

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 4

ШИФР

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}; \quad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg} \alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 6x = \sqrt{xy - 6x - y + 6}, \\ 9x^2 + y^2 - 18x - 12y = 45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$|x^2 - 26x|^{\log_5 12} + 26x \geq x^2 + 13^{\log_5(26x - x^2)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω , а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D . Луч AD повторно пересекает Ω в точке E . Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC , повторно пересекает Ω в точке F . Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF , если известно, что $CD = 12$, $BD = 13$.
5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $4 \leq x \leq 28$, $4 \leq y \leq 28$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{8 - 6x}{3x - 2} \geq ax + b \geq 18x^2 - 51x + 28$$

выполнено для всех x на промежутке $(\frac{2}{3}; 2]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $TXYZ$, вершина Y которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра TY . Известно, что $XY = \sqrt{3}$, $TX = \sqrt{2}$, $TZ = 2$. Найдите длину ребра XZ . Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N1

$$\sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$$

$$\sin(2\alpha + 2\beta) \cdot \cos 2\beta = -\frac{1}{17}$$

$$\Rightarrow \cos 2\beta = -\frac{1}{17}$$

$$\sin 2\beta = \pm \frac{4}{17}$$

$$\text{Есть } \sin 2\beta = \frac{4}{17}$$

$$\text{то } -\frac{\sin 2\alpha}{17} + \frac{4}{17} \cos 2\alpha = -\frac{1}{17}$$

$$-\sin 2\alpha + 4 \cos 2\alpha = -1$$

$$\text{Есть: } \sin 2\beta = -\frac{4}{17}$$

$$-\sin 2\alpha - 4 \cos 2\alpha = -1$$

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha + 1 &= 4 - 4 \operatorname{tg} \alpha \\ 5 \operatorname{tg} \alpha &= 3 \\ \operatorname{tg} \alpha &= \frac{3}{5} \end{aligned} \right\}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{5}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{5}$$

или

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha + 1 &= 4 - 4 \operatorname{tg} \alpha - 4 \\ \operatorname{tg} \alpha &= \frac{5}{3} \end{aligned} \right\}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{3}$$

$$\text{Ответ: } -1; \frac{5}{3}; \frac{3}{5}$$

$$-\sin 2\alpha + 4 \cos 2\alpha = -1$$

$$4(\cos \alpha - \sin \alpha)(\sin \alpha + \cos \alpha) = -(\cos \alpha + \sin \alpha)^2$$

$$4 \frac{\sin \alpha - \sin \alpha}{\cos \alpha} = -(\cos \alpha + \sin \alpha)$$

$$-\sin 2\alpha - 4 \cos 2\alpha = -1$$

$$\text{или } \cos \alpha + \sin \alpha = 1$$

$$\text{или } 4(\cos \alpha - \sin \alpha) = (\cos \alpha + \sin \alpha)$$

$$4(\cos(\alpha + 45^\circ)) = \sqrt{2}(\sin(\alpha + 45^\circ))$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + 45^\circ) = \sqrt{2}$$

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha + 1}{1 - \operatorname{tg} \alpha} = \sqrt{2} \text{ или } \frac{\operatorname{tg} \alpha + 1}{1 - \operatorname{tg} \alpha} = -\sqrt{2}$$

N2

$$\begin{cases} y - 6x = \sqrt{(y-6)(x-1)} \\ 9(x-1)^2 + (y-6)^2 = 90. \end{cases}$$

$$9(x-1)^2 + (y-6)^2 = 90.$$

$$(x-1) = a$$

$$(y-6) = b.$$

$$b - 6a = \sqrt{ab}.$$

$$9a^2 + b^2 = 90.$$

$$\sqrt{\frac{b}{a}} - 6\sqrt{\frac{a}{b}} = 1.$$

Един, $b > 0; a > 0$

$$t - \frac{6}{t} = 1.$$

Един $b < 0; a < 0.$

$$t^2 - 6 = t.$$

$$t^2 - t - 6 = 0$$

$$D = 1 + 24 = 25$$

$$x_1 = \frac{1 + 5}{2} = 3$$

$$\frac{b}{a} = 3.$$

$$\Rightarrow a = 1.$$

$$b = 3.$$

$$a = 2$$

$$x = 2$$

$$y = 15$$

Ответ: $(2; 15) \left(1 - \frac{3\sqrt{10}}{5}; 6 - \frac{12\sqrt{10}}{5} \right)$

$$-\sqrt{\frac{b}{a}} + 6\sqrt{\frac{a}{b}} = 1$$

$$-t^2 + 6t = 1$$

$$-t^2 + 6 = t$$

$$t^2 + t - 6 = 0.$$

$$x_1 = \frac{-1 + 5}{2} = 2$$

$$x_2 = \frac{-1 - 5}{2} = -1$$

$$9a^2 + 4a^2 = 90.$$

$$5a = 3\sqrt{10}$$

$$a = \frac{3\sqrt{10}}{5}$$

$$x = 1 - \frac{3\sqrt{10}}{5}$$

$$y = 6 - \frac{12\sqrt{10}}{5}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$(26x - x^2) \sqrt{3} > 0$$

$$\Rightarrow |x^2 - 26x| = 26x - x^2$$

$$(26x - x^2) \log_5 12 + 26x - x^2 \geq 13 \log_5 (26x - x^2)$$

$$t \log_5 12 + t \geq 13 \log_5 t.$$

$$12 \log_5 t + 5 \log_5 t \geq 13 \log_5 t$$

$$12^n + 5^n \geq 13^n.$$

$$f(n) = 13^n - 5^n - 12^n - \text{имеет}$$

1 точку экстремума.

$$\Rightarrow 12^n + 5^n = 13^n \text{ имеет 1 корень.}$$

$$n = 2.$$

$$\Rightarrow \log_5 t \leq 2.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 26x - x^2 \leq 25 \\ x \in (0; 26) \end{cases}$$

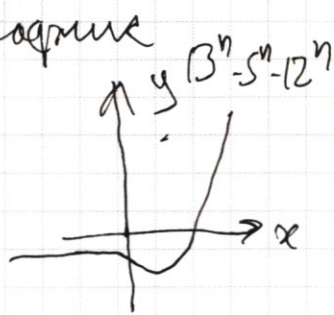
$$x^2 - 26x + 25 > 0.$$

$$D = 546$$

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = 25$$

$$\Rightarrow \text{Ответ: } (0; 1] \cup [25; 26) \Rightarrow \begin{cases} x \in [-\infty; 1] \cup [25; +\infty) \\ x \notin (0; 26) \end{cases}$$



$$f(x) = f\left(\frac{x}{y}\right) + f(y) \quad \sqrt{5}$$

$$f(x) - f(y) < 0.$$

$$\text{Для } k=1; 2; 3 \rightarrow f(k) = 0.$$

$$\Rightarrow f(L \cdot 2^4 \cdot 3^4) = f(L)$$

\Rightarrow Если мы возьмем все

простые числа от 4 до 28

- 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23, то заметим,

что среди чисел $x; y$, не будет

таких, в которых бы входили

сразу 2 наибольших простых

\Rightarrow Если $x = p' \cdot 2^a \cdot 3^b$, наибольшее простое

$f(x) = f(p)$, аналогично где

$f(y)$

Для 23: Есть только число 23

(где которого $p = f = f(23)$,

~~где нет поц~~ Если $y = 23$,

где нет поцойдет простое

~~также~~ также число,
 кроме 23

Заметим, что если p входит

в разложение y , то где нет

~~подойдет~~ все числа, x в разложе

ние x могут войти все
 простые меньшие p .

Рассмотрим для каждого p

Если $p=23$, то $y=23$ и подходит
для x все числа, кроме $23 \Rightarrow \text{пар} - 24$.

Если $p=19$, то $y=19$ и подходит все числа
кроме $23; 19 \Rightarrow \text{пар} - 23$

Если $p=17$, то $y=17$ и подходит все
числа кроме $23; 19; 17 \Rightarrow \text{пар} - 22$

Если $p=13$; $y=13$ или 26 и ~~не~~
не подходит: $23; 19; 17; 13; 26$.

$\Rightarrow \text{пар} = 40$.
Если $p=11$, то $y=11$ или 22
не подходит: $25; 23; 19; 17; 13; 26; 11; 22$
 $\Rightarrow \text{пар} - 34$

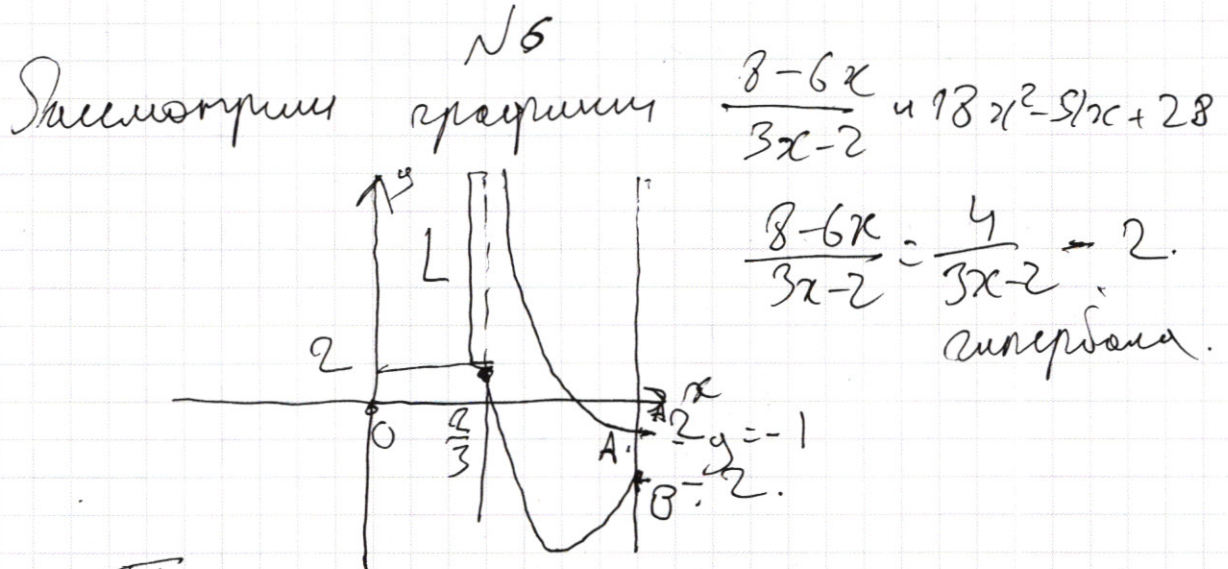
Если $p=7$, то $y=7; 14; 21; 28$
не подходит: ~~$25; 23; 19; 17; 13;$~~
 12 чисел
 $\Rightarrow \text{пар} - 52$

Если $p=5$; то $y=5; 10; 15; 20$;
не подходит 16 чисел
и пар - 36

Отдельно рассмотрим $y=25$,
тогда для x не подходит -
- $23; 19; 17; 13; 26$

\Rightarrow всего пар: $24 + 23 + 22 + 40 + 34 + 52 + 36 + 5 = 236$ Ответ

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



Прямая, проходящая по условию, должна задаваться 2-ми точками, одна из которых лежит на прямой $x = \frac{2}{3}$, а ее координаты больше или равна 2, а у второй ордината лежит от -2 до -1 . На а-обсцисса = x (на луче L и отрезке AB).

рассмотрим прямую, лежащую ниже всего - проходящую через $(\frac{2}{3}; 2)$ и $(2; -2)$

$$\frac{2}{3}a + b = 2$$

$$2a + b = -2$$

$$a = -3; b = 4$$

⇒ это прямая $-3x + 4$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Найдём общие точки $\frac{y}{3x-2} - 2$ и $-3x+4$

$$-3x+4 = \frac{y}{3x-2} - 2$$

$$-3x+6 = \frac{y}{3x-2}$$

$$4(3x-6)(3x-2) = y$$

$$(3x-9)^2 = 4 = -4$$

$$(3x-4) = 0$$

⇒ Есть всего 1 точка пересечения

⇒ $-3x+4$ — касательная к $\frac{y}{3x-2} - 2$

⇒ Прямые касаются выше этой
на данном участке имеют
2 пересечения $\left(\frac{y}{3x-2} - 2, \right)$ ⇒ выше

чем выше чем эта гипербола
на каких-то участках ⇒

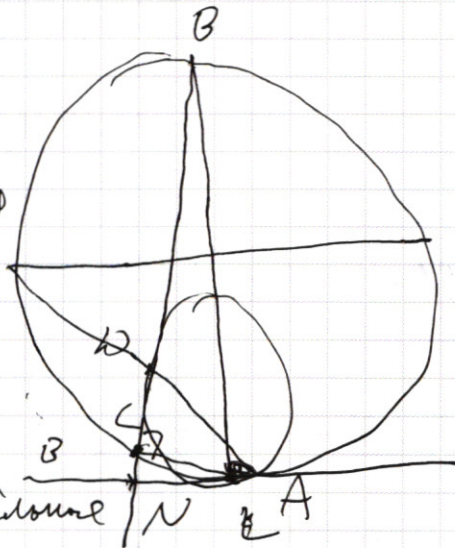
они не касаются

⇒ $(a; b) = (-3; 4)$ — единственная

Ответ: $(a; b) = (-3; 4)$

№4

$N \perp BC \cap L,$
 L - обм. касательная
 в A
 $CN = a$



$BC \perp CN \Rightarrow NL = 12 + a$
 т.к. BC касательная в A
 и L - об. окружности.

по ст. мощи:

$$a \cdot (28 + a) = 12 + a$$

$$\Rightarrow a = 144.$$

$BA \perp L$ т.к. диаметр.

$$AB = 2R = \sqrt{169^2 - 13^2 - 12^2} =$$

$$= 13 \cdot 255$$

$$\Rightarrow R = \frac{13 \cdot 255}{2} \approx 31,5$$

по ст. мощи $BA^2 = 65.$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\sin 2\alpha \cos 2\beta + \sin 2\beta \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$\sin = \sin(2\alpha + 2\beta) \cos 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$\sin 2\beta = \pm \frac{4}{\sqrt{17}}$$

$$a+b = \frac{17}{16}$$

$$ab = \frac{14}{9}$$

$$(6x-8)(3x-2) =$$

$$= 18x^2 - 24x - 16x$$

$$\frac{\sin 2\alpha \pm \frac{4 \cos 2\alpha}{\sqrt{17}}}{\sqrt{17}} = -\frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$\sin 2\alpha + 4 \cos 2\alpha = -1$$

$$(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 + 4(\cos 2\alpha - \sin 2\alpha) =$$

$$(\cos \alpha + \sin \alpha)$$

$$1 + 4 \cos 2\alpha - 4 \sin 2\alpha = 0 \quad (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)(1 + 4 \cos 2\alpha - 4 \sin 2\alpha)$$

$$1 - 4 \cos 2\alpha + 4 \sin 2\alpha = 0 \quad \text{нч.}$$

$$y - 6x = \sqrt{4(x-1)(y-6)(x-1)}$$

$$y - 6x = \sqrt{(x-1)(y-6)}$$

$$y^2 - 18x$$

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{2}{3}} = \sqrt{3}$$

NS.

$$f(x) = f\left(\frac{x}{y}\right) + f(y)$$

$$f(x) - f(y) < 0$$

$$f(4) = 0$$

$$f(5) = 1$$

S: 4, 11, 13, 17, 19, 23

$$f(28) = f(7) + f(4) + f(2) + f(2) + f(2)$$

$$f(p \cdot 2^k) = f(p) + k$$

5	7	11	13	17	19	23
10	14					
15	21	22	26	18	22	
20	28					
25		14				

45	36	36	40	22	23	24
101	13	174	189	222	246	

√6.

$$2601 - 28.72$$

$$\begin{array}{r} \times 51 \\ \underline{51} \\ 151 \\ \underline{283} \\ 2601 \end{array}$$

2.4.

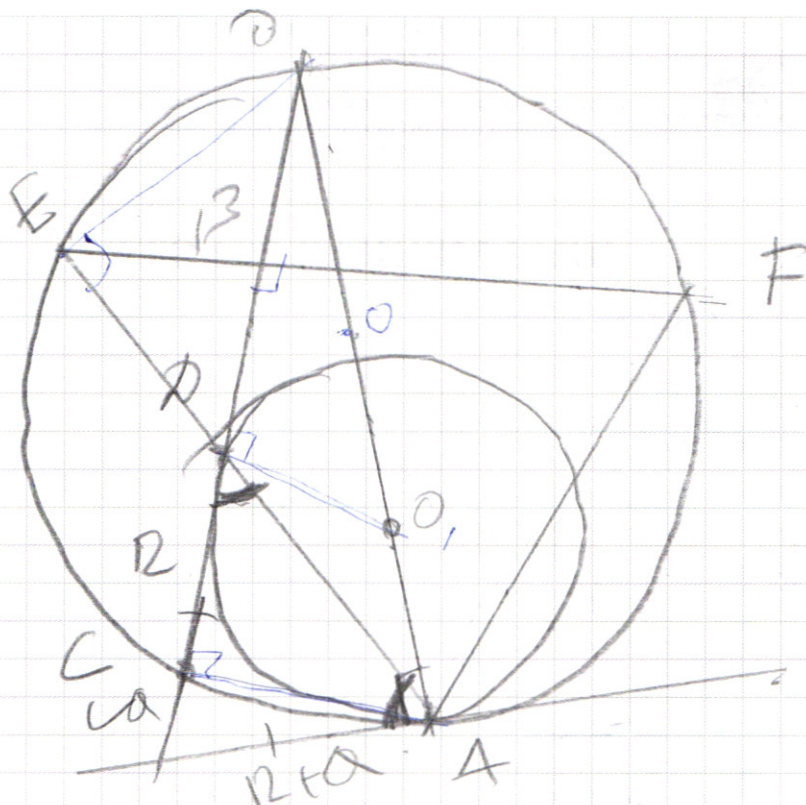
585

$$\begin{array}{r} \times 72 \\ \underline{144} \\ 376 \\ \underline{144} \\ 2016 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1440 \\ \underline{5876} \end{array}$$

$$\frac{17}{6} + \frac{28}{6} = \frac{45}{6} = 7.5$$

$$\frac{17}{6} + \frac{124}{36} + \frac{53}{6}$$



$$(25+a) \cdot a = 144 + a^2 + 24a$$

$$25 \cdot a = 144$$

$$\frac{144}{25} \cdot \frac{12}{13}$$

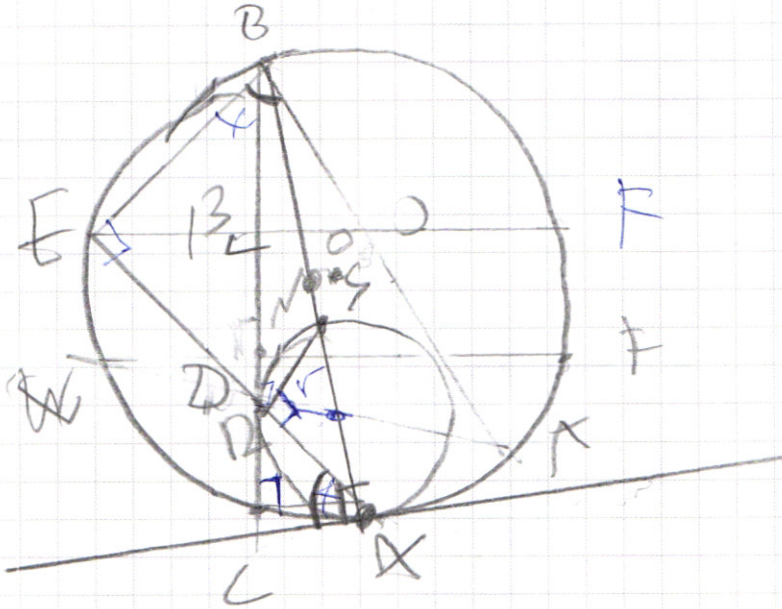
$$\cos = \frac{5}{13}$$

$$\frac{25 \cdot 13}{5} = 65$$

$$13 \cdot \frac{168}{5} = 33,8$$

$$13 \cdot \frac{12}{5} = \frac{156}{5}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$AD = DE = 13 \cdot 12$$

$$DE = AD \cdot \frac{156}{AD}$$

$$\frac{13}{R} = \frac{v}{R}$$

$$2R + (2R - 2v) = 13^2$$

$$(2R - v)^2 - v^2 = 13^2$$

$$4R^2 - 4Rv = 13^2$$

$$4R^2 = 13^2$$

$$\frac{4+4-6x}{3x-2} = \frac{4}{3x-2} - 2$$

$$-1.$$

$$-2.$$

$$8 - 34 + 28 = 2$$

$$a \cdot x \frac{2}{3} + b = 2$$

$$2a + b = -2$$

$$-\frac{4}{3}a = +4$$

$$a = -3$$

$$-3x + 4 = 0$$

$$-3x + 4 = 0 = \frac{4}{3x-2} - 2$$

$$-(3x+6) \cdot (3x-2) = -4$$

$$-9x^2 - 18x - 6x + 12 = -4$$

$$9x^2 - 24x + 16 = 0$$

$$(3x-4)^2 = 0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$36x - 51 = 0$$

$$x = \frac{51}{36} = 2$$

$$\frac{4+4-6x}{3x-2} = \frac{4}{3x-2} - 2$$

$$12 + 28 - 102 = -2$$

$$18 \frac{4}{3} - 34$$

$$36 \cdot 4 - 34 + 28 = 30$$

$$\frac{2}{3}a + b = 30$$

$$2a + b = -2$$

$$-\frac{4}{3}a = 32$$

$$a = -24$$

$$b = 46$$

$$-24x + 46 = \frac{4}{3x-2} - 2$$

$$-24x + 48 = \frac{4}{3x-2}$$

$$-18x^2 + 48x - 25 = 0$$

$$D = 18x^2$$

$$48 - 1800$$

$$-6x + 12 = \frac{1}{3x-2}$$

$$-18x^2 + 12x + 36x - 24 = 1$$

$$\begin{array}{r} 48 \\ \times 48 \\ \hline 192 \\ 192 \\ \hline 132 \end{array}$$

$$(26x - x^2) \log_5 12 + 26x - x^2 \geq 13 \log_5 t$$

$$t \log_5 12 + t \geq 13 \log_5 t$$

$$t \log_5 12 + 5 \log_5 t \geq 13 \log_5 t$$

$$t \log_5 12 + t \geq t \log_5 13$$

$$t \log_5 12 + t \geq t \log_5 13$$

$$\frac{t}{t}$$

$$t \log_5 12 + t \log_5 5 \geq t \log_5 13$$

$$12 \log_5 t + 5 \log_5 t \geq 13 \log_5 t$$

$$13^x - 12^x - 5^x$$

$$\frac{13^x}{\ln 13}$$

$$x \geq 2$$

$$x < 0$$

$$f(x) < 0$$

$$13^x = \frac{e^x}{\ln(e)}$$

$$x > 2$$

$$\log_5 t \geq 2$$

$$t \geq 25$$

$$26x - x^2 \geq 25$$

$$(1725)$$

$$x^2 - 26x + 25 \leq 0$$

$$D = 5676 - 100 \cdot 540 = 26^2 - 4 = 25$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$9x^2 - 18x + y^2 - 12y - 45$$

$$\begin{aligned} 324 - 36(y^2 - 12y - 45) \\ = 9 - y^2 + 12y + 45 \end{aligned}$$

$$y^2 - 12y + 9x^2 - 18x - 45$$

$$144 - 36(x^2 - 2x - 5)$$

$$9(x-1)^2 + (y-6)^2 = 90$$

$$y-6-6x+6$$

$$b-6a = \sqrt{ab}$$

$$9a^2 + b^2 = 90$$

$$\begin{aligned} 9a^2 + 16a^2 = 90 \\ a = \pm 1 \end{aligned}$$

$$b^2 + 36a^2 - 12ab = ab$$

$$9a^2 + b^2 = 90$$

$$b^2 + 36a^2 - 13ab = 0$$

$$\frac{b}{a} + 36\frac{a}{b} - 13 = 0$$

$$t + \frac{36}{t} - 13 = 0$$

$$t^2 - 13t + 36 = 0 \quad t_2 = \frac{13-5}{2} = 4$$

$$D = 669 - 144 = 25$$

$$t_1 = \frac{13+5}{2} = 9$$