{11}{4} + 11}{-4 \cdot \frac{11}{4} + 3}$ $\quad \frac{-22}{-8}$ $\quad \frac{22}{8} = \frac{11}{4}$

81

$\frac{11}{4} \le -\frac{11}{4}a + b \le$

9

81

$\log_{12}a \cdot (\log$

$\log_{12}a \cdot \log_{12}\frac{5}{12} \ge \log_{12}t$

$5^{\log}$

$t^{\log_{12}13-1-\log_{12}5+1}$

$t^{\log_{12}\frac{5}{12}} \ge t^{\log_{12}\frac{13}{12}} - 1$

при $t > 0$

$t^{\log_{12}\frac{13}{5}}(1-$

$5^{\log_{12}a} + a \ge a^{\log_{12}13}$

$\log$

$1^{\log_{12}5}$ $\quad 1 \ge 1-1$

$\frac{11}{4}$

$5^{\log_{12}a} \ge a(a^{\log\frac{13}{12}} - 1)$

-3

2

$\log_{12}a \cdot \log_{12}5 \ge \log_{12}a + \log(a^{\log\frac{13}{12}} - 1)$

$t^{\log_{12}\frac{13}{12}} - t^{\log_{12}\frac{5}{12}} \le 1$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2(\alpha+\beta)) = -\frac{1}{\sqrt{5}} = 2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\sin(2\alpha+2\beta)-\sin 2\alpha = 2\sin\beta\cos(2\alpha+\beta)$

$\sin x\cos y =$

$\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y$

$\sin(2(\alpha+2\beta)$

$\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta) = -\frac{2}{\sqrt{5}}$

$\frac{tg x + tg y}{1-}$

$\frac{4}{2}(\sin$ $\quad 2\sin\frac{2\alpha+4\beta+2\alpha-2\beta}{2}\cos 2\alpha+3\beta$

$2\sin\beta\cos$

$\sin 2(\alpha+2\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha - \sin(2\alpha-2\beta) = -\frac{4}{5}+\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin 2(\alpha+$

$2\sin\left(\frac{2\alpha+4\beta-2\alpha+2\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{2\alpha+4\beta+2\alpha-2\beta}{2}\right) = -\frac{4}{5}+\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin\alpha-\sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$

$2\sin 3\beta\cos(2\alpha+\beta) =$ $\quad tg(x+y) = \frac{\sin x\cos y+\cos x\sin y}{\cos x\cos y-\sin x\sin y}$

$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$\sin 2\alpha\cos 2\beta + \cos 2\alpha\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$2\sin\left(\frac{2\alpha+4\beta+2\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{2\alpha+4\beta-2\alpha}{2}\right) = -\frac{4}{5}$

$\sin 2\alpha\cos 4\beta + \cos 2\alpha\sin 4\beta + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = -\frac{4}{5}$

$\cos 2\beta = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$2(\alpha+\beta)$ $\quad 1-\frac{4}{5} = \frac{1}{5}$

$-\frac{2}{\sqrt{5}}\cos 2\beta = -\frac{4}{5}$

$\sin 2\beta = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin 2\alpha\cos 4\beta + \cos 2\alpha\sin 4\beta + \sin 2\alpha$

$\boxed{\cos 2\beta = \frac{4}{5}\cdot\frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{5} = \frac{2}{\sqrt{5}}}$

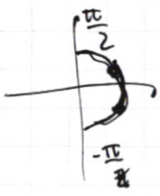
$tg 2\alpha\cos 2\beta + \cancel{ctg 2\alpha}\ \sin 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}a$

$1-2\sin^2\beta = \frac{2}{\sqrt{5}}$ $\quad 2\beta$

$a = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$2\sin^2\beta = 1-\frac{2}{\sqrt{5}}$

$tg 2\alpha\cos 4\beta + \sin 4\beta + \sin 2\alpha = b$ $\quad b = -\frac{4}{5}$



$tg 2\alpha(\cos 2\beta - \cos 4\beta) - \sin 4\beta = a-b$

$\pi \le 2(\alpha+\beta) \le 0$

$\frac{\pi}{2} \le \alpha+\beta \le 0$

$tg 2\alpha(\cos 2\beta - 2\cos^2\beta+1) - \sin 4\beta = a-b$

α $\quad \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$ $\quad 2t$

$1-tg^2\alpha$

$tg 2\alpha\, k - \sin 4\beta$

$1-$

$tg 2\alpha\, k - c = a-b \Rightarrow tg 2\alpha = \frac{a-b+c}{k}$

$\frac{2}{\sqrt{5}}tg 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)$

$\cancel{1-tg}$ $\quad \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$

$2tg 2\alpha + \sqrt{5}\sin 2\alpha = -1$

$tg 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{1-2\sin^2\alpha}$ $\quad 2\sin 2\alpha + \sqrt{5}\sin 2\alpha\cos 2\alpha = -\cos 2\alpha$

$\frac{4 tg\alpha}{1-tg^2\alpha} + \sqrt{5}\sin 2\alpha = -1$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

x^2 $\quad$ $\sin x + \sin x \quad \sin 0 \quad \sin x \cdot \cos$

$\cos 2\beta = \frac{2}{\sqrt{5}}$ $\quad 2\alpha + 2\beta - 2\alpha - 4\beta$

$\sin(2\alpha+2\beta) + \sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5} + \frac{1}{\sqrt{5}}$

$2\sin(2\alpha+3\beta)\cos\beta + \sin 2\alpha$

$\cancel{-2\sin\beta\cos(2\alpha+3\beta)}$ $\quad \frac{5}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}}$

$(x-2y)^2 = (y-1)(x-2)$

$(x-2)^2 + 9(y-1)^2 = 25$

$b^2 = a(2a+b)$

$(2a+b)^2 + 9a^2 = 25$

$b^2 = 2a^2 + ab$

$4a^2 + 4ab + b^2 + 9a^2 = 25$

$13a^2 + 4ab + b^2 = 25$

$\boxed{2a^2 + ab - b^2 = 0}$

$y - 1 = a$

$x - 2y = b$

$x - 2 = 2a + b$

$x^2 + 9y^2 - 4x - 18y = 12$

$(x^2 - 4x + 4) + (9y^2 - 18y + 9) = 12 + 13$

$2y^2 + x - 2y$

$3 \cdot 2 \quad 6 \quad 9 \quad 6 - 4$

$\sqrt{12 - 6 - 4 + 2}$ $\quad xy - x - 2y + 2$

$y \quad 2$

$(x-2)^2 + (3y-3)^2 = 25$ $\quad y = 2$ $\quad x(y-1)$

$\boxed{(x-2)^2 + 3(y-1)^2 = 25}$ $\quad x = 6$ $\quad x(y-1) - 2(y-1)$

$x - 2y = \sqrt{(y-1)(x-2)}$ $\quad x \geq 2y$ $\quad b^2 + 4b^2$

$(x-2)^2 + 9(y-1)^2 = 25$ $\quad \frac{22}{4}$

$(x-2y)^2 = (y-1)(x-2)$

$2a^2 + ab \cdot b^2$

$2a^2 + b \cdot a - b^2$

$(x-2y)^2 = (y-1)(x-2)$

$(5y)^2 - 10y + 1$

$2t = 2y - 2$

$z = x - 2y$

$y - 1 = t$

$22x^2 - \cancel{4xy} + 4y^2 = yx - 2y - x + 2$

$25y^2 - 10y$

$x - 2y = z$ $\quad 2t + z = x - 2$ $\quad b^2 +$

$-z + 3z$

$x^2 - 4xy + 4y^2 = xy - 2y$ $\quad 2 \quad 5y$

$\frac{\cancel{25}}{\cancel{10}} \frac{5}{2}$

$x^2 - 4xy + 4y^2 = xy - 2y - x + 2$

$x^2 - 4xy + 4y^2 = xy - 2y - x + 2$

$x^2 - 5xy + 4y^2 + 2y + x - 2 = 0 \mid \cdot 6$

$x^2 - 5xy + 4y^2 + 2y + x - 2 = 0 \mid \cdot 4$

$x^2 + 0 + 9y^2 - 18y - 4x - 12 = 0$

$x^2 + 9y^2 - 4x - 18y = 12$ $\quad 24 + 9$

32

$x^2 - 5xy$ $\quad (x-2y)^2 + (y-1)^2 = 5$

$4x^2 - 20xy + 16y^2 + 8y + 4x - 8 = 0$ $\quad 9$

$x^2 + 0 + 9y^2 - 18y - 4x - 12 = 0$ $\quad 36$

81

$x^2 - 5xy + 4y^2 + 2y + x - 2 = 0 \mid \cdot 4$

$x^2 + 0 + 9y^2 - 18y - 4x - 12 = 0$

$5x^2 - 20xy + 25y^2 - 10y - 20 = 0$ $\quad 144 + 81 = 225$

$4x^2 - 20xy + 16y^2 + 8y + 4x - 8 = 0$

$x^2 + 0 + 9y^2 - 18y - 4x - 12 = 0$

$x^2 - 4xy + 5y^2 - 2y - 4 = 0$

$5x^2 - 20xy + 25y^2 - 10y - 20 = 0$

$x^2 - 4y \cdot x + 5y^2 - 2y - 4 = 0$ $\quad -y^2 + 2y + 4 \geq 0$

$x^2 - 4xy + 5y^2 - 2y - 4 = 0$

$4y^2 - 5y^2 + 2y + 4 \geq 0$

$x^2 - 4xy + 4y^2 + y^2 - 2y + 1 = 5$

$-9 \quad \frac{25}{4} \quad -\frac{15}{9}$

☐ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)